

# MÉTRICAS DIFUSIVAS ASOCIADAS AL TRANSPORTE PÚBLICO EN AMBA EN EL CONTEXTO COVID-19

FLORENCIA ACOSTA, HUGO AIMAR, MAGALY CATANZARITI, RAQUEL CRESCIMBENI,  
IVANA GÓMEZ, FEDERICO MORANA, LUIS NOWAK, AND ALEJANDRA PERINI

RESUMEN. Este trabajo tiene por objeto ilustrar y mostrar una herramienta informática basada en análisis armónico discreto que, alimentada con datos precisos de hábitat y conectividad de las diferentes ciudades que integran el AMBA, podría ser útil para predecir y para simular resultados de intervenciones gubernamentales en pos de disminuir, atenuar y demorar la evolución de la pandemia en el mayor conglomerado urbano de la Argentina. Insistimos en que los resultados que se muestran aquí son sólo ilustraciones de la técnica, pero que consideramos que la abundancia de datos disponibles podría cargar este sistema de una manera adecuada para realizar modelizaciones y simulaciones útiles para la toma de decisiones. Observamos también que el esquema puede adecuarse a barrios de ciudades y a barrios dentro de las 41 ciudades que integran el AMBA. La técnica básica es la construcción de métricas difusivas que permiten medir distancias entre distintas ciudades en términos que no son los geográficos usuales y bosquejar posibles dinámicas de la propagación de la pandemia en grandes escalas. Al mismo tiempo pueden simularse las métricas que se obtendrían suprimiendo o disminuyendo conectividades entre distintos distritos.

## 1. INTRODUCCIÓN

En una comunidad como la de AMBA, con una gran población pero sobre todo con una notable heterogeneidad social y habitacional, no es de esperar, y es evidente por los datos recientes dentro de CABA, que exista un  $R_0$  único independiente del conglomerado urbano en consideración. Por otra parte, los intentos de generar un medio homogéneo teórico con un  $R_0$  promedio, corren el riesgo de inducir medidas sanitarias de testeo y aislamiento que sean ineficientes por defecto en algunos lugares o innecesarias por exceso en otros. De esto resulta claro que si se toman las medidas sanitarias y de aislamiento que corresponden al peor  $R_0$ , entonces toda la sociedad estará mejor protegida contra la pandemia.

Los modelos SIR o sus generalizaciones son buenos predictores frente a concentraciones urbanas homogéneas con un  $R_0$  que represente bien los intervalos de duplicación de la pandemia en toda la población. Es claro que, pensando en los 41 municipios que integran

---

*Key words and phrases.* COVID-19, AMBA-Argentina, difusión, Laplaciano, metrización.

This work was supported by the Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación de la Nación-MINCYT in Argentina: CONICET and ANPCyT; UNCOMA and UNL.

AMBA, así como entre los distintos barrios de CABA, tal homogeneidad es inexistente. Entonces puede considerarse el problema de resolver SIR dentro de subregiones o subpoblaciones que puedan considerarse homogéneas. Pero estos diferentes conglomerados urbanos homogéneos tienen momentos de inicio de los contagios diferentes. Lo hemos observado empíricamente por el tiempo que transcurrió entre los ingresos del virus por infectados en viajes internacionales y el inicio de la pandemia en Villa 31 de Retiro en CABA.

Esto plantea problemáticas de diferentes escalas. Una intracomunitaria dentro de cada comunidad homogénea con los métodos de Ecuaciones Diferenciales de tipo SIR y al menos otra intercomunitaria que nos permita detectar el tiempo inicial de la pandemia en cada una de las comunidades de un conglomerado mucho mayor.

El AMBA, con sus 41 localidades, 40 del conurbano bonaerense más CABA ofrece una macroestructura suficientemente grande y diversa como para hacer una primera aproximación a la modelización de la manera en la que la pandemia se difunde entre estas 41 localidades. Hay muchos aspectos que con abundancia de datos pueden ponerse en consideración para identificar características propias de cada localidad. Y hay muchos otros aspectos que pueden caracterizar el grado de conectividad entre poblaciones diferentes. Es casi innecesario enfatizar sobre el papel central que CABA ejerce sobre el sistema dado el grado de conectividad de CABA con todas las otras 40 poblaciones de AMBA.

Un primer modelo elemental que puede dar cuenta de características propias de cada comunidad y del grado de conectividad entre ellas para formar un grafo ponderado es el siguiente. Consideramos modelos con varias características básicas de cada localidad, uniformidad, población, densidad de infectados activos en una fecha fija, etcétera. Cuyo rango está entre 14236 habitantes por kilómetro cuadrado en CABA y 20 habitantes por kilómetro cuadrado en General Las Heras. En cuanto a la ponderación de las aristas del grafo que guarda alguna relación con el movimiento de personas entre un distrito y otro, consideramos la cantidad y calidad de transporte público que une cada una de las 41 ciudades con cualquier otra. Así obtenemos dos entidades matemáticas: un vector de 41 entradas con la normalización a probabilidad de las características de cada población de cada una de las 41 localidades y una matriz simétrica con 1681 entradas y diagonal nula, en la que en la entrada  $i, j$  hay una ponderación de la conectividad vía transporte público entre las localidades  $i$  y  $j$ . Consideramos en este punto que, aunque algunos de los medios de transporte público que en normalidad funcionan y hoy están restringidos por las medidas preventivas, el coeficiente que pondera una arista definido en términos del transporte público, tiene todavía una representación de la cantidad de viajes que se realizan por transporte privado bajo las restricciones que impone COVID-19.

Estos dos datos permiten calcular el operador de Laplace del grafo, y su análisis espectral. Desde esta estructura se puede construir una métrica, la de Coifman-Lafon, que se ha dado en llamar “métrica difusiva” y que da una noción de cercanía entre dos localidades que no siempre se corresponde con la distancia geográfica y que podría sugerir cuáles localidades son cercanas para el avance de COVID-19. En esta primera parte del trabajo abordamos esta parte del análisis.

Por otra parte, a partir de los datos en <http://www.elldigital.com.ar/.../90161-el-mapa-del-coronavirus-en-el-conurbano> y el análisis espectral, autovalores y autovectores del Laplaciano en el grafo de 41 vértices y 1681 aristas, podemos resolver explícitamente la ecuación de difusión con condición inicial dada por el dato diario en esa página web. Exactamente como si fuera la difusión de la energía térmica en una barra metálica heterogénea, aislada y con una distribución inicial dada. Resulta claro que NO estaríamos midiendo aquí el número de infectados en cada localidad sólo veremos cómo es el frente de propagación de la pandemia con el transcurso del tiempo, y eventualmente cuáles serían las localidades a las que la pandemia llegaría antes si no se interrumpen algunas o todas las conectividades que la matriz describe. Nos ocuparemos de esta segunda parte en otro informe que está en preparación.

Es importante notar que esto es sólo una prueba muy rudimentaria, pero que con datos más finos como el que puede obtenerse de las estadísticas del uso de SUBE para armar la matriz de conectividad y otros indicadores de las condiciones de hábitat de cada localidad, el modelo podría predecir mejor los caminos de la difusión de la pandemia en éste, el más grande conglomerado urbano de Argentina.

Organizamos este trabajo de la siguiente manera: en la Sección 2 introducimos brevemente el modelo matemático en sus tres componentes principales, que son el operador de Laplace, la ecuación de Difusión y la métrica difusiva. En la Sección 3 exhibimos y ponemos a consideración la matriz de conectividad construida para AMBA con datos disponibles en la web y el vector de ponderación de densidades de población de cada una de las 41 localidades. Además exponemos para algunos valores del tiempo las métricas difusivas y graficamos bolas métricas de diferentes radios y diferentes centros que permiten dar una idea de proximidad o lejanía vistas con la dinámica del avance del virus para diferentes localidades de AMBA. Se incluyen también ejemplos de las modificaciones de estas métricas y de las distancias correspondientes si se instrumenta la aislación de algunas localidades. También es posible, como ya mencionamos, implementar la difusión a partir del análisis espectral y de condiciones iniciales reales obtenidas de la página web antes mencionada.

Los resultados del algoritmo que implementamos en esta parte se expresan en términos de métricas que permiten bosquejar las distancias entre las ciudades de AMBA en términos de conectividades y características propias de cada población. Los resultados pueden mostrarse gráficamente considerando vecindades (bolas) crecientes centradas en CABA.

Insistimos en que los datos en los que este experimento se basa son muy rudimentarios y que cualquier carga más fina de datos en la matriz y en las características de los nodos que representan a las localidades pueden producir más precisión y mayor poder predictivo.

## 2. EL OPERADOR DE LAPLACE, LA MÉTRICA DIFUSIVA Y LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN EN EL GRAFO AMBA

Esta sección es la más teórica, aunque sencilla, y tiene por objeto fijar la terminología y fijar el contexto.

Sea  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_{41}\}$  el conjunto de las ciudades (partidos) que constituyen el AMBA (Área Metropolitana Buenos Aires).

A cada  $c_i \in \mathcal{C}$  le corresponde un número positivo  $a_i$  entre cero y uno que representa a la normalización de la característica particular de la población de la ciudad  $c_i$ . La normalización es probabilística:  $\sum_{i=1}^{41} a_i = 1$ . Denotamos por  $\vec{a}$  al vector de componentes  $a_i$ .

Además de la ponderación de cada ciudad, hemos recopilado y normalizado también una ponderación del flujo urbano entre cada par de ciudades  $c_i$  y  $c_j$  en términos del transporte público disponible entre esas ciudades. Esto nos da una matriz de  $41 \times 41$  entradas que pondera, de algún modo, el grado de conectividad entre  $c_i$  y  $c_j$  para cada  $i = 1, 2, \dots, 41$  y para cada  $j = 1, 2, \dots, 41$ . La matriz es simétrica y con diagonal nula y contiene entonces, un total de 820 datos de conectividad. Cada uno de los pesos es esta matriz  $\overline{W}$  se denota con  $w_{ij}$ . Cuando el transporte público entre dos localidades es inexistente o necesita un número muy grande de trasbordos, hemos puesto un cero en esta matriz. En la Sección 2 la escribiremos explícitamente. Esta matriz también está normalizada a probabilidad, en el sentido que  $\sum_{i=1}^{41} \sum_{j=1}^{41} w_{ij} = 1$ .

Esta doble estructura de concentración y afinidad genera métricas naturales en el conjunto de los vértices (ciudades) que pueden dar una idea de proximidad entre ellos que no coincide con la geográfica pero que es más realista en términos de la conectividad del grafo.

La construcción de la métrica se basa en la posibilidad de modelizar difusiones en el grafo. Para esto un operador de Laplace definido sobre funciones reales sobre el grafo es la pieza clave. Sea  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  una función real definida en los vértices o, si se quiere, un vector con 41 entradas reales cualesquiera. El Laplaciano de  $f$  es otra función real

definida sobre  $\mathcal{C}$  por

$$\Delta f(i) = \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^{41} w_{ij}(f(j) - f(i)).$$

Así definido, el operador Laplaciano es semidefinido negativo y simétrico (autoadjunto). Entonces existe una sucesión finita de escalares no positivos  $\lambda_0 = 0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$  y una sucesión finita de funciones  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$  definidas en  $\mathcal{C}$  tales que

$$\Delta \phi_i = \lambda_i \phi_i \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

y  $\{\phi_i\}$  es una base de  $\mathbb{R}^{41}$  el espacio de todas las funciones definidas en  $\mathcal{C}$ . En algún sentido, que el análisis armónico estudia y usa desde hace mucho tiempo, toda la información contenida en nuestros datos  $\vec{a}$  y  $\overline{\overline{W}}$  se encuentra resumida y organizada jerárquicamente en la resolución espectral  $\{\lambda_i, \phi_i\}$  que se obtiene por métodos algebraicos del operador de Laplace.

En particular es ahora sencillo resolver la ecuación de difusión con condición inicial  $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(D) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u; & u(i, t); i = 1, 2, \dots, 41; t > 0 \\ u(i, 0) = g(i) \end{cases}$$

Es fácil ver que  $u(j, t) = \sum_{i \geq 0} e^{t\lambda_i} \langle g, \phi_i \rangle \phi_i(j)$ , donde  $\langle g, \phi_i \rangle = \sum_{l=1}^{41} a_l g(l) \phi_i(l)$ . Esta fórmula provee una difusión que muestra cómo se propaga con el transcurso del tiempo una “señal” inicial  $g$  definida en  $\mathcal{C}$ .

Pero esta fórmula induce también una familia de métricas en  $\mathcal{C}$ . Son llamadas métricas difusivas y se deben a Coifman y Lafon [CL06]. Para tiempo  $t$  positivo y fijo definimos la distancia difusiva a tiempo  $t$  entre las ciudades  $c_i$  y  $c_j$  por la fórmula

$$d_t(i, j) = \sqrt{\sum_{l \geq 0} e^{2t\lambda_l} [\phi_l(i) - \phi_l(j)]^2}.$$

Es sencillo probar que  $d_t$  es una métrica y resulta claro que, puesto que los  $\lambda_l$  son menores o iguales que cero, cuando  $t$  crezca la métrica desdibujará el papel de las autofunciones que no correspondan al autoespacio del autovalor cero.

Cuando una métrica está dada en el conjunto  $\mathcal{C}$ , una idea de la geometría, de la proximidad y del vecindario de una localización lo proveen las bolas métricas. Para  $t > 0$  denotamos con  $B_t(i, r)$ , para  $i = 1, 2, \dots, 41$  y  $r > 0$  al conjunto

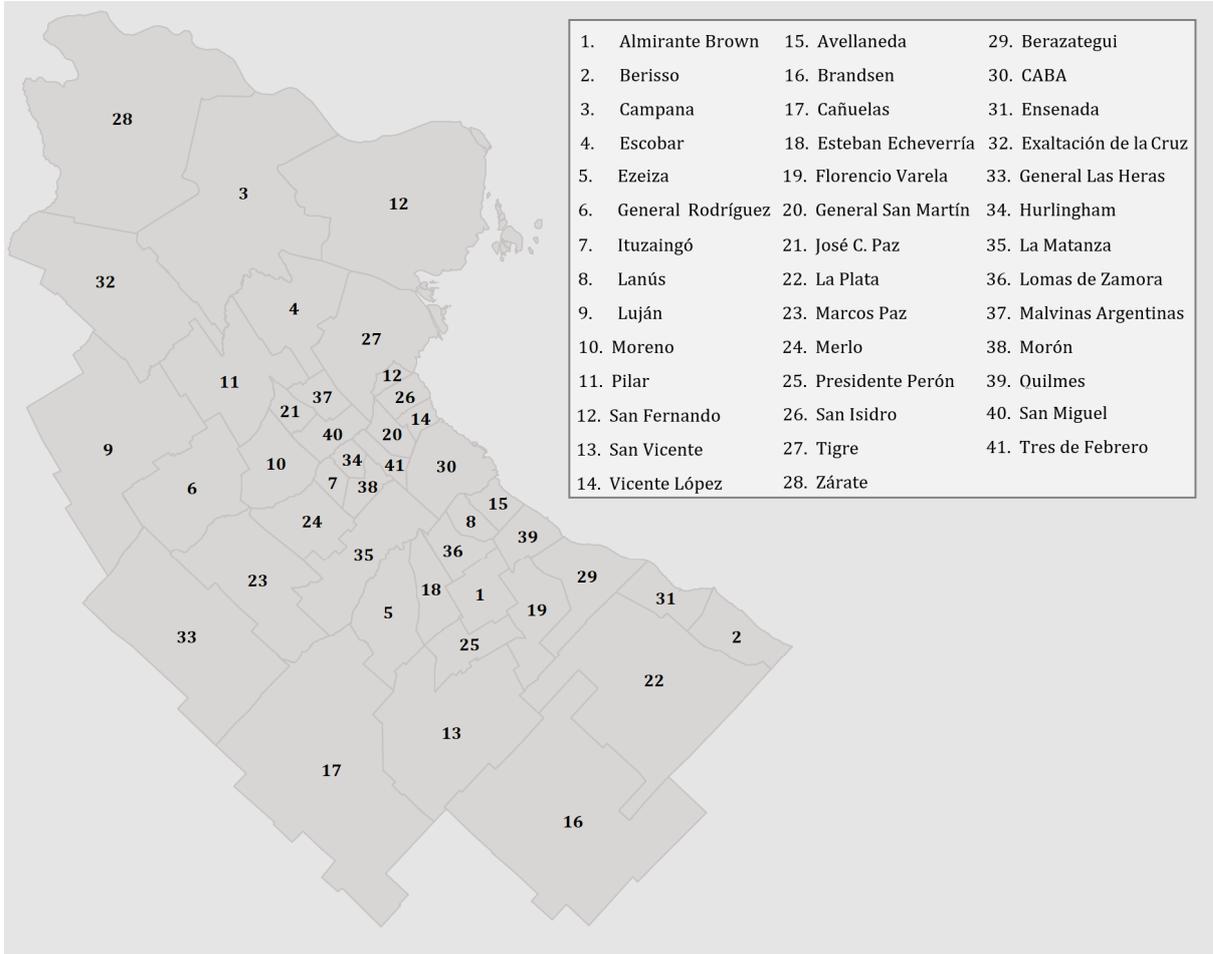
$$B_t(i, r) = \{j : d_t(i, j) < r\}.$$

Las coronas métricas, que nos proveen una idea de cambio de la forma y el tamaño de las bolas a tiempo fijo y cuando  $r$  aumenta, son los conjuntos

$$C_t(i, r, R) = B_t(i, R) \setminus B_t(i, r) = \{j : r \leq d_t(i, j) < R\}.$$

### 3. CONECTIVIDAD Y DENSIDAD AMBA (T,D) (TRANSPORTE Y DENSIDAD)

El siguiente mapa y sus referencias indican la numeración de los vértices en la construcción de los datos  $\vec{a}$  y  $\overline{\overline{W}}$  correspondientes a AMBA.



Con un criterio elemental que pondera trenes, colectivos y combinaciones de ambos obtuvimos la siguiente matriz de conectividad

$$\overline{\overline{W}} = \begin{pmatrix} W^1 & W^3 \\ W^2 & W^4 \end{pmatrix}$$

donde la matriz  $W^1$  es la siguiente

1	0	0	0	0	0,00172612	0	0	0,00172612	0	0	0	0	0,00057537	0,00172612	0,00172612	0	0,00172612	0,00057537	0,00172612	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0,00115075	0	0,00057537	0	0	0,00057537	0,00057537	0,00057537	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00172612	0,00057537
4	0	0	0,00115075	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00115075	0,00115075	0	0	0	0	0,00115075	0
5	0,00172612	0	0	0	0	0	0	0,00115075	0	0	0	0	0,00115075	0,00115075	0,00115075	0,00115075	0,00115075	0,00172612	0	0
6	0	0	0,00057537	0	0	0,00172612	0	0,00115075	0	0,00115075	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00115075	0
7	0	0	0	0	0,00172612	0	0,00172612	0	0,00115075	0,00172612	0	0	0,00172612	0,00172612	0	0	0	0	0,00172612	0,00172612
8	0,00172612	0	0	0,00115075	0	0,00172612	0	0,00172612	0,00172612	0,00172612	0,00172612	0	0,00172612	0,00115075	0	0,00115075	0	0,00172612	0,00057537	0,00172612
9	0	0	0,00057537	0	0	0	0	0,00057537	0,00172612	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00172612	0,00172612
10	0	0	0,00057537	0	0,00115075	0,00115075	0,00172612	0,00057537	0	0,00172612	0,00172612	0	0,00172612	0,00172612	0	0	0	0,00172612	0,00172612	0,00172612
11	0	0	0,00057537	0	0	0,00172612	0	0,00172612	0	0,00172612	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00172612	0,00172612
12	0	0	0	0,00172612	0	0	0,00172612	0	0	0,00172612	0	0	0	0,00172612	0,00172612	0	0	0	0,00172612	0,00172612
13	0,00057537	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0,00172612	0	0,00115075	0,00172612	0	0,00172612	0,00172612	0	0,00172612	0	0,00172612	0	0	0,00057537	0	0,00115075	0,00172612	0,00057537	0,00057537	0,00172612
15	0,00172612	0	0	0,00115075	0	0,00172612	0,00115075	0	0,00172612	0	0,00172612	0	0,00057537	0	0,00115075	0,00172612	0,00172612	0,00172612	0,00172612	0,00172612
16	0	0	0	0,00115075	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00115075	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0,00115075	0	0	0,00115075	0	0	0	0	0	0	0	0,00115075	0	0,00115075	0,00172612	0	0
18	0,00172612	0	0	0,00172612	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00115075	0	0,00115075	0	0,00172612	0	0
19	0,00057537	0	0	0,00172612	0	0	0	0,00172612	0	0,00172612	0	0	0,00057537	0,00172612	0	0,00172612	0,00172612	0	0,00172612	0
20	0,00172612	0	0,00172612	0,00115075	0	0,00115075	0,00172612	0,00057537	0,00172612	0,00172612	0,00172612	0	0,00057537	0,00172612	0	0	0	0,00172612	0	0,00172612
21	0	0	0,00057537	0	0	0,00172612	0,00172612	0,00172612	0,00172612	0,00172612	0,00115075	0,00172612	0	0,00172612	0,00172612	0	0	0	0,00172612	0

la matriz  $W^2$





35 [0,1,0,0,2,0,0,2,0,0,0,0,0,0,2,1,0,0,0,3,3,0,0,0,0,0,0,0,2,3,1,0,0,0,0,2,0,0,2,0,0]

36 [0,0,0,0,0,2,2,0,3,3,0,0,0,0,3,0,0,0,0,0,3,0,0,3,0,3,0,0,0,2,0,0,2,3,1,0,0,3,0,0,1]

37 [0,0,0,0,0,2,2,3,3,2,3,3,0,1,3,0,0,0,0,3,3,0,3,0,0,0,0,0,0,3,0,0,2,3,3,3,3,2,3,3,3]

38 [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,3,0,0,0,0,0,2,3,0,2,0,3]

39 [0,0,0,0,0,0,3,3,3,3,0,2,0,3,3,0,0,0,0,3,3,0,3,0,0,0,2,0,3,2,0,0,3,3,0,3,0,3,3,3,3]

40 [0,0,1,3,0,0,3,3,3,3,0,2,0,3,3,0,0,0,0,3,3,0,0,0,0,2,0,0,3,2,0,3,0,2,0,3,0,0,3,1,1]

41 [0,0,2,2,0,0,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0,0,0,0,3,3,0]

42 [3,0,0,0,2,0,0,2,0,3,0,0,0,3,2,3,2,2,1,3,3,2,0,0,2,3,3,0,0,3,0,0,0,3,3,2,3,3,2,3,3]

43 [3,0,3,2,3,3,3,3,3,3,3,2,0,2,3,3,3,3,3,3,3,2,3,3,2,2,0,3,0,0,0,0,3,3,3,3,3,3,3,3,3]

44 [0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

45 [0,0,1,2,0]

46 [0,0,0,0,0,0,2,0,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,2,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

47 [0,0,0,3,0,3,3,3,3,3,2,3,0,3,3,0,0,0,0,3,2,0,3,3,0,3,2,0,3,3,0,0,0,0,1,1,3,1,0,2,3]

48 [0,0,0,0,0,3,3,3,3,3,3,1,0,1,3,0,0,0,0,1,3,0,1,3,0,0,0,0,3,3,0,0,0,1,0,1,0,3,0,3,1]

49 [3,0,0,0,2,0,3,2,0,3,0,3,0,3,0,3,2,2,2,2,3,3,0,2,0,3,2,3,3,0,2,3,0,0,0,1,1,0,0,1,3,3,3]

50 [1,0,1,0,3,0,0,3,0,3,0,3,0,3,3,3,3,1,3,3,0,0,0,3,3,0,0,0,3,3,0,0,0,3,0,0,0,0,0,3,0]

51 [0,0,0,0,3,2,2,3,3,3,3,3,0,3,3,0,0,3,0,3,3,0,3,2,0,3,0,0,3,3,0,0,2,1,3,1,0,0,0,3,3]

52 [3,0,0,0,2,0,3,2,0,3,0,3,0,3,3,3,2,3,3,3,0,2,0,3,2,3,3,0,2,3,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0,0]

53 [0,0,0,0,0,0,3,3,1,3,2,3,0,3,3,0,0,0,0,3,2,0,0,3,0,3,1,0,3,3,0,0,0,2,3,3,3,3,0,0,3]

54 [0,0,0,2,0,0,3,1,3,3,3,3,0,1,3,0,0,0,0,1,3,0,1,3,3,3,1,0,3,3,0,0,0,3,1,3,0,3,0,3,0]

55 ])

```

56 W = Ww/(sum(sum(Ww))) # Normalizacion de la matriz de pesos
57
58 ### Pesos de los nodos
59 aa=np.array([a0,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12,a13,a14,a15,a16,
              a17,a18,a19,a20,a21,a22,a23,a24,a25,a26,a27,a28,a29,a30,a31,a32,a33,
              a34,a35,a36,a37,a38,a39,a40])
60 a = aa/sum(aa) # Normalizacion de los pesos de los nodos
61 A = np.diag(a) # Matriz diagonal de pesos de los nodos
62
63 Ai = np.linalg.inv(A) # A(-1)
64 a_rc = np.sqrt(a)
65 A_rc = np.diag(a_rc) # A(1/2)
66 ai_rc = 1/a_rc
67 Ai_rc = np.diag(ai_rc) # A(-1/2)
68 w_cols = W.sum(axis=0) # Vector de las sumas de las columnas de W
69 D = np.diag(w_cols)
70
71 L = Ai.dot(D-W) # Laplaciano
72 Ln = Ai_rc @ (D-W) @ Ai_rc # Laplaciano normalizado
73
74 ### Analisis espectral
75 val, vecLn = np.linalg.eigh(Ln) # autovalores y autovectores de Ln
76 if abs(val[0])<0.0000001: val[0]=0 # correccion error redondeo
77 # Los autovalores de Ln y de L coinciden, pero los autovectores de L
78 # resultan de pre-multiplicar por A(-1/2) a los autovectores de Ln
79 vecL = Ai_rc @ vecLn
80
81 ### Nucleo del calor a tiempo t
82 t = fijo
83 expval = np.exp(-t*val)
84 # Matriz del calor a tiempo t, i.e. H[i] = h_t(i,..)
85 H = (expval*vecL)@(vecL.T)
86
87 ### Distancia difusiva a tiempo t
88 def dist_calor(i,j): # distancia difusiva entre dos nodos
89 return np.sqrt( (H[i]-H[j]) @ A @ (H[i]-H[j]) )
90 # Matriz de distancias entre nodos
91 M_dist = np.zeros((n, n))
92 for v in range(n):
93 for w in range(n):
94 M_dist[v,w] = dist_calor(v,w)

```

```

95
96 ### Creacion del grafo a partir de W
97 G = nx.Graph()
98 G = nx.from_numpy_matrix(np.matrix(W))
99
100 labeldict = {}
101 for m in range(n):
102 labeldict[m] = m+1
103 # labeldict[0] = "1", labeldict[1] = "2", ..., labeldict[40] = "41"
104
105 pos={
106 0:(-0.3,-1), 1:(1.2,-2.2), 2:(-1.2,2.1), 3:(-0.8,1.9), 4:(-1,-0.9),
107 5:(-1.5,1.3), 6:(-0.7,1), 7:(0,-0.5), 8:(-2,1.5), 9:(-1.2,1.3),
108 10:(-1.2,1.8), 11:(0,2), 12:(-0.8,-2), 13:(0,0.5), 14:(0.2,-0.5),
109 15:(-0.3,-3), 16:(-2,-1.5), 17:(-0.5,-0.7), 18:(-0.3,-1.5),
110      19:(-0.3,0.7),
111 20:(-0.7,1.5), 21:(0.7,-2.5), 22:(-1.5,0), 23:(-1.2,0.1), 24:(-0.5,-1),
112 25:(0,1.3), 26:(-0.4,1.8), 27:(-1.7,2.3), 28:(0.5,-1.5), 29:(0,0),
113 30:(1,-2), 31:(-2,2.2), 32:(-2,-0.5), 33:(-0.5,1), 34:(-1,-0.5),
114 35:(-0.3,-0.7), 36:(-0.3,1.5), 37:(-0.7,0.3), 38:(0.3,-1),
115      39:(-0.5,1.3),
116 40:(-0.5,0.5)}
117
118 plt.figure()
119 node_color = np.ones(n) # Vector de colores del grafo
120
121
122 ## Grafico de bolas centradas en el nodo i
123 i = 29 # bola en CABA
124
125 # Calculo de las distancias maximas y minimas respecto al nodo i
126 dist_max_i = np.max(M_dist[:,29])
127 dist_min_i = dist_max_i
128
129 for j in range(n):
130 if M_dist[i,j]>0:
131 dist_min_i = min(dist_min_i, M_dist[i,j])
132
133 radios = np.linspace(dist_min_i, dist_max_i, num=7, endpoint=False)
134 radios[0] = 0
135
136 for k in range(n):
137 for v in range(len(radios)):

```

```

134 if M_dist[i][k] >= radios[v]:
135     node_color[k]=20-2*v
136
137     node_color[i]=22
138
139 nx.draw(G, pos, node_color=node_color, cmap=plt.cm.viridis)
140 nx.draw_networkx_labels(G, pos, labels=labeldict, font_size=10,
141     font_family='sans-serif')
141 plt.show()

```

Con la misma matriz de conectividad  $\overline{\overline{W}}$  implementamos el programa para

- (a) distintas característica en los nodos
- (b) distintos valores de tiempo
- (c) distintos radios de proximidad (colores) a CABA.

Para sintetizar la presentación de las imágenes estableceremos la nomenclatura:

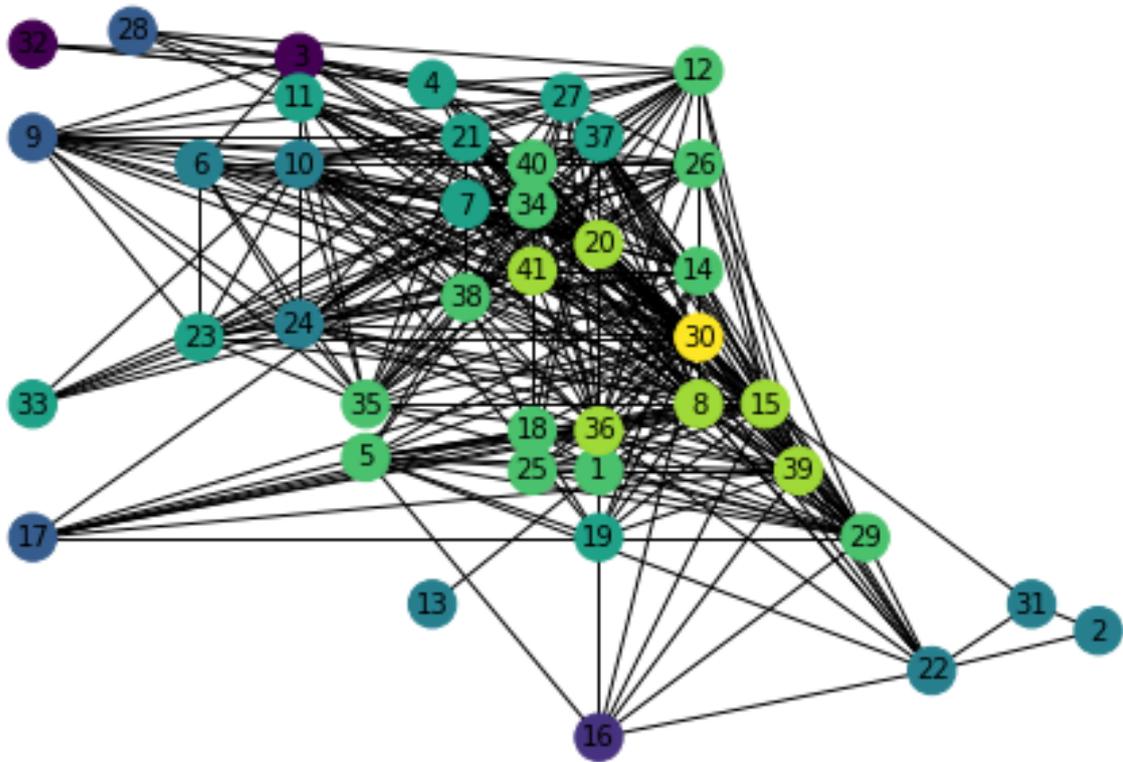
- (a.u)** considera indistinguibles los 41 nodos de AMBA, es decir,  $a_i = \frac{1}{41}$  para todo  $i$ ;
- (a.p)** considera la población de cada uno de los 41 nodos AMBA;
- (a.d)** considera la normalización del cociente número de infectados/población total en cada distrito  $c_i$  al 7 de julio de 2020.

Para describir el parámetro  $t$  en (b) usaremos **(b.t)** para declarar este valor de  $t$ . En tanto que sin la aclaración estricta de los valores de los radios (distancias a CABA) usaremos el siguiente código de colores para radios (distancias) crecientes:

- CABA: amarillo
- Primeros vecinos: verde claro
- Segundos vecinos: verde
- Terceros vecinos: turquesa
- Cuartos vecinos: lavanda
- Quintos vecinos: azul
- Sextos vecinos: púrpura

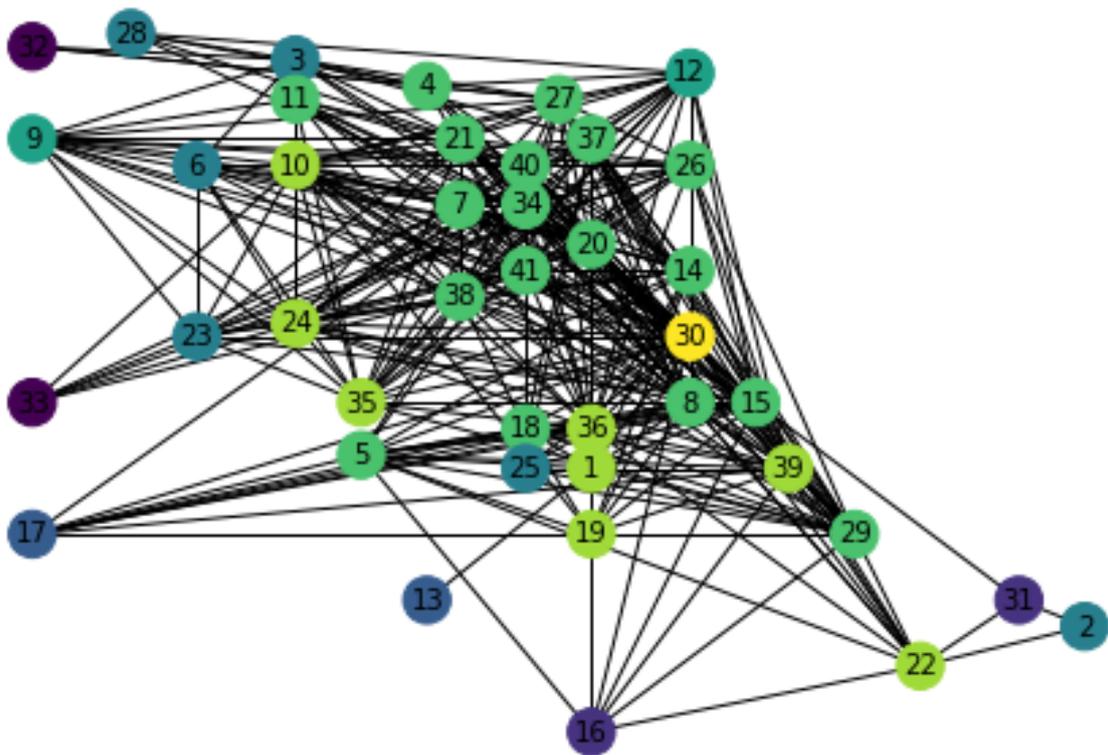
Caso (a.d) y (b. 0,01)

radios: 6,05939 7,39083 8,72227 10,0537 11,3852 12,7166



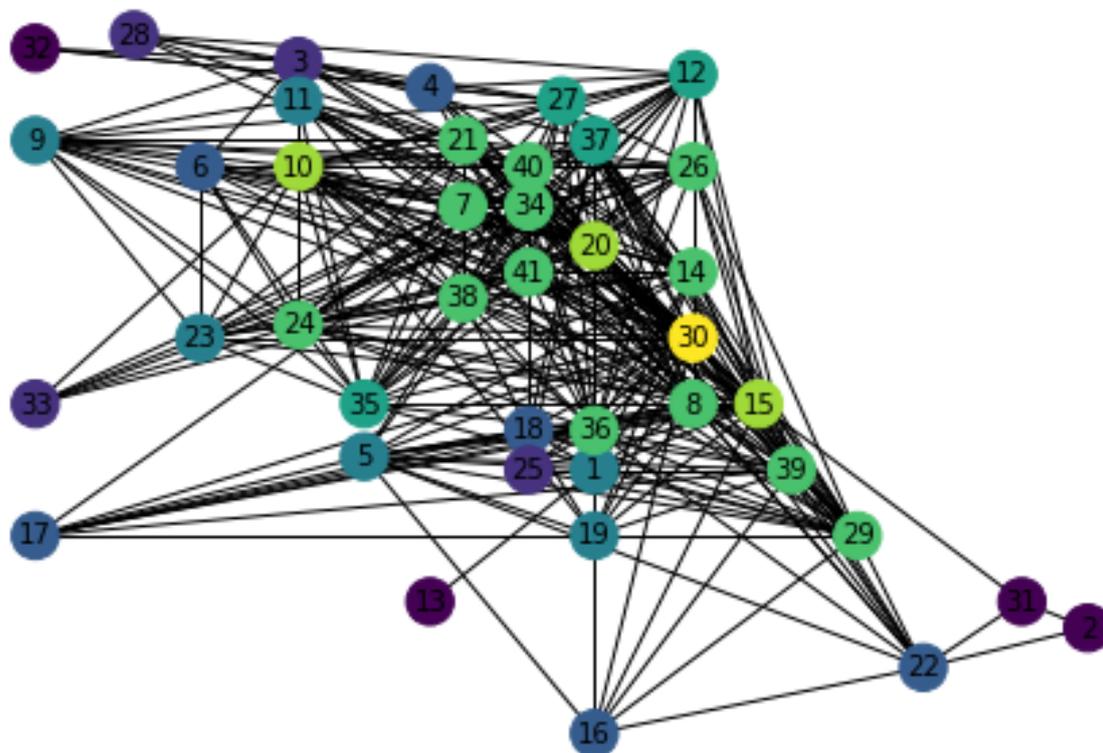
Caso (a.p) y (b. 0,05)

radios: 6,0548 8,58239 11,11 13,6376 16,1652 18,6928



### Caso (a.u) y (b. 0,05)

radios: 8,20263 8,26557 8,32851 8,39145 8,45439 8,51733



Notemos que como es de esperar al menos intuitivamente, la imagen que mejor se asocia a un frente de propagación de la pandemia en la gran escala de AMBA es la que corresponde a la ponderación de cada distrito  $c_i$  con el cociente entre el número de infectados en ese distrito en un momento dado y la población total en el distrito. En cambio (a.u) refleja mejor la intensidad del transporte y (a.p) la magnitud de las poblaciones.

### REFERENCIAS

- [AAG20] María Florencia Acosta, Hugo Aimar, and Ivana Gómez, *On Frink's type metrization of weighted graphs*, Submitted (2020).
- [CL06] Ronald R. Coifman and Stéphane Lafon, *Diffusion maps*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **21** (2006), 5–30.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA APLICADA DEL LITORAL, CONICET, UNL.

CCT CONICET Santa Fe, Predio “Alberto Cassano”, Colectora Ruta Nac. 168 km 0, Paraje El Pozo, S3007ABA Santa Fe, Argentina.

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS Y CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE, CONICET; DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA-FAEA-UNCOMA.

Neuquén, Argentina

*Contacto e-mail:* [haimar@santafe-conicet.gov.ar](mailto:haimar@santafe-conicet.gov.ar)