Defensa de Tesis Doctoral:

Difusiones no locales y operadores de derivación fraccionaria en espacios métricos de medida

Marcelo Actis

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET-UNL)
Facultad de Ingeniería Química (UNL)

Director:

Hugo Aimar

Santa Fe, 17 de marzo de 2014

$$\begin{cases} u_t &= -(-\Delta)^{s/2}u, \\ u &= u_0, \quad t = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t &= -(-\Delta)^{s/2}u, \\ u &= u_0, \quad t = 0. \end{cases}$$

$\uparrow$

Existencia de soluciones: u_0 **en** S_∞**,** $(S_\infty)'$ **y** B_r^2

Extensión del problema a espacios métricos de medida

$$\begin{cases} u_t &= -(-\Delta)^{s/2}u, \\ u &= u_0, \quad t = 0. \end{cases}$$

Existencia de soluciones: u_0 en S_∞, $(S_\infty)'$ y B_r^2

Contexto para D^s (espacios Ahlfors)

Extensión del problema a espacios métricos de medida

$$\begin{cases} u_t &= -(-\Delta)^{s/2} u, \\ u &= u_0, \qquad t = 0. \end{cases}$$

Existencia de soluciones: u_0 en S_∞, $(S_\infty)'$ y B^2_r

Contexto para D^s (espacios Ahlfors)

Espacios funcionales (Besov-Sobolev)

Extensión del problema a espacios métricos de medida

$$\begin{cases} u_t = -(-\Delta)^{s/2}u, \\ u = u_0, \quad t = 0. \end{cases}$$

Existencia de soluciones: u_0 en S_∞, $(S_\infty)'$ y B^2_r

Contexto para D^s (espacios Ahlfors)

Espacios funcionales (Besov-Sobolev)

Extensión del problema a espacios métricos de medida

Normalización (diádica)

$$\begin{cases} u_t &= -(-\Delta)^{s/2}u, \\ u &= u_0, \quad t = 0. \end{cases}$$

Existencia de soluciones: u_0 en S_∞, $(S_\infty)'$ y B_r^2

Contexto para D^s (espacios Ahlfors)

Espacios funcionales (Besov-Sobolev)

Extensión del problema a espacios métricos de medida

Normalización (diádica)

$$\begin{cases} u_t &= -(-\Delta)^{s/2}u, \\ u &= u_0, \quad t = 0. \end{cases}$$

Existencia de soluciones y convergencia puntual al dato inicial: u_0 en L^p

Existencia de soluciones: u_0 en S_∞, $(S_\infty)'$ y B_r^2

Contexto para D^s (espacios Ahlfors)

Espacios funcionales (Besov-Sobolev)

Extensión del problema a espacios métricos de medida

Normalización (diádica)

$$\begin{cases} u_t &= -(-\Delta)^{s/2} u, \\ u &= u_0, \quad t = 0. \end{cases}$$

Existencia de soluciones y convergencia puntual al dato inicial: u_0 en L^p

Existencia de soluciones: u_0 en S_∞, $(S_\infty)'$ y B^2_r

Ecuaciones de Schrödringer no locales

Contexto para D^s (espacios Ahlfors)

Espacios funcionales (Besov-Sobolev)

Extensión del problema a espacios métricos de medida

Normalización (diádica)

$$\begin{cases} u_t &= -(-\Delta)^{s/2}u, \\ u &= u_0, \quad t = 0. \end{cases}$$

Existencia de soluciones y convergencia puntual al dato inicial: u_0 en L^p

Existencia de soluciones: u_0 en S_∞, $(S_\infty)'$ y B^2_r

Ecuaciones de Schrödringer no locales

Existencia de soluciones y convergencia puntual al dato inicial: u_0 en B^2_r

Contexto para D^s (espacios Ahlfors)

Espacios funcionales (Besov-Sobolev)

DNL asociadas a operadores de núcleo integrable en espacios de medida

Extensión del problema a espacios métricos de medida

Normalización (diádica)

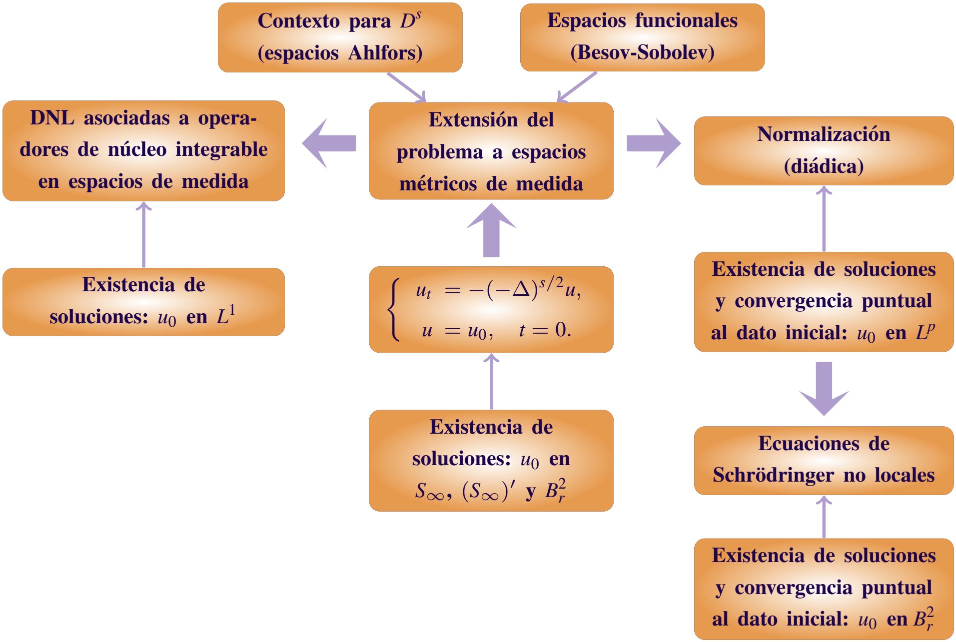
$$\begin{cases} u_t &= -(-\Delta)^{s/2}u, \\ u &= u_0, \quad t = 0. \end{cases}$$

Existencia de soluciones y convergencia puntual al dato inicial: u_0 en L^p

Existencia de soluciones: u_0 en S_∞, $(S_\infty)'$ y B^2_r

Ecuaciones de Schrödinger no locales

Existencia de soluciones y convergencia puntual al dato inicial: u_0 en B^2_r


Contexto para D^s (espacios Ahlfors)
Espacios funcionales (Besov-Sobolev)
DNL asociadas a operadores de núcleo integrable en espacios de medida
Extensión del problema a espacios métricos de medida
Normalización (diádica)
Existencia de soluciones: u_0 en L^1
$\begin{cases} u_t = -(-\Delta)^{s/2}u, \\ u = u_0, \quad t = 0. \end{cases}$
Existencia de soluciones y convergencia puntual al dato inicial: u_0 en L^p
Existencia de soluciones: u_0 en S_∞, $(S_\infty)'$ y B^2_r
Ecuaciones de Schrödringer no locales
Existencia de soluciones y convergencia puntual al dato inicial: u_0 en B^2_r

Contexto para D^s (espacios Ahlfors)

Espacios funcionales (Besov-Sobolev)

DNL asociadas a operadores de núcleo integrable en espacios de medida

Extensión del problema a espacios métricos de medida

Normalización (diádica)

Existencia de soluciones: u_0 en L^1

$$\begin{cases} u_t &= -(-\Delta)^{s/2}u, \\ u &= u_0, \quad t = 0. \end{cases}$$

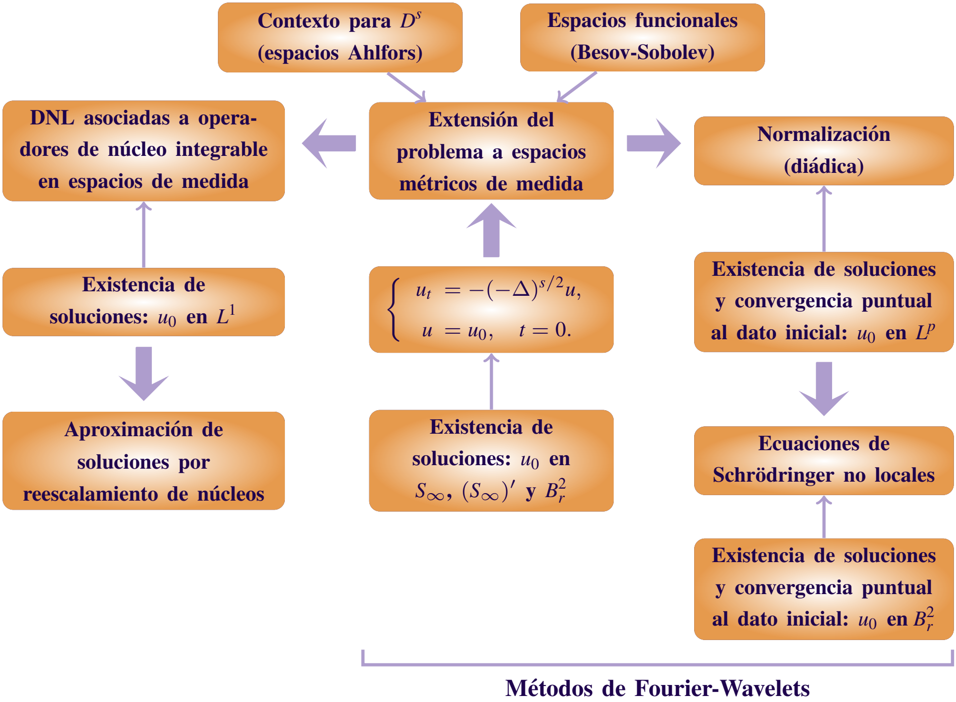
Existencia de soluciones y convergencia puntual al dato inicial: u_0 en L^p

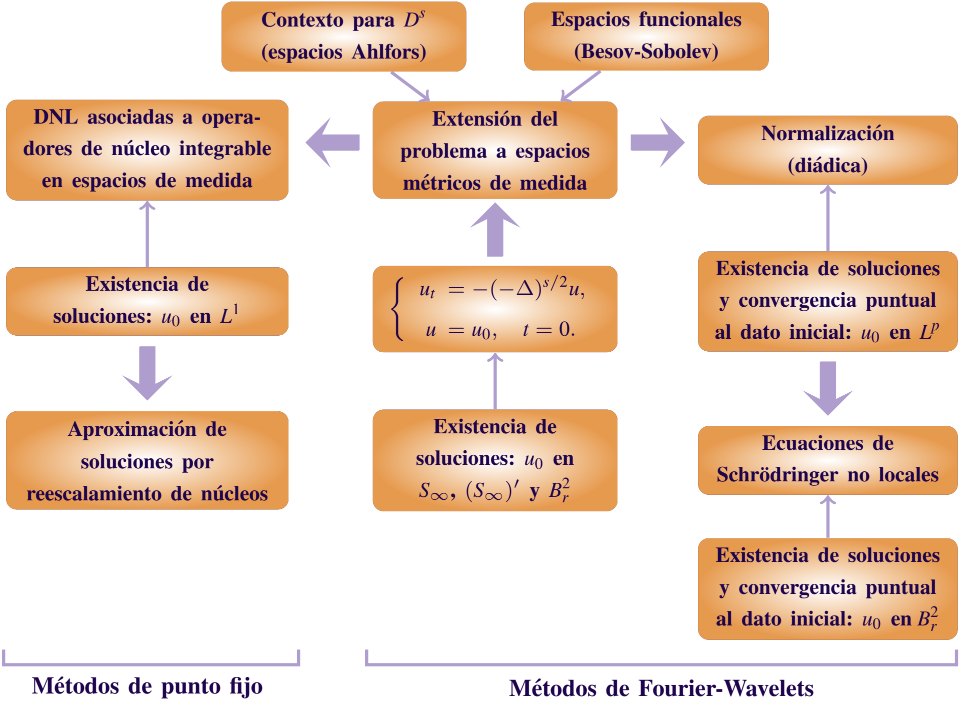
Aproximación de soluciones por reescalamiento de núcleos

Existencia de soluciones: u_0 en S_∞, $(S_\infty)'$ y B^2_r

Ecuaciones de Schrödringer no locales

Existencia de soluciones y convergencia puntual al dato inicial: u_0 en B^2_r


Contexto para D^s (espacios Ahlfors)
Espacios funcionales (Besov-Sobolev)
DNL asociadas a operadores de núcleo integrable en espacios de medida
Extensión del problema a espacios métricos de medida
Normalización (diádica)
Existencia de soluciones: u_0 en L^1
$\begin{cases} u_t = -(-\Delta)^{s/2}u, \\ u = u_0, \quad t = 0. \end{cases}$
Existencia de soluciones y convergencia puntual al dato inicial: u_0 en L^p
Aproximación de soluciones por reescalamiento de núcleos
Existencia de soluciones: u_0 en S_∞, $(S_\infty)'$ y B_r^2
Ecuaciones de Schrödringer no locales
Existencia de soluciones y convergencia puntual al dato inicial: u_0 en B_r^2
Métodos de Fourier-Wavelets


Contexto para D^s (espacios Ahlfors)
Espacios funcionales (Besov-Sobolev)
DNL asociadas a operadores de núcleo integrable en espacios de medida
Extensión del problema a espacios métricos de medida
Normalización (diádica)
Existencia de soluciones: u_0 en L^1
$\begin{cases} u_t = -(-\Delta)^{s/2}u, \\ u = u_0, \quad t = 0. \end{cases}$
Existencia de soluciones y convergencia puntual al dato inicial: u_0 en L^p
Aproximación de soluciones por reescalamiento de núcleos
Existencia de soluciones: u_0 en S_∞, $(S_\infty)'$ y B_r^2
Ecuaciones de Schrödringer no locales
Existencia de soluciones y convergencia puntual al dato inicial: u_0 en B_r^2
Métodos de punto fijo
Métodos de Fourier-Wavelets

Métodos de Fourier-Wavelets

$$\begin{cases} u_t(x,t) = -(-\Delta)^{s/2}u(x,t), & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t(x,t) = -(-\Delta)^{s/2}u(x,t), & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \widehat{u}_t(\xi,t) = -|\xi|^s\widehat{u}(\xi,t), & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u_0}(\xi), & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t(x,t) = -(-\Delta)^{s/2} u(x,t), & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \widehat{u}_t(\xi,t) = -|\xi|^s \widehat{u}(\xi,t), & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u_0}(\xi), & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\widehat{u}(\xi,t) = e^{-|\xi|^s t} \widehat{u_0}(\xi)}$$

$$\begin{cases} u_t(x,t) = -(-\Delta)^{s/2}u(x,t), & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \widehat{u}_t(\xi,t) = -|\xi|^s\widehat{u}(\xi,t), & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u_0}(\xi), & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\widehat{u}(\xi,t) = e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}(\xi)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}(\xi)\right)(x)}$$

$$S_\infty(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in S(\mathbb{R}^n) : D^\gamma \widehat{\varphi}(0) = 0, \forall \gamma \in \mathbb{N}^n\}$$

$$S_\infty(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in S(\mathbb{R}^n) : D^\gamma \widehat{\varphi}(0) = 0, \forall \gamma \in \mathbb{N}^n\}$$

Teorema

Sean $0 < s < 2$ y $u_0 \in S_\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$S_\infty(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in S(\mathbb{R}^n) : D^\gamma \widehat{\varphi}(0) = 0, \forall \gamma \in \mathbb{N}^n\}$$

Teorema

Sean $0 < s < 2$ y $u_0 \in S_\infty(\mathbb{R}^n)$. Luego,

- la función u definida en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ por

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}(\xi)\right)(x),$$

pertenece a $S_\infty(\mathbb{R}^n)$ como función de $x \in \mathbb{R}^n$ para cada $t > 0$;

$$S_\infty(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in S(\mathbb{R}^n) : D^\gamma \widehat{\varphi}(0) = 0, \forall \gamma \in \mathbb{N}^n\}$$

Teorema

Sean $0 < s < 2$ y $u_0 \in S_\infty(\mathbb{R}^n)$. Luego,

- la función u definida en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ por
$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}(\xi)\right)(x),$$
pertenece a $S_\infty(\mathbb{R}^n)$ como función de $x \in \mathbb{R}^n$ para cada $t > 0$;
- la función u resuelve el problema
$$\begin{cases} u_t(x,t) = -(-\Delta)^{s/2} u(x,t), & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{en } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde las igualdades se satisfacen en $S(\mathbb{R}^n)$.

$$S_\infty(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in S(\mathbb{R}^n) : D^\gamma \widehat{\varphi}(0) = 0, \forall \gamma \in \mathbb{N}^n\}$$

Teorema

Sean $0 < s < 2$ y $u_0 \in S_\infty(\mathbb{R}^n)$. Luego,

- la función u definida en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ por

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}(\xi)\right)(x),$$

  pertenece a $S_\infty(\mathbb{R}^n)$ como función de $x \in \mathbb{R}^n$ para cada $t > 0$;
- la función u resuelve el problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = -(-\Delta)^{s/2}u(x,t), & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{en } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde las igualdades se satisfacen en $S(\mathbb{R}^n)$.

Otros ambientes:

$(S_\infty)'(\mathbb{R}^n)$ $\quad$ $B_r^2(\mathbb{R}^n),\ r > s$

Extensión del problema

$\mathbb{R}^n$

Extensión del problema

$\mathbb{R}^n$ → (X, d, μ)

Extensión del problema

$\mathbb{R}^n$ → (X, d, μ)

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -(-\Delta)^{s/2} u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

Extensión del problema

$\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ (X, d, μ)

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -(-\Delta)^{s/2} u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_t(x,t) &= -D^s u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

Extensión del problema

$\mathbb{R}^n$ → (X, d, μ)

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -(-\Delta)^{s/2}u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

→

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -D^s u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

Fourier

Extensión del problema

$\mathbb{R}^n$ → (X, d, μ)

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -(-\Delta)^{s/2} u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

→

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -D^s u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

Fourier → **Wavelets**

Extensión del problema

$\mathbb{R}^n$ → (X, d, μ)

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -(-\Delta)^{s/2}u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

→

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -D^s u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

Fourier → **Wavelets**

- espacios de Schwartz
- dual
- Besov

Extensión del problema

$\mathbb{R}^n$ → (X, d, μ)

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -(-\Delta)^{s/2}u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$ → $$\begin{cases} u_t(x,t) &= -D^s u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

Fourier → **Wavelets**

- espacios de Schwartz
- dual
- Besov

→

- espacios de Schwartz
- dual
- Besov

Extensión del problema

$\mathbb{R}^n$ → (X, d, μ)

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -(-\Delta)^{s/2}u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

→

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -D^s u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

Fourier → **Wavelets**

- espacios de Schwartz
- dual
- Besov

→

- espacios de Schwartz
- dual
- Sobolev

↓

$L^p_s(X, d, \mu)$

Extensión del operador

$$(-\Delta)^{s/2}\varphi(x) \;=\; C_{n,s}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{n+s}}\,dy$$

Extensión del operador

$$(-\Delta)^{s/2}\varphi(x) \;=\; C_{n,s}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{n+s}}\,dy$$

Extensión del operador

$$(-\Delta)^{s/2}\varphi(x) \;=\; C_{n,s}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{n+s}}\,dy$$

- $(\mathbb{R}^n, |\cdot|, m)$: $\qquad m(B_{|\cdot|}(x,r)) \approx r^n$

Extensión del operador

$$(-\Delta)^{s/2}\varphi(x) = C_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^{n+s}}\, dy$$

- $(\mathbb{R}^n, |\cdot|, m)$: $\quad m(B_{|\cdot|}(x,r)) \approx r^n$
- (X, d, μ): $\quad \mu(B_d(x,r)) \approx r^\alpha$

Extensión del operador

$$(-\Delta)^{s/2}\varphi(x) \;=\; C_{n,s}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{n+s}}\,dy$$

- $(\mathbb{R}^n, |\cdot|, m)$: $\qquad m(B_{|\cdot|}(x,r)) \approx r^n$
- (X, d, μ): $\qquad \mu(B_d(x,r)) \approx r^\alpha$

$\Downarrow$

Ahlfors α-regular

Extensión del operador

$$(-\Delta)^{s/2}\varphi(x) \;=\; C_{n,s}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{n+s}}\,dy$$

- $(\mathbb{R}^n, |\cdot|, m)$: $\quad m(B_{|\cdot|}(x,r)) \approx r^n$
- (X, d, μ): $\quad \mu(B_d(x,r)) \approx r^\alpha$

$\Downarrow$

Ahlfors α-regular

- $0 < s < \gamma$,

$$D^s f(x) := \int_X \frac{f(x)-f(y)}{d(x,y)^{\alpha+s}}\,d\mu(y)$$

Espacios funcionales para u

Espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(X, d, \mu)$

(R. Macías - C. Segovia)

Espacios funcionales para u

Espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(X, d, \mu)$

(R. Macías - C. Segovia)

- $\dot{\Lambda}_r(X, d, \mu) = \{\phi : |\phi(y) - \phi(x)| \leq Cd(x, y)^r\}$

Espacios funcionales para u

Espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(X,d,\mu)$
(R. Macías - C. Segovia)

- $\dot{\Lambda}_r(X,d,\mu) = \{\phi : |\phi(y) - \phi(x)| \leq Cd(x,y)^r\}$

$$\Lambda(X,d,\mu) = \{\phi : \phi \in \dot{\Lambda}_r(X,d,\mu), \text{ **para todo** } r < \gamma\}$$

Espacios funcionales para u

Espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(X, d, \mu)$

(R. Macías - C. Segovia)

- $\dot{\Lambda}_r(X, d, \mu) = \{\phi : |\phi(y) - \phi(x)| \leq Cd(x, y)^r\}$

$$\Lambda(X, d, \mu) = \{\phi : \phi \in \dot{\Lambda}_r(X, d, \mu), \text{ **para todo** } r < \gamma\}$$

Espacio de Schwartz

Espacios funcionales para u

Espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(X, d, \mu)$

(R. Macías - C. Segovia)

- $\dot{\Lambda}_r(X, d, \mu) = \{\phi : |\phi(y) - \phi(x)| \leq Cd(x, y)^r\}$

$$\Lambda(X, d, \mu) = \{\phi : \phi \in \dot{\Lambda}_r(X, d, \mu), \text{ **para todo** } r < \gamma\}$$

Espacio de Schwartz

- $x_0 \in X$ fijo, $\beta > 0$

Espacios funcionales para u

Espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(X,d,\mu)$
(R. Macías - C. Segovia)

- $\dot{\Lambda}_r(X,d,\mu) = \{\phi : |\phi(y) - \phi(x)| \leq Cd(x,y)^r\}$

$$\Lambda(X,d,\mu) = \{\phi : \phi \in \dot{\Lambda}_r(X,d,\mu), \ \textbf{para todo } r < \gamma\}$$

Espacio de Schwartz

- $x_0 \in X$ fijo, $\beta > 0$

$$[\phi]_\beta = \sup_{x\in X}(1 + d(x,x_0))^\beta |\phi(x)|$$

Espacios funcionales para u

Espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(X, d, \mu)$
(R. Macías - C. Segovia)

- $\dot{\Lambda}_r(X, d, \mu) = \{\phi : |\phi(y) - \phi(x)| \leq C d(x, y)^r\}$

$$\Lambda(X, d, \mu) = \{\phi : \phi \in \dot{\Lambda}_r(X, d, \mu), \text{ **para todo** } r < \gamma\}$$

Espacio de Schwartz

- $x_0 \in X$ fijo, $\beta > 0$

$$[\phi]_\beta = \sup_{x \in X} (1 + d(x, x_0))^\beta |\phi(x)|$$

- $0 < r < \gamma$

Espacios funcionales para u

Espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(X, d, \mu)$

(R. Macías - C. Segovia)

- $\dot{\Lambda}_r(X, d, \mu) = \{\phi : |\phi(y) - \phi(x)| \leq Cd(x, y)^r\}$

$$\Lambda(X, d, \mu) = \{\phi : \phi \in \dot{\Lambda}_r(X, d, \mu), \text{ para todo } r < \gamma\}$$

Espacio de Schwartz

- $x_0 \in X$ fijo, $\beta > 0$

$$[\phi]_\beta = \sup_{x \in X}(1 + d(x, x_0))^\beta |\phi(x)|$$

- $0 < r < \gamma$

$$[\phi]_{\beta,r} = \sup_{x \in X}(1 + d(x, x_0))^\beta \sup_{y \in B(x,1)} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{d(x, y)^r}$$

Espacios funcionales para u

$$\mathcal{S}(X,d,\mu) = \{\phi \in \Lambda : [\phi]_\beta < \infty \text{ y } [\phi]_{\beta,r} < \infty, \forall\, \beta > 0, \forall\, 0 < r < \gamma\}$$

Espacios funcionales para u

$$\mathcal{S}(X,d,\mu) = \{\phi \in \Lambda : [\phi]_\beta < \infty \text{ y } [\phi]_{\beta,r} < \infty, \forall\, \beta > 0, \forall\, 0 < r < \gamma\}$$

$\Downarrow$

$[\phi]_\beta < \infty$ **y** $[\phi]_{\beta,r} < \infty$ **son monótonas**

Espacios funcionales para u

$\mathcal{S}(X,d,\mu)=\{\phi\in\Lambda:[\phi]_\beta<\infty$ **y** $[\phi]_{\beta,r}<\infty, \forall\,\beta>0, \forall\,0<r<\gamma\}$

$[\phi]_\beta<\infty$ **y** $[\phi]_{\beta,r}<\infty$ **son monótonas**

$[\cdot]_j$ **numerables**

Espacios funcionales para u

$$\mathcal{S}(X,d,\mu) = \{\phi \in \Lambda : [\phi]_\beta < \infty \text{ y } [\phi]_{\beta,r} < \infty, \forall\, \beta > 0, \forall\, 0 < r < \gamma\}$$

$$\Downarrow$$

$[\phi]_\beta < \infty$ **y** $[\phi]_{\beta,r} < \infty$ **son monótonas**

$$\Downarrow$$

$[\cdot]_j$ **numerables**

$$\Downarrow$$

$$\rho(\phi,\psi) := \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j} \frac{[\phi-\psi]_j}{1+[\phi-\psi]_j}$$

Espacios funcionales para u

$\mathcal{S}(X,d,\mu) = \{\phi \in \Lambda : [\phi]_\beta < \infty$ **y** $[\phi]_{\beta,r} < \infty, \forall\, \beta > 0, \forall\, 0 < r < \gamma\}$

$\Downarrow$

$[\phi]_\beta < \infty$ **y** $[\phi]_{\beta,r} < \infty$ **son monótonas**

$\Downarrow$

$[\cdot]_j$ **numerables**

$\Downarrow$

$$\rho(\phi,\psi) := \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j} \frac{[\phi-\psi]_j}{1+[\phi-\psi]_j}$$

$\Downarrow$

$\mathcal{S}'(X,d,\mu)$ **dual topológico de** $\mathcal{S}$

Espacios funcionales para u

Teorema

Si $\phi \in \mathcal{S}(X, d, \mu)$ *entonces* $[D^s\phi]_{\alpha+s} < \infty$.

Espacios funcionales para u

Teorema

Si $\phi \in \mathcal{S}(X,d,\mu)$ *entonces* $[D^s\phi]_{\alpha+s} < \infty$. *Más aún,*

$$[D^s\phi_k]_{\alpha+s} \to 0, \qquad si\ \{\phi_k\} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0.$$

Espacios funcionales para u

Teorema

Si $\phi \in \mathcal{S}(X, d, \mu)$ *entonces* $[D^s\phi]_{\alpha+s} < \infty$. *Más aún,*

$$[D^s\phi_k]_{\alpha+s} \to 0, \qquad si\ \{\phi_k\} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0.$$

$$L_s(X, d, \mu) := \left\{ f \in L^1_{loc}(X, \mu) : \int_X \frac{|f(x)|}{(1 + d(x, x_0))^{\alpha+s}}\, d\mu(x) < \infty \right\}$$

Espacios funcionales para u

Teorema

Si $\phi \in \mathcal{S}(X, d, \mu)$ *entonces* $[D^s \phi]_{\alpha+s} < \infty$. *Más aún,*

$$[D^s \phi_k]_{\alpha+s} \to 0, \qquad si\ \{\phi_k\} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0.$$

$$L_s(X, d, \mu) := \left\{ f \in L^1_{loc}(X, \mu) : \int_X \frac{|f(x)|}{(1 + d(x, x_0))^{\alpha+s}}\, d\mu(x) < \infty \right\}$$

- Dada $f \in L_s(X, d, \mu)$ y $\phi \in \mathcal{S}(X, d, \mu)$

Espacios funcionales para u

Teorema

Si $\phi \in \mathcal{S}(X,d,\mu)$ *entonces* $[D^s\phi]_{\alpha+s} < \infty$. *Más aún,*

$$[D^s\phi_k]_{\alpha+s} \to 0, \qquad si\ \{\phi_k\} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0.$$

$$L_s(X,d,\mu) := \left\{ f \in L^1_{loc}(X,\mu) : \int_X \frac{|f(x)|}{(1+d(x,x_0))^{\alpha+s}}\, d\mu(x) < \infty \right\}$$

- Dada $f \in L_s(X,d,\mu)$ y $\phi \in \mathcal{S}(X,d,\mu)$ definimos

$$\langle D^s f, \phi\rangle := \langle f, D^s\phi\rangle$$

Espacios funcionales para u

Teorema

Si $\phi \in \mathcal{S}(X,d,\mu)$ entonces $[D^s\phi]_{\alpha+s} < \infty$. Más aún,

$$[D^s\phi_k]_{\alpha+s} \to 0, \qquad si\ \{\phi_k\} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0.$$

$$L_s(X,d,\mu) := \left\{ f \in L^1_{loc}(X,\mu) : \int_X \frac{|f(x)|}{(1+d(x,x_0))^{\alpha+s}}\, d\mu(x) < \infty \right\}$$

- Dada $f \in L_s(X,d,\mu)$ y $\phi \in \mathcal{S}(X,d,\mu)$ definimos

$$\langle D^s f, \phi\rangle := \langle f, D^s\phi\rangle = \int_X f\, D^s\phi\, d\mu$$

Espacios funcionales para u

Teorema

Si $\phi \in \mathcal{S}(X, d, \mu)$ *entonces* $[D^s\phi]_{\alpha+s} < \infty$. *Más aún,*

$$[D^s\phi_k]_{\alpha+s} \to 0, \qquad si\ \{\phi_k\} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0.$$

$$L_s(X, d, \mu) := \left\{ f \in L^1_{loc}(X, \mu) : \int_X \frac{|f(x)|}{(1 + d(x, x_0))^{\alpha+s}}\, d\mu(x) < \infty \right\}$$

- Dada $f \in L_s(X, d, \mu)$ y $\phi \in \mathcal{S}(X, d, \mu)$ definimos

$$\langle D^s f, \phi\rangle := \langle f, D^s\phi\rangle = \int_X f\, D^s\phi\, d\mu \leq C[D^s\phi].$$

Espacios funcionales para u

Teorema

Si $\phi \in \mathcal{S}(X,d,\mu)$ *entonces* $[D^s\phi]_{\alpha+s} < \infty$. *Más aún,*

$$[D^s\phi_k]_{\alpha+s} \to 0, \qquad si\ \{\phi_k\} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0.$$

$$L_s(X,d,\mu) := \left\{ f \in L^1_{loc}(X,\mu) : \int_X \frac{|f(x)|}{(1+d(x,x_0))^{\alpha+s}}\, d\mu(x) < \infty \right\}$$

- Dada $f \in L_s(X,d,\mu)$ y $\phi \in \mathcal{S}(X,d,\mu)$ definimos

$$\langle D^s f, \phi \rangle := \langle f, D^s\phi \rangle = \int_X f\, D^s\phi\, d\mu \leq C[D^s\phi].$$

$$\Downarrow$$

$$D^s f \in \mathcal{S}'(X,d,\mu)$$

Espacios funcionales para u

- Si $f \in L^p(X, \mu)$, con $1 \leq p \leq \infty$,

Espacios funcionales para u

- Si $f \in L^p(X, \mu)$, con $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\int_X \frac{|f(x)|}{(1 + d(x, x_0))^{\alpha+s}}\, d\mu(x) < C\|f\|_{L^p}.$$

Espacios funcionales para u

- Si $f \in L^p(X,\mu)$, con $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\int_X \frac{|f(x)|}{(1+d(x,x_0))^{\alpha+s}}\, d\mu(x) < C\|f\|_{L^p}.$$

  Luego, $D^s f \in \mathcal{S}'(X,d,\mu)$.

Espacios funcionales para u

- Si $f \in L^p(X,\mu)$, con $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\int_X \frac{|f(x)|}{(1+d(x,x_0))^{\alpha+s}}\, d\mu(x) < C\|f\|_{L^p}.$$

  Luego, $D^s f \in \mathcal{S}'(X,d,\mu)$.

- Definimos el espacio de Sobolev fraccionario

$$L^p_s(X,d,\mu) := \{f \in L^p(X,\mu) : D^s f \in L^p\}$$

Espacios funcionales para u

- Si $f \in L^p(X,\mu)$, con $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\int_X \frac{|f(x)|}{(1+d(x,x_0))^{\alpha+s}}\,d\mu(x) < C\|f\|_{L^p}.$$

  Luego, $D^s f \in \mathcal{S}'(X,d,\mu)$.

- Definimos el espacio de Sobolev fraccionario

$$\boxed{L^p_s(X,d,\mu) := \{f \in L^p(X,\mu) \,:\, D^s f \in L^p\}}$$

  y lo dotamos con la norma

$$\boxed{\|f\|_{L^p_s} := \|f\|_{L^p} + \|D^s f\|_{L^p}.}$$

Normalización diádica

Hugo Aimar, Bruno Bongioanni, and Ivana Gómez.
On dyadic nonlocal Schrödinger equations with Besov initial data.
J. Math. Anal. Appl. **407** (2013), no. 1, 23–34.

Normalización diádica

Hugo Aimar, Bruno Bongioanni, and Ivana Gómez.
On dyadic nonlocal Schrödinger equations with Besov initial data.
J. Math. Anal. Appl. **407** (2013), no. 1, 23–34.

- (X, d, μ) un e.t.h. con un único cuadrante (no atómico).

Normalización diádica

Hugo Aimar, Bruno Bongioanni, and Ivana Gómez.
On dyadic nonlocal Schrödinger equations with Besov initial data.
J. Math. Anal. Appl. **407** (2013), no. 1, 23–34.

- (X, d, μ) un e.t.h. con un único cuadrante (no atómico).
- $\mathscr{D}$ la familia de cubos diádicos (Christ).

Normalización diádica

Hugo Aimar, Bruno Bongioanni, and Ivana Gómez.
On dyadic nonlocal Schrödinger equations with Besov initial data.
J. Math. Anal. Appl. **407** (2013), no. 1, 23–34.

- (X, d, μ) un e.t.h. con un único cuadrante (no atómico).
- $\mathscr{D}$ la familia de cubos diádicos (Christ).
- la distancia diádica (métrica)

$$\delta(x,y) = \begin{cases} \text{ínf}\{\mu(Q) : x, y \in Q \text{ y } Q \in \mathscr{D}\}, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Normalización diádica

Hugo Aimar, Bruno Bongioanni, and Ivana Gómez.
On dyadic nonlocal Schrödinger equations with Besov initial data.
J. Math. Anal. Appl. **407** (2013), no. 1, 23–34.

- (X, d, μ) un e.t.h. con un único cuadrante (no atómico).
- $\mathscr{D}$ la familia de cubos diádicos (Christ).
- la distancia diádica (métrica)

$$\delta(x,y) = \begin{cases} \inf\{\mu(Q) : x, y \in Q \text{ y } Q \in \mathscr{D}\}, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

$\Downarrow$

(X, δ, μ) **es Ahlfors 1-regular**

Bases de Haar

- $\mathscr{H} = \{h_Q^\ell : Q \in \mathscr{D} \text{ y } \ell \in \Lambda(Q)\}$ el sistema de Haar asociado a $\mathscr{D}$.

Bases de Haar

- $\mathscr{H} = \{h_Q^\ell : Q \in \mathscr{D} \text{ y } \ell \in \Lambda(Q)\}$ el sistema de Haar asociado a $\mathscr{D}$.

Teorema (ABI07)

Sean (X, d, μ) un e.t.h. y $1 < p < \infty$. Luego,

$\mathscr{H}$ es una base incondicional para $L^p(X, \mu)$

Bases de Haar

- $\mathscr{H} = \{h_Q^\ell : Q \in \mathscr{D} \text{ y } \ell \in \Lambda(Q)\}$ el sistema de Haar asociado a $\mathscr{D}$.

Teorema (ABI07)

Sean (X, d, μ) un e.t.h. y $1 < p < \infty$. Luego,

$\mathscr{H}$ es una base incondicional para $L^p(X, \mu)$

y existen constantes C_1 y C_2 tales que para toda $f \in L^p$ se cumple que

$$C_1\|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_{h \in \mathscr{H}} |\langle f, h\rangle|^2 |h|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_2 \|f\|_p.$$

Bases de Haar

- $\mathscr{H} = \{h_Q^\ell : Q \in \mathscr{D} \text{ y } \ell \in \Lambda(Q)\}$ el sistema de Haar asociado a $\mathscr{D}$.

Teorema (ABI07)

Sean (X, d, μ) un e.t.h. y $1 < p < \infty$. Luego,

$$\boldsymbol{\mathscr{H}} \textbf{\textit{ es una base incondicional para }} L^p(X, \mu)$$

y existen constantes C_1 y C_2 tales que para toda $f \in L^p$ se cumple que

$$C_1 \|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_{h \in \mathscr{H}} |\langle f, h\rangle|^2 |h|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_2 \|f\|_p.$$

Lema

Para cada $h_Q^\ell \in \mathscr{H}$ se tiene que

$$D^s h_Q^\ell(x) = -m_Q \mu(Q)^{-s} h_Q^\ell(x),$$

donde $0 < c_m < m_Q < C_m < \infty$, para todo $Q \in \mathscr{D}$.

Caracterización de L_s^p a través de $\mathscr{H}$

Teorema

Si $f \in L_s^p(X, \delta, \mu)$, *entonces*

Caracterización de L^p_s a través de $\mathscr{H}$

Teorema

Si $f \in L^p_s(X, \delta, \mu)$, *entonces*

$$D^s f(x) = \sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} m_Q \mu(Q)^{-s} \left\langle f.h^\ell_Q \right\rangle h^\ell_Q(x).$$

Caracterización de L^p_s a través de $\mathscr{H}$

Teorema

Si $f \in L^p_s(X,\delta,\mu)$, *entonces*

$$D^s f(x) = \sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} m_Q \mu(Q)^{-s} \left\langle f.h^\ell_Q \right\rangle h^\ell_Q(x).$$

Luego, $f \in L^p_s(X,\delta,\mu)$

Caracterización de L^p_s a través de $\mathscr{H}$

Teorema

Si $f \in L^p_s(X,\delta,\mu)$, *entonces*

$$D^s f(x) = \sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} m_Q \mu(Q)^{-s} \left\langle f.h^\ell_Q \right\rangle h^\ell_Q(x).$$

Luego, $f \in L^p_s(X,\delta,\mu)$ *si y sólo si* $f \in L^p(X,\mu)$ *y satisface que*

$$\left\| \left(\sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \mu(Q)^{-2s} |\langle f, h_l\rangle|^2 |h^\ell_Q|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} < \infty.$$

Existencia de soluciones

Teorema

Sean $0 < s < 1$, $1 < p < \infty$ *y* $u_0 \in L^p(X, \mu)$ *dados.*

Existencia de soluciones

Teorema

Sean $0 < s < 1$, $1 < p < \infty$ *y* $u_0 \in L^p(X, \mu)$ *dados. Luego,*

1. *la función* u *definida en* $X \times \mathbb{R}^+$ *por*

$$\boxed{u(x,t) := \sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} e^{-m_Q \mu(Q)^{-s} t} \langle u_0, h_Q^\ell \rangle h_Q^\ell(x),}$$

pertenece a $L^p_s(X, \delta, \mu)$ *como función de* $x \in X$ *para cada* $t > 0$*;*

Existencia de soluciones

Teorema

Sean $0 < s < 1$, $1 < p < \infty$ *y* $u_0 \in L^p(X,\mu)$ *dados. Luego,*

1. *la función* u *definida en* $X \times \mathbb{R}^+$ *por*

$$u(x,t) := \sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t} \langle u_0, h_Q^\ell\rangle h_Q^\ell(x),$$

   pertenece a $L^p_s(X,\delta,\mu)$ *como función de* $x \in X$ *para cada* $t > 0$*;*

2. *la función* u *resuelve el problema*

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -D^s u(x,t), \quad x \in X, t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in X, \end{cases}$$

Convergencia puntual al dato inicial

Teorema (cont.)

(C) *Si* $\mu(X) < \infty$, *entonces para casi todo* $x \in X$,

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = u_0(x).$$

Convergencia puntual al dato inicial

Teorema (cont.)

(C) *Si $\mu(X) < \infty$, entonces para casi todo $x \in X$,*

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = u_0(x).$$

Idea de la prueba

Convergencia puntual al dato inicial

Teorema (cont.)

(C) *Si* $\mu(X) < \infty$, *entonces para casi todo* $x \in X$,

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = u_0(x).$$

Idea de la prueba

$$u(x,t) = \sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} e^{-m_Q \mu(Q)^{-s} t} \langle u_0, h_Q^\ell \rangle h_Q^\ell(x)$$

Convergencia puntual al dato inicial

Teorema (cont.)

(C) *Si $\mu(X) < \infty$, entonces para casi todo $x \in X$,*

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = u_0(x).$$

Idea de la prueba

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} e^{-m_Q \mu(Q)^{-s} t} \langle u_0, h_Q^\ell \rangle h_Q^\ell(x) \\ &= \int_X \left[\sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} e^{-m_Q \mu(Q)^{-s} t} h_Q^\ell(x) h_Q^\ell(y) \right] u_0(y)\, d\mu(y) \end{aligned}$$

Convergencia puntual al dato inicial

Teorema (cont.)

(C) *Si $\mu(X) < \infty$, entonces para casi todo $x \in X$,*

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = u_0(x).$$

Idea de la prueba

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t} \langle u_0, h_Q^\ell\rangle h_Q^\ell(x) \\ &= \int_X \left[\sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t} h_Q^\ell(x) h_Q^\ell(y) \right] u_0(y)\, d\mu(y) \\ &=: \int_X k_t(x,y) u_0(y)\, d\mu(y) \end{aligned}$$

Convergencia puntual al dato inicial

Teorema (cont.)

(C) *Si* $\mu(X) < \infty$, *entonces para casi todo* $x \in X$,

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = u_0(x).$$

Idea de la prueba

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} e^{-m_Q \mu(Q)^{-s} t} \langle u_0, h_Q^\ell \rangle h_Q^\ell(x) \\ &= \int_X \left[\sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} e^{-m_Q \mu(Q)^{-s} t} h_Q^\ell(x) h_Q^\ell(y) \right] u_0(y)\, d\mu(y) \\ &=: \int_X k_t(x,y) u_0(y)\, d\mu(y) =: K_t u_0(x). \end{aligned}$$

Convergencia puntual al dato inicial

Idea de la prueba (cont.)

$$k_t(x,y) \leq \frac{1}{t^{1/s}} \varphi\left(\frac{\delta(x,y)}{t^{1/s}}\right),$$

donde $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^+)$ y decreciente.

Convergencia puntual al dato inicial

Idea de la prueba (cont.)

$$k_t(x,y) \le \frac{1}{t^{1/s}} \varphi\left(\frac{\delta(x,y)}{t^{1/s}}\right),$$

donde $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^+)$ y decreciente.

$$\Downarrow$$

$$\sup_{t>0} |K_t u_0(x)| \le C M_{dy} u_0(x)$$

Convergencia puntual al dato inicial

Idea de la prueba (cont.)

$$k_t(x,y) \le \frac{1}{t^{1/s}} \varphi\left(\frac{\delta(x,y)}{t^{1/s}}\right),$$

donde $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^+)$ y decreciente.

$$\sup_{t>0} |K_t u_0(x)| \le C M_{dy} u_0(x)$$

$$K_t u_0(\cdot) = u(\cdot, t) \xrightarrow{L^p} u_0(x)$$

Convergencia puntual al dato inicial

Idea de la prueba (cont.)

$$k_t(x,y) \leq \frac{1}{t^{1/s}} \varphi\left(\frac{\delta(x,y)}{t^{1/s}}\right),$$

donde $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^+)$ y decreciente.

$\Downarrow$

$$\sup_{t>0} |K_t u_0(x)| \leq C M_{dy} u_0(x)$$

$+$

$$K_t u_0(\cdot) = u(\cdot,t) \xrightarrow{L^p} u_0(x)$$

$\Downarrow$

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = u_0(x), \qquad \text{para casi todo } x \in X.$$

Ecuaciones de Schrödringer no locales

$$\begin{cases} u_t(x,t) = -i\Delta u(x,t), \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Ecuaciones de Schrödringer no locales

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -i\Delta u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

Hugo Aimar, Bruno Bongioanni, and Ivana Gómez.
On dyadic nonlocal Schrödinger equations with Besov initial data.
J. Math. Anal. Appl. **407** (2013), no. 1, 23–34.

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -iD^s u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

Ecuaciones de Schrödringer no locales

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -i\Delta u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

Hugo Aimar, Bruno Bongioanni, and Ivana Gómez.
On dyadic nonlocal Schrödinger equations with Besov initial data.
J. Math. Anal. Appl. **407** (2013), no. 1, 23–34.

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -iD^s u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

En $(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$**:**
$u_0 \in B^2_r$

Ecuaciones de Schrödringer no locales

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -i\Delta u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

Hugo Aimar, Bruno Bongioanni, and Ivana Gómez.
On dyadic nonlocal Schrödinger equations with Besov initial data.
J. Math. Anal. Appl. **407** (2013), no. 1, 23–34.

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -iD^s u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

En $(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$**:**
$u_0 \in B^2_r$

$\Rightarrow$

convergencia puntual al dato

Ecuaciones de Schrödringer no locales

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -i\Delta u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

Hugo Aimar, Bruno Bongioanni, and Ivana Gómez.
On dyadic nonlocal Schrödinger equations with Besov initial data.
J. Math. Anal. Appl. **407** (2013), no. 1, 23–34.

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -iD^s u(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

En $(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$**:**
$u_0 \in B_r^2$

$\Rightarrow$

convergencia puntual al dato

¿ (X, δ, μ) ?

- Dado $r \in (0,1)$ decimos que $f \in B^2_r(X,\delta,\mu)$ si

$$\|f\|^2_{B^2_r} := \|f\|^2_{L^2} + \int_X \int_X \frac{|f(x)-f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) < \infty.$$

- Dado $r \in (0,1)$ decimos que $f \in B_r^2(X,\delta,\mu)$ si

$$\|f\|_{B_r^2}^2 := \|f\|_{L^2}^2 + \int_X \int_X \frac{|f(x) - f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}} d\mu(x) d\mu(y) < \infty.$$

Teorema

El espacio $B_r^2(X,\delta,\mu)$ coincide con las funciones de $L^2(X,\mu)$ tales que

$$\sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} \mu(Q)^{-2r} |\langle f, h_Q^\ell \rangle|^2 < \infty.$$

- Dado $r \in (0,1)$ decimos que $f \in B^2_r(X,\delta,\mu)$ si

$$\|f\|^2_{B^2_r} := \|f\|^2_{L^2} + \int_X \int_X \frac{|f(x)-f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}} d\mu(x)d\mu(y) < \infty.$$

Teorema

El espacio $B^2_r(X,\delta,\mu)$ coincide con las funciones de $L^2(X,\mu)$ tales que

$$\sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \mu(Q)^{-2r} |\langle f, h^\ell_Q\rangle|^2 < \infty.$$

Corolario

El espacio $B^2_r(X,\delta,\mu)$ coincide con $L^2_r(X,\delta,\mu)$.

- Dado $r \in (0,1)$ decimos que $f \in B^2_r(X,\delta,\mu)$ si

$$\|f\|^2_{B^2_r} := \|f\|^2_{L^2} + \int_X \int_X \frac{|f(x)-f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}} \, d\mu(x) d\mu(y) < \infty.$$

Teorema

El espacio $B^2_r(X,\delta,\mu)$ coincide con las funciones de $L^2(X,\mu)$ tales que

$$\sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \mu(Q)^{-2r} |\langle f, h^\ell_Q\rangle|^2 < \infty.$$

Corolario

El espacio $B^2_r(X,\delta,\mu)$ coincide con $L^2_r(X,\delta,\mu)$.

- El operador maximal sharp de Calderón diádico de orden r

$$M^\sharp_{r,dy} f(x) := \sup_{Q\ni x} \frac{1}{\mu(Q)^{1+r}} \int_Q |f(y)-f(x)| \, d\mu(y).$$

- Dado $r \in (0,1)$ decimos que $f \in B^2_r(X,\delta,\mu)$ si

$$\|f\|^2_{B^2_r} := \|f\|^2_{L^2} + \int_X \int_X \frac{|f(x)-f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) < \infty.$$

Teorema

El espacio $B^2_r(X,\delta,\mu)$ coincide con las funciones de $L^2(X,\mu)$ tales que

$$\sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \mu(Q)^{-2r} |\langle f, h^\ell_Q\rangle|^2 < \infty.$$

Corolario

El espacio $B^2_r(X,\delta,\mu)$ coincide con $L^2_r(X,\delta,\mu)$.

- El operador maximal sharp de Calderón diádico de orden r

$$M^\sharp_{r,dy} f(x) := \sup_{Q\ni x} \frac{1}{\mu(Q)^{1+r}} \int_Q |f(y)-f(x)|\, d\mu(y).$$

Lema

Si $f \in B^2_r(X,\delta,\mu)$ entonces $\left\|M^\sharp_{r,dy} f\right\|_{L^2} \leq \|f\|_{B^2_r}$.

Existencia de soluciones

Teorema

Sean $0 < s < r < 1$ *y* $u_0 \in B^2_r(X, \delta, \mu)$ *tal que* $P^* u_0 = 0$.

Existencia de soluciones

Teorema

Sean $0 < s < r < 1$ *y* $u_0 \in B^2_r(X, \delta, \mu)$ *tal que* $P^* u_0 = 0$. *Luego,*

1. *la función u definida por*

$$u(x,t) := \sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} e^{-im_Q \mu(Q)^{-s} t} \langle u_0, h^\ell_Q \rangle h^\ell_Q(x),$$

pertenece a $B^2_r(X, \delta, \mu)$ *como función de* $x \in X$ *para cada* $t > 0$*;*

Existencia de soluciones

Teorema

Sean $0 < s < r < 1$ *y* $u_0 \in B^2_r(X, \delta, \mu)$ *tal que* $P^* u_0 = 0$. *Luego,*

1. *la función* u *definida por*

$$u(x,t) := \sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} e^{-im_Q \mu(Q)^{-s} t} \langle u_0, h^\ell_Q \rangle h^\ell_Q(x),$$

pertenece a $B^2_r(X, \delta, \mu)$ *como función de* $x \in X$ *para cada* $t > 0$*;*

2. *la función* u *resuelve el problema*

$$\begin{cases} u_t(x,t) & = -iD^s u(x,t), \qquad x \in X, t > 0, \\ u(x,0) & = u_0(x), \qquad x \in X; \end{cases}$$

Existencia de soluciones

Teorema

Sean $0 < s < r < 1$ *y* $u_0 \in B^2_r(X, \delta, \mu)$ *tal que* $P^* u_0 = 0$. *Luego,*

1. *la función* u *definida por*

$$u(x,t) := \sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} e^{-im_Q \mu(Q)^{-s} t} \langle u_0, h^\ell_Q \rangle h^\ell_Q(x),$$

pertenece a $B^2_r(X, \delta, \mu)$ *como función de* $x \in X$ *para cada* $t > 0$*;*

2. *la función* u *resuelve el problema*

$$\begin{cases} u_t(x,t) & = -iD^s u(x,t), \qquad x \in X, t > 0, \\ u(x,0) & = u_0(x), \qquad x \in X; \end{cases}$$

3. *para casi todo* $x \in X$

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) \to u_0(x).$$

Métodos de punto fijo

Carmen Cortazar, Manuel Elgueta, Julio D. Rossi, and Noemi Wolanski.
How to approximate the heat equation with Neumann boundary conditions by nonlocal diffusion problems.
Arch. Ration. Mech. Anal. ***187*** *(2008), no. 1, 137–156.*

Carmen Cortazar, Manuel Elgueta, Julio D. Rossi, and Noemi Wolanski.
How to approximate the heat equation with Neumann boundary conditions by nonlocal diffusion problems.
Arch. Ration. Mech. Anal. ***187*** *(2008), no. 1, 137–156.*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} J\,(x-y)[u(y,t)-u(x,t)]dy \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Carmen Cortazar, Manuel Elgueta, Julio D. Rossi, and Noemi Wolanski.
How to approximate the heat equation with Neumann boundary conditions by nonlocal diffusion problems.
Arch. Ration. Mech. Anal. ***187*** *(2008), no. 1, 137–156.*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)[u(y,t)-u(x,t)]dy \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Carmen Cortazar, Manuel Elgueta, Julio D. Rossi, and Noemi Wolanski.
How to approximate the heat equation with Neumann boundary conditions by nonlocal diffusion problems.
Arch. Ration. Mech. Anal. ***187*** *(2008), no. 1, 137–156.*

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= \dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)[u(y,t)-u(x,t)]dy \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= \Delta u(x,t) \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{cases}$$

Difusiones no locales en espacios de medida

- (X, μ) espacio de medida,

Difusiones no locales en espacios de medida

- (X, μ) espacio de medida,
- $J : X \times X \to \mathbb{R}^+$,

Difusiones no locales en espacios de medida

- (X, μ) espacio de medida,
- $J : X \times X \to \mathbb{R}^+$,
- existe $C > 0$ tal que

$$\int_X J(x,y)\, d\mu(x) \le C \quad \text{y} \quad \int_X J(x,y)\, d\mu(y) \le C.$$

Difusiones no locales en espacios de medida

- (X, μ) espacio de medida,
- $J : X \times X \to \mathbb{R}^+$,
- existe $C > 0$ tal que

$$\int_X J(x,y)\, d\mu(x) \le C \quad \text{y} \quad \int_X J(x,y)\, d\mu(y) \le C.$$

Teorema

Sea $u_0 \in L^1(X, \mu)$.

Difusiones no locales en espacios de medida

- (X, μ) espacio de medida,
- $J : X \times X \to \mathbb{R}^+$,
- existe $C > 0$ tal que

$$\int_X J(x,y)\, d\mu(x) \le C \quad \text{y} \quad \int_X J(x,y)\, d\mu(y) \le C.$$

Teorema

Sea $u_0 \in L^1(X,\mu)$. *Entonces, el problema*

$$\begin{cases} u_t(x,t) & = \displaystyle\int_X J(x,y)[u(y,t) - u(x,t)]d\mu(y) \\ u(x,0) & = u_0(x), \end{cases}$$

tiene una única solución $u \in C^1((0,\infty); L^1(X,\mu)) \cap C([0,\infty); L^1(X,\mu))$.

Idea de la prueba

Idea de la prueba

- Dado $t_0 > 0$,

$$\mathbb{X}_{t_0} = C([0,t_0]; L^1(X,\mu)) \quad \text{y} \quad |||w||| = \max_{t\in[0,t_0]} \|w(\cdot,t)\|_{L^1}.$$

Existencia y unicidad

Idea de la prueba

- Dado $t_0 > 0$,

$$\mathbb{X}_{t_0} = C([0,t_0]; L^1(X,\mu)) \quad \text{y} \quad |||w||| = \max_{t\in[0,t_0]} \|w(\cdot,t)\|_{L^1}.$$

$(\mathbb{X}_{t_0}, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach

Existencia y unicidad

Idea de la prueba

- Dado $t_0 > 0$,

$$\mathbb{X}_{t_0} = C([0, t_0]; L^1(X, \mu)) \quad \text{y} \quad |||w||| = \max_{t \in [0, t_0]} \|w(\cdot, t)\|_{L^1}.$$

$(\mathbb{X}_{t_0}, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach

- Dada $u_0 \in L^1(X, \mu)$, definimos $T_{u_0} : \mathbb{X}_{t_0} \to \mathbb{X}_{t_0}$,

$$T_{u_0}(w)(x, t) = u_0(x) + \int_0^t \int_X J(x, y)(w(y, s) - w(x, s))\, d\mu(y)\, ds.$$

Existencia y unicidad

Idea de la prueba

- Dado $t_0 > 0$,

$$\mathbb{X}_{t_0} = C([0,t_0]; L^1(X,\mu)) \quad \text{y} \quad |||w||| = \max_{t\in[0,t_0]} \|w(\cdot,t)\|_{L^1}.$$

$(\mathbb{X}_{t_0}, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach

- Dada $u_0 \in L^1(X,\mu)$, definimos $T_{u_0} : \mathbb{X}_{t_0} \to \mathbb{X}_{t_0}$,

$$T_{u_0}(w)(x,t) = u_0(x) + \int_0^t \int_X J(x,y)(w(y,s) - w(x,s))\, d\mu(y)\, ds.$$

T es contractivo

Existencia y unicidad

Idea de la prueba

- Dado $t_0 > 0$,

$$\mathbb{X}_{t_0} = C([0,t_0]; L^1(X,\mu)) \quad \text{y} \quad |||w||| = \max_{t\in[0,t_0]} \|w(\cdot,t)\|_{L^1}.$$

$(\mathbb{X}_{t_0}, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach

- Dada $u_0 \in L^1(X,\mu)$, definimos $T_{u_0} : \mathbb{X}_{t_0} \to \mathbb{X}_{t_0}$,

$$T_{u_0}(w)(x,t) = u_0(x) + \int_0^t \int_X J(x,y)(w(y,s) - w(x,s))\, d\mu(y)\, ds.$$

T es contractivo

$\Downarrow$

Teorema del punto fijo de Banach

Existencia y unicidad

Idea de la prueba

- Dado $t_0 > 0$,

$$\mathbb{X}_{t_0} = C([0,t_0]; L^1(X,\mu)) \quad \text{y} \quad |||w||| = \max_{t\in[0,t_0]} \|w(\cdot,t)\|_{L^1}.$$

$(\mathbb{X}_{t_0}, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach

- Dada $u_0 \in L^1(X,\mu)$, definimos $T_{u_0} : \mathbb{X}_{t_0} \to \mathbb{X}_{t_0}$,

$$u(x,t) = u_0(x) + \int_0^t \int_X J(x,y)(u(y,s) - u(x,s))\, d\mu(y)\, ds.$$

T es contractivo

$\Downarrow$

Teorema del punto fijo de Banach

Construcción de los aproximantes

- (X, d, μ) un espacio Ahlfors α-regular de orden γ

Construcción de los aproximantes

- (X, d, μ) un espacio Ahlfors α-regular de orden γ (compacto).

Construcción de los aproximantes

- (X, d, μ) un espacio Ahlfors α-regular de orden γ (compacto).

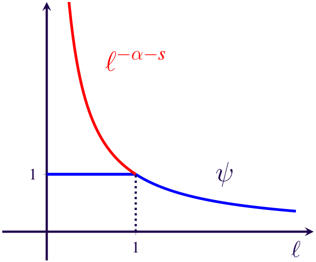
Truncar la singularidad de $d(x,y)^{-\alpha-s}$ en el origen

Construcción de los aproximantes

- (X, d, μ) un espacio Ahlfors α-regular de orden γ (compacto).

Truncar la singularidad de $d(x,y)^{-\alpha-s}$ en el origen

- $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$,

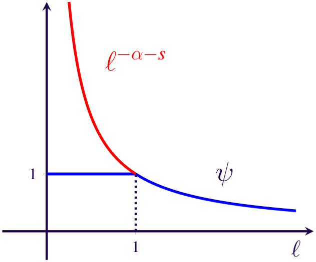


Construcción de los aproximantes

- (X, d, μ) un espacio Ahlfors α-regular de orden γ (compacto).

Truncar la singularidad de $d(x,y)^{-\alpha-s}$ en el origen

- $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$,



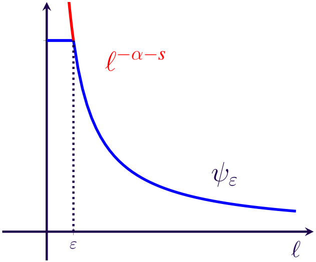
$$J(x,y) := \psi(d(x,y))$$

Construcción de los aproximantes

- (X, d, μ) un espacio Ahlfors α-regular de orden γ (compacto).

Truncar la singularidad de $d(x,y)^{-\alpha-s}$ en el origen

- $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$,



$\Rightarrow$

$$J(x,y) := \psi(d(x,y))$$

Construcción de los aproximantes

- $J_\varepsilon(x, y) := \psi_\varepsilon(d(x, y))$

Construcción de los aproximantes

- $J_\varepsilon(x,y) := \psi_\varepsilon(d(x,y)) = \dfrac{1}{\varepsilon^\alpha}\psi\left(\dfrac{d(x,y)}{\varepsilon}\right)$

Construcción de los aproximantes

- $J_\varepsilon(x,y) := \psi_\varepsilon(d(x,y)) = \dfrac{1}{\varepsilon^\alpha}\psi\left(\dfrac{d(x,y)}{\varepsilon}\right)$

$$\frac{1}{\varepsilon^s} J_\varepsilon(x,y) \approx d(x,y)^{-\alpha-s}$$

Construcción de los aproximantes

- $J_\varepsilon(x,y) := \psi_\varepsilon(d(x,y)) = \dfrac{1}{\varepsilon^\alpha}\psi\left(\dfrac{d(x,y)}{\varepsilon}\right)$

$$\boxed{\frac{1}{\varepsilon^s} J_\varepsilon(x,y) \approx d(x,y)^{-\alpha-s}}$$

Lema

Sean $0 < s < r < \gamma, f \in C([0,T]; \Lambda_r(X,d,\mu))$

Construcción de los aproximantes

- $J_\varepsilon(x,y) := \psi_\varepsilon(d(x,y)) = \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\psi\left(\frac{d(x,y)}{\varepsilon}\right)$

$$\boxed{\frac{1}{\varepsilon^s}J_\varepsilon(x,y) \approx d(x,y)^{-\alpha-s}}$$

Lema

Sean $0 < s < r < \gamma$, $f \in C([0,T];\Lambda_r(X,d,\mu))$ *y*

$$\boxed{L_\varepsilon f(x,t) \;=\; \frac{1}{\varepsilon^s}\int_X J_\varepsilon(x,y)[f(y,t) \;-\; f(x,t)]\,d\mu(y).}$$

Construcción de los aproximantes

- $J_\varepsilon(x,y) := \psi_\varepsilon(d(x,y)) = \dfrac{1}{\varepsilon^\alpha}\psi\left(\dfrac{d(x,y)}{\varepsilon}\right)$

$$\frac{1}{\varepsilon^s} J_\varepsilon(x,y) \approx d(x,y)^{-\alpha-s}$$

Lema

Sean $0 < s < r < \gamma$, $f \in C([0,T];\Lambda_r(X,d,\mu))$ *y*

$$L_\varepsilon f(x,t) = \frac{1}{\varepsilon^s}\int_X J_\varepsilon(x,y)[f(y,t) - f(x,t)]\, d\mu(y).$$

Entonces,

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in X}|L_\varepsilon f(x,t) - D^s f(x,t)| \leq C(T)\varepsilon^{r-s}$$

Aproximación de soluciones

Teorema

Sean $0 < s < r < \gamma$ *y* $v(x,t) \in C([0,T]; \Lambda_r(X,d,\mu))$ *tales que*

$$v_t(x,t) = D^s v(x,t).$$

Aproximación de soluciones

Teorema

Sean $0 < s < r < \gamma$ *y* $v(x,t) \in C([0,T]; \Lambda_r(X,d,\mu))$ *tales que*

$$\boxed{v_t(x,t) \;=\; D^s v(x,t).}$$

Luego, para cada $0 < \varepsilon \leq 1$ *las soluciones* u^ε *de los problemas*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = L_\varepsilon f(x,t), & \textbf{\textit{en}}\ X \times [0,T], \\ u(x,0) = v(x,0), & \textbf{\textit{en}}\ X, \end{cases}$$

Aproximación de soluciones

Teorema

Sean $0 < s < r < \gamma$ *y* $v(x,t) \in C([0,T]; \Lambda_r(X,d,\mu))$ *tales que*

$$v_t(x,t) \ = \ D^s v(x,t).$$

Luego, para cada $0 < \varepsilon \leq 1$ *las soluciones* u^ε *de los problemas*

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= L_\varepsilon f(x,t), \quad \textbf{\textit{en}}\ X \times [0,T], \\ u(x,0) &= v(x,0), \quad \textbf{\textit{en}}\ X, \end{cases}$$

satisfacen que

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in X} |v(x,t) - u^\varepsilon(x,t)| \leq C(T)\varepsilon^{r-s}.$$

Conclusiones

- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador $(-\Delta)^{s/2}$ puede extenderse en forma apropiada a espacios Ahlfors regulares.

Conclusiones

- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador $(-\Delta)^{s/2}$ puede extenderse en forma apropiada a espacios Ahlfors regulares.
- El operador de derivación fraccionaria diádico D^s tiene por autofunciones al sistema de Haar.

Conclusiones

- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador $(-\Delta)^{s/2}$ puede extenderse en forma apropiada a espacios Ahlfors regulares.
- El operador de derivación fraccionaria diádico D^s tiene por autofunciones al sistema de Haar.
- Los espacios $L^p_s(X, \delta, \mu)$ y $B^2_r(X, \delta, \mu)$ pueden caracterizarse a través de la bases de Haar.

Conclusiones

- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador $(-\Delta)^{s/2}$ puede extenderse en forma apropiada a espacios Ahlfors regulares.
- El operador de derivación fraccionaria diádico D^s tiene por autofunciones al sistema de Haar.
- Los espacios $L^p_s(X, \delta, \mu)$ y $B^2_r(X, \delta, \mu)$ pueden caracterizarse a través de la bases de Haar.
- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador D^s diádico:

Conclusiones

- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador $(-\Delta)^{s/2}$ puede extenderse en forma apropiada a espacios Ahlfors regulares.
- El operador de derivación fraccionaria diádico D^s tiene por autofunciones al sistema de Haar.
- Los espacios $L^p_s(X, \delta, \mu)$ y $B^2_r(X, \delta, \mu)$ pueden caracterizarse a través de la bases de Haar.
- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador D^s diádico:
    - tiene solución en e.t.h. generales para dato inicial en los espacios L^p;

Conclusiones

- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador $(-\Delta)^{s/2}$ puede extenderse en forma apropiada a espacios Ahlfors regulares.
- El operador de derivación fraccionaria diádico D^s tiene por autofunciones al sistema de Haar.
- Los espacios $L^p_s(X, \delta, \mu)$ y $B^2_r(X, \delta, \mu)$ pueden caracterizarse a través de la bases de Haar.
- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador D^s diádico:
  - tiene solución en e.t.h. generales para dato inicial en los espacios L^p;
  - la solución del problema converge puntualmente al dato inicial en espacios de medida finita.

Conclusiones

- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador $(-\Delta)^{s/2}$ puede extenderse en forma apropiada a espacios Ahlfors regulares.
- El operador de derivación fraccionaria diádico D^s tiene por autofunciones al sistema de Haar.
- Los espacios $L^p_s(X, \delta, \mu)$ y $B^2_r(X, \delta, \mu)$ pueden caracterizarse a través de la bases de Haar.
- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador D^s diádico:
  - tiene solución en e.t.h. generales para dato inicial en los espacios L^p;
  - la solución del problema converge puntualmente al dato inicial en espacios de medida finita.
- El problema de dato inicial para la ecuación de Schrödinger no local vinculado al operador D^s diádico:

Conclusiones

- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador $(-\Delta)^{s/2}$ puede extenderse en forma apropiada a espacios Ahlfors regulares.
- El operador de derivación fraccionaria diádico D^s tiene por autofunciones al sistema de Haar.
- Los espacios $L^p_s(X, \delta, \mu)$ y $B^2_r(X, \delta, \mu)$ pueden caracterizarse a través de la bases de Haar.
- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador D^s diádico:
    - tiene solución en e.t.h. generales para dato inicial en los espacios L^p;
    - la solución del problema converge puntualmente al dato inicial en espacios de medida finita.
- El problema de dato inicial para la ecuación de Schrödinger no local vinculado al operador D^s diádico:
    - tiene solución en e.t.h. generales para dato inicial en los espacios de tipo Besov-Sobolev;

Conclusiones

- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador $(-\Delta)^{s/2}$ puede extenderse en forma apropiada a espacios Ahlfors regulares.
- El operador de derivación fraccionaria diádico D^s tiene por autofunciones al sistema de Haar.
- Los espacios $L^p_s(X, \delta, \mu)$ y $B^2_r(X, \delta, \mu)$ pueden caracterizarse a través de la bases de Haar.
- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador D^s diádico:
    - tiene solución en e.t.h. generales para dato inicial en los espacios L^p;
    - la solución del problema converge puntualmente al dato inicial en espacios de medida finita.
- El problema de dato inicial para la ecuación de Schrödinger no local vinculado al operador D^s diádico:
    - tiene solución en e.t.h. generales para dato inicial en los espacios de tipo Besov-Sobolev;
    - la solución converge puntualmente al dato inicial.

Conclusiones

- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador $(-\Delta)^{s/2}$ puede extenderse en forma apropiada a espacios Ahlfors regulares.
- El operador de derivación fraccionaria diádico D^s tiene por autofunciones al sistema de Haar.
- Los espacios $L_s^p(X, \delta, \mu)$ y $B_r^2(X, \delta, \mu)$ pueden caracterizarse a través de la bases de Haar.
- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador D^s diádico:
    - tiene solución en e.t.h. generales para dato inicial en los espacios L^p;
    - la solución del problema converge puntualmente al dato inicial en espacios de medida finita.
- El problema de dato inicial para la ecuación de Schrödinger no local vinculado al operador D^s diádico:
    - tiene solución en e.t.h. generales para dato inicial en los espacios de tipo Besov-Sobolev;
    - la solución converge puntualmente al dato inicial.
- Los problemas de evolución no locales definidos a partir de operadores de núcleos integrables:

Conclusiones

- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador $(-\Delta)^{s/2}$ puede extenderse en forma apropiada a espacios Ahlfors regulares.
- El operador de derivación fraccionaria diádico D^s tiene por autofunciones al sistema de Haar.
- Los espacios $L^p_s(X, \delta, \mu)$ y $B^2_r(X, \delta, \mu)$ pueden caracterizarse a través de la bases de Haar.
- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador D^s diádico:
  - tiene solución en e.t.h. generales para dato inicial en los espacios L^p;
  - la solución del problema converge puntualmente al dato inicial en espacios de medida finita.
- El problema de dato inicial para la ecuación de Schrödinger no local vinculado al operador D^s diádico:
  - tiene solución en e.t.h. generales para dato inicial en los espacios de tipo Besov-Sobolev;
  - la solución converge puntualmente al dato inicial.
- Los problemas de evolución no locales definidos a partir de operadores de núcleos integrables:
  - tienen solución única en espacios de medida para dato inicial en L^1;

Conclusiones

- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador $(-\Delta)^{s/2}$ puede extenderse en forma apropiada a espacios Ahlfors regulares.
- El operador de derivación fraccionaria diádico D^s tiene por autofunciones al sistema de Haar.
- Los espacios $L^p_s(X,\delta,\mu)$ y $B^2_r(X,\delta,\mu)$ pueden caracterizarse a través de la bases de Haar.
- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador D^s diádico:
    - tiene solución en e.t.h. generales para dato inicial en los espacios L^p;
    - la solución del problema converge puntualmente al dato inicial en espacios de medida finita.
- El problema de dato inicial para la ecuación de Schrödinger no local vinculado al operador D^s diádico:
    - tiene solución en e.t.h. generales para dato inicial en los espacios de tipo Besov-Sobolev;
    - la solución converge puntualmente al dato inicial.
- Los problemas de evolución no locales definidos a partir de operadores de núcleos integrables:
    - tienen solución única en espacios de medida para dato inicial en L^1;
    - existe una familia de núcleos indexados por un parámetro de reescalamiento cuyas soluciones asociadas convergen a la solución del problema $v_t = D^s v$ cuando el espacio subyacente es Ahlfors regular y compacto.

Conclusiones

- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador $(-\Delta)^{s/2}$ puede extenderse en forma apropiada a espacios Ahlfors regulares.
- El operador de derivación fraccionaria diádico D^s tiene por autofunciones al sistema de Haar.
- Los espacios $L^p_s(X, \delta, \mu)$ y $B^2_r(X, \delta, \mu)$ pueden caracterizarse a través de la bases de Haar.
- El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador D^s diádico:
  - tiene solución en e.t.h. generales para dato inicial en los espacios L^p;
  - la solución del problema converge puntualmente al dato inicial en espacios de medida finita.
- El problema de dato inicial para la ecuación de Schrödinger no local vinculado al operador D^s diádico:
  - tiene solución en e.t.h. generales para dato inicial en los espacios de tipo Besov-Sobolev;
  - la solución converge puntualmente al dato inicial.
- Los problemas de evolución no locales definidos a partir de operadores de núcleos integrables:
  - tienen solución única en espacios de medida para dato inicial en L^1;
  - existe una familia de núcleos indexados por un parámetro de reescalamiento cuyas soluciones asociadas convergen a la solución del problema $v_t = D^s v$ cuando el espacio subyacente es Ahlfors regular y compacto.

Gracias!