Análisis en el semigrupo generado por el operador de Schrödinger.

Enrique Adrián Cabral

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET-UNL)
Facultad de Ingeniería Química (UNL)

Defensa de Tesis

18 de Marzo de 2014

Contenido

- Introducción
- Contexto Schrödinger
- Extrapolación
- Espacio BMO
- Espacio de Hardy
- Comparación de Operadores

INTRODUCCIÓN

- Difusión del calor: hallar $u(x,t)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \triangle u(x,t) & \text{en } \Omega \times [0,\infty), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u(x,0) = f(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

- La solución viene dada por un semigrupo

$$u(x,t) = W_t f(x) = e^{t\triangle} f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy.$$

- Difusión del calor: hallar $u(x,t)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \triangle u(x,t) & \text{en } \Omega \times [0,\infty), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u(x,0) = f(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

- La solución viene dada por un semigrupo

$$u(x,t) = W_t f(x) = e^{t\triangle} f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy.$$

- Preguntas:
  - ¿Qué propiedades de f influyen sobre u?
  - ¿$\lim_{t\to 0} u(\cdot,t) = \lim_{t\to 0} W_t f = f$? ¿En qué sentido?

    Operador maximal del semigrupo: $W^* f(x) = \sup_{t>0} |W_t f(x)|$.

    Por ejemplo, ¿$f \in X \implies W^* f \in X$? o ¿dónde está?

- Operador de Schrödinger

$$\mathcal{L} = -\Delta + V; \qquad V \geqslant 0, \quad V \in L_1^{\mathrm{loc}}.$$

- Problemas de difusión

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\mathcal{L}u(x,t) & \text{en } \Omega \times [0,\infty), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u(x,0) = f(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

- Operador de Schrödinger

$$\mathcal{L} = -\Delta + V; \qquad V \geqslant 0, \quad V \in L_1^{\text{loc}}.$$

- Problemas de difusión

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\mathcal{L}u(x,t) & \text{en } \Omega \times [0,\infty), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u(x,0) = f(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

- Semigrupo asociado a $\mathcal{L}$: $\{T_t\}_{t>0}$

$$T_t f(x) = e^{-t\mathcal{L}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k_t(x,y) f(y)\, dy, \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

  - No se conoce en forma explícita $k_t(x,y)$.
  - $0 \leqslant T_t \leqslant W_t$.

- Operadores
  - $\mathcal{T}^* f(x) = \sup_{t>0} |e^{-t\mathcal{L}} f(x)|$.
  - $\mathcal{I}_\alpha = \mathcal{L}^{-\alpha/2} = \int_0^\infty e^{-t\mathcal{L}} f(x) t^{\alpha/2} \frac{dt}{t}$.
  - $\mathcal{R} = \nabla \mathcal{L}^{-1/2}$.
  - $\mathcal{R}^* = \mathcal{L}^{-1/2} \nabla$.

- Operadores
  - $\mathcal{T}^* f(x) = \sup_{t>0} |e^{-t\mathcal{L}} f(x)|$.
  - $\mathcal{I}_\alpha = \mathcal{L}^{-\alpha/2} = \int_0^\infty e^{-t\mathcal{L}} f(x) t^{\alpha/2} \frac{dt}{t}$.
  - $\mathcal{R} = \nabla \mathcal{L}^{-1/2}$.
  - $\mathcal{R}^* = \mathcal{L}^{-1/2} \nabla$.

- Espacios
  - $L^p(w), \quad 1 < p < \infty$.
  - $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ (sustituto de $p = 1$).
  - $BMO_{\mathcal{L}}(w)$ (sustituto de $p = \infty$).

- Operadores
  - $\mathcal{T}^* f(x) = \sup_{t>0} |e^{-t\mathcal{L}} f(x)|$.
  - $\mathcal{I}_\alpha = \mathcal{L}^{-\alpha/2} = \int_0^\infty e^{-t\mathcal{L}} f(x) t^{\alpha/2} \frac{dt}{t}$.
  - $\mathcal{R} = \nabla \mathcal{L}^{-1/2}$.
  - $\mathcal{R}^* = \mathcal{L}^{-1/2} \nabla$.
- Espacios
  - $L^p(w), \quad 1 < p < \infty$.
  - $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ (sustituto de $p = 1$).
  - $BMO_{\mathcal{L}}(w)$ (sustituto de $p = \infty$).
- Pesos
  - ¿w? ¿Qué le pedimos?

CONTEXTO SCHRÖDINGER

- Operador de Schrödinger $\qquad \mathcal{L} = -\Delta + V \qquad (d \geqslant 3)$

  V es un potencial, $V \geqslant 0$, $V \not\equiv 0$ y $V \in RH_q$ con $q > d/2$.

- Operador de Schrödinger $\mathcal{L} = -\Delta + V \qquad (d \geqslant 3)$

  V es un potencial, $V \geqslant 0$, $V \not\equiv 0$ y $V \in RH_q$ con $q > d/2$.

Ejemplos

- $\mathcal{L} = -\Delta + \text{cte}.$
- $\mathcal{H} = -\Delta + |x|^2.$
- $\mathcal{P} = -\Delta + |x|^\alpha, \ \ \alpha q > -d.$

- Operador de Schrödinger $\qquad \mathcal{L} = -\Delta + V \qquad (d \geqslant 3)$

  V es un potencial, $V \geqslant 0$, $V \not\equiv 0$ y $V \in RH_q$ con $q > d/2$.

- Operador de Schrödinger $\qquad \mathcal{L} = -\Delta + V \qquad (d \geqslant 3)$

  V es un potencial, $V \geqslant 0$, $V \not\equiv 0$ y $V \in RH_q$ con $q > d/2$.

- Función asociada a $\mathcal{L}$: [S, 94]

$$\rho(x) \doteq \rho_V(x) = \sup\left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(x,r)} V \leqslant 1 \right\}, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

  Además, $0 < \rho(x) < \infty$. (si $V \equiv 0 \rightsquigarrow \rho \equiv \infty$)
  Si $V \equiv cte \rightsquigarrow \rho \equiv 1$; si $V = |x|^2 \rightsquigarrow \rho(x) = \frac{1}{1+|x|}$.

- Operador de Schrödinger $\qquad \mathcal{L} = -\Delta + V \qquad (d \geqslant 3)$

  V es un potencial, $V \geqslant 0$, $V \not\equiv 0$ y $V \in RH_q$ con $q > d/2$.

- Función asociada a $\mathcal{L}$: [S, 94]

$$\rho(x) \doteq \rho_V(x) = \sup\left\{r > 0 : \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(x,r)} V \leqslant 1\right\}, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

  Además, $0 < \rho(x) < \infty$. (si $V \equiv 0 \rightsquigarrow \rho \equiv \infty$)
  Si $V \equiv cte \rightsquigarrow \rho \equiv 1$; si $V = |x|^2 \rightsquigarrow \rho(x) = \frac{1}{1+|x|}$.

- Función radio crítico: $\exists\ c_0, N_0 \geqslant 1/\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$c_0^{-1}\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N_0} \leqslant \frac{\rho(y)}{\rho(x)} \leqslant c_0\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}}.$$

  En particular, si $|x-y| \leqslant C\rho(x) \implies \rho(x) \simeq \rho(y)$.

En [S, 95], Z. Shen prueba la acotación $L^p(\mathbb{R}^d)$ de ciertos operadores tipo transformadas de Riesz.

$V \in RH_q$	Operador	Rango de p
$q > d/2$	$(-\Delta + V)^{i\eta}$, $\eta \in \mathbb{R}$	$(1, \infty)$
$q \geqslant d$	$\mathcal{R} = \nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$	$(1, \infty)$
$q \geqslant d$	$\mathcal{R}^* = (-\Delta + V)^{-1/2}\nabla$	$(1, \infty)$
$q > d/2$	$V(-\Delta + V)^{-1}$	$(1, q)$
$q > d/2$	$V^{1/2}(-\Delta + V)^{-1/2}$	$(1, 2q)$
$d/2 < q < d$	$\mathcal{R} = \nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$	$(1, s)$ $\quad \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$
$d/2 < q < d$	$\mathcal{R}^* = (-\Delta + V)^{-1/2}\nabla$	(s', ∞) $\quad \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$

- Pesos

  - $w \in A_p^\rho$: $$\left(\fint_{B(x,r)} w\right)^{1/p}\left(\fint_{B(x,r)} w^{1-p'}\right)^{1/p'} \leqslant C\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^\theta, \quad \theta \geqslant 0.$$

  - $w \in A_1^\rho$: $$\fint_{B(x,r)} w \leqslant C\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^\theta \inf_{B(x,r)} w, \quad \theta \geqslant 0.$$

  - $A_p \subsetneq A_p^\rho$. Ej:
    Si $\rho \equiv 1$ y $w(x) = 1 + |x|^\gamma$, $\gamma > d(p-1) \implies w \notin A_p$ y $w \in A_p^\rho$ $(\theta = \gamma)$.

Resultados previos: pesos A_p^ρ

- Pesos
  - $w \in A_p^\rho$: $$\left(\fint_{B(x,r)} w\right)^{1/p}\left(\fint_{B(x,r)} w^{1-p'}\right)^{1/p'} \leqslant C\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta}, \qquad \theta \geqslant 0.$$
  - $w \in A_1^\rho$: $$\fint_{B(x,r)} w \leqslant C\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta} \inf_{B(x,r)} w, \qquad \theta \geqslant 0.$$
  - $A_p \subsetneq A_p^\rho$. Ej:
    Si $\rho \equiv 1$ y $w(x) = 1 + |x|^\gamma$, $\gamma > d(p-1) \implies w \notin A_p$ y $w \in A_p^\rho$ $(\theta = \gamma)$.

Propiedades

- $A_1^\rho \subset A_p^\rho \subset A_q^\rho$, $1 < p < q$.
- $w \in A_p^\rho \iff w^{1-p'} \in A_{p'}^\rho$.
- $w_1, w_2 \in A_1^\rho \implies w_1 w_2^{1-p} \in A_p^\rho$.

En [BHS, 10], los autores prueban la acotación $L^p(w)$ de ciertos operadores asociados a $\mathcal{L}$.

$V \in RH_q$	Operador	Rango de p	Pesos
$q > d/2$	$\mathcal{T}^*$	$(1,\infty)$	A_p^ρ
$q \geqslant d$	$\mathcal{R}, \mathcal{R}^*$	$(1,\infty)$	A_p^ρ
$d/2 < q < d$	$\mathcal{R}$	$(1,s)$ $\quad \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$	$w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'/s'}^\rho$
$d/2 < q < d$	$\mathcal{R}^*$	(s',∞) $\quad \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$	$w \in A_{p/s'}^\rho$
$q > d/2$	$\mathcal{I}_\alpha, \quad \alpha \in (0,d)$	$L^p(w) \to L^\nu(w^{\frac{\nu}{p}})$ $p \in (1, d/\alpha)$	$w^{\nu/p} \in A_{1+\frac{\nu}{p'}}^\rho$ $1/\nu = 1/p - \alpha/d$

OBJETIVOS DE LA TESIS

1. Desarrollar una teoría de extrapolación para los pesos A_p^ρ, esto es, a partir de una desigualdad en norma $L^{p_0}(w)$ para un cierto p_0, inferir desigualdades en norma $L^p(w)$ para todo p.

2. Lograr acotación de operadores en los espacios extremos con pesos y aplicar las técnicas de extrapolación para obtener desigualdades en $L^p(w)$.

3. Aplicar la teoría de extrapolación para comparar operadores en norma $L^p(w)$.

EXTRAPOLACIÓN

- Rubio de Francia: [RF, 82]

Sea $1 \leqslant p_0 < \infty$. Si T es un operador (sublineal) tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^{p_0} w(x)\, dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^{p_0} w(x)\, dx, \quad \forall w \in A_{p_0}.$$

Entonces, T es acotado en $L^p(w)$ para todo $1 < p < \infty$ y todo $w \in A_p$.

- Transformadas de Riesz, Integrales Singulares, Littlewood-Paley.

- Rubio de Francia: [RF, 82]

Sea $1 \leqslant p_0 < \infty$. Si T es un operador (sublineal) tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^{p_0} w(x)\, dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^{p_0} w(x)\, dx, \quad \forall w \in A_{p_0}.$$

Entonces, T es acotado en $L^p(w)$ para todo $1 < p < \infty$ y todo $w \in A_p$.

- Transformadas de Riesz, Integrales Singulares, Littlewood-Paley.

- Relación fundamental:

$$M : L^p(w) \to L^p(w) \iff w \in A_p.$$

- Los pesos que nos interesan son los de la clase A_p^ρ.

$$\left(\fint_{B(x,r)} w\right)^{1/p}\left(\fint_{B(x,r)} w^{1-p'}\right)^{1/p'} \leqslant C\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta}.$$

- Los pesos que nos interesan son los de la clase A_p^ρ.

$$\left(\fint_{B(x,r)} w\right)^{1/p}\left(\fint_{B(x,r)} w^{1-p'}\right)^{1/p'} \leqslant C\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta}.$$

- ¿Quién reemplaza a M?

- Los pesos que nos interesan son los de la clase A_p^ρ.

$$\left(\fint_{B(x,r)} w\right)^{1/p}\left(\fint_{B(x,r)} w^{1-p'}\right)^{1/p'} \leqslant C\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta}.$$

- ¿Quién reemplaza a M?

$$M_\rho^\theta f(x) = \sup_{r>0}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{-\theta}\fint_{B(x,r)}|f|, \qquad x\in\mathbb{R}^d,\ \theta\geqslant 0.$$

Para $0\leqslant\eta\leqslant\theta$: $M_\rho^\theta f\leqslant M_\rho^\eta f\leqslant Mf$.

- Los pesos que nos interesan son los de la clase A_p^ρ.

$$\left(\fint_{B(x,r)} w\right)^{1/p}\left(\fint_{B(x,r)} w^{1-p'}\right)^{1/p'} \leqslant C\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta}.$$

- ¿Quién reemplaza a M?

$$M_\rho^\theta f(x) = \sup_{r>0}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{-\theta}\fint_{B(x,r)}|f|, \qquad x\in\mathbb{R}^d,\ \theta\geqslant 0.$$

Para $0\leqslant\eta\leqslant\theta$: $M_\rho^\theta f \leqslant M_\rho^\eta f \leqslant Mf$.

Teorema

$1<p<\infty$

$$w\in A_p^\rho \iff \exists\,\theta\geqslant 0/\ M_\rho^\theta : L^p(w)\longrightarrow L^p(w).$$

Extrapolación en el contexto Schrödinger

Primer Teorema de Extrapolación

$1 \leqslant p_0 < \infty$: $$T : L^{p_0}(w) \longrightarrow L^{p_0}(w), \ \ \forall w \in A^{\rho}_{p_0}$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^{p}(w) \longrightarrow L^{p}(w), \ \ \forall p > 1, \ \ \forall w \in A^{\rho}_{p}$$

$$\&$$

$1 < p, \gamma < \infty :$ $(\star)$ $$\left\| \Big(\sum_i |Tf_i|^\gamma \Big)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)} \lesssim \left\| \Big(\sum_i |f_i|^\gamma \Big)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)}, \quad \forall w \in A^{\rho}_{p}$$

Primer Teorema de Extrapolación

$0 < r \leqslant p_0 < \infty$: $$T : L^{p_0}(w) \longrightarrow L^{p_0}(w), \;\; \forall w \in A^{\rho}_{p_0/r}$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^{p}(w) \longrightarrow L^{p}(w), \;\; \forall p > r, \;\; \forall w \in A^{\rho}_{p/r}$$

$$\&$$

$r < p, \gamma < \infty$: $$(\star) \quad \Big\| \Big(\sum_i |Tf_i|^{\gamma} \Big)^{1/\gamma} \Big\|_{L^p(w)} \lesssim \Big\| \Big(\sum_i |f_i|^{\gamma} \Big)^{1/\gamma} \Big\|_{L^p(w)}, \;\; \forall w \in A^{\rho}_{p/r}$$

Primer Teorema de Extrapolación

$0 < r \leqslant p_0 < \infty$: $$T : L^{p_0}(w) \longrightarrow L^{p_0}(w), \quad \forall w \in A^{\rho}_{p_0/r}$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^{p}(w) \longrightarrow L^{p}(w), \quad \forall p > r, \quad \forall w \in A^{\rho}_{p/r}$$

$$\&$$

$r < p, \gamma < \infty$: $(\star)$ $$\Big\| \Big(\sum_i |Tf_i|^{\gamma} \Big)^{1/\gamma} \Big\|_{L^p(w)} \lesssim \Big\| \Big(\sum_i |f_i|^{\gamma} \Big)^{1/\gamma} \Big\|_{L^p(w)}, \quad \forall w \in A^{\rho}_{p/r}$$

$$L^{\infty}(w) = \big\{ f : \; \|fw\|_{L^\infty} < \infty \big\}$$

Primer Teorema de Extrapolación

$0 < r \leqslant p_0 < \infty$: $\quad T : L^{p_0}(w) \longrightarrow L^{p_0}(w), \ \forall w \in A^{\rho}_{p_0/r}$

$$\Downarrow$$

$$T : L^p(w) \longrightarrow L^p(w), \ \forall p > r, \ \forall w \in A^{\rho}_{p/r}$$

$$\&$$

$r < p, \gamma < \infty$: $\quad (\star) \ \left\| \left(\sum_i |Tf_i|^\gamma \right)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)} \lesssim \left\| \left(\sum_i |f_i|^\gamma \right)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)}, \ \forall w \in A^{\rho}_{p/r}$

$$L^\infty(w) = \{f : \ \|fw\|_{L^\infty} < \infty\}$$

Segundo Teorema de Extrapolación

$r > 0, \ p_0 = \infty$: $\quad T : L^\infty(w) \longrightarrow L^\infty(w), \quad \forall \, w$ tal que $w^{-r} \in A^{\rho}_1$

$$\Downarrow$$

$$T : L^p(w) \longrightarrow L^p(w), \ \forall p > r, \quad \forall w \in A^{\rho}_{p/r}$$

Además, se cumple $(\star)$ para $r < p, \gamma < \infty$ y todo $w \in A^{\rho}_{p/r}$.

ESPACIO BMO ASOCIADO A ρ

Espacio $BMO_\rho(w)$

- En [DGMTZ, 05] $\longrightarrow$ $BMO_{\mathcal{L}}(w)$ con $w = 1$.

Espacio $BMO_\rho(w)$

- En [DGMTZ, 05] $\longrightarrow$ $BMO_{\mathcal{L}}(w)$ con $w = 1$.

Definición

Si $\mathcal{B}_\rho = \{B(x,r) : r \leqslant \rho(x)\}$. Diremos que $f \in BMO_\rho(w)$, si

$$\frac{\|w\chi_B\|_{L^\infty}}{|B|}\int_B |f(y) - f_B|\, dy \leqslant C, \qquad \forall\ B \in \mathcal{B}_\rho.$$

$$\frac{\|w\chi_B\|_{L^\infty}}{|B|}\int_B |f(y)|\, dy \leqslant C, \qquad \forall\ B = B(x,\rho(x)).$$

Obs: Si $w^{-1} \in A_1^\rho \implies L^\infty(w) \subset BMO_\rho(w)$.

¿Cómo utilizar el Segundo Teorema de Extrapolación?

¿Cómo utilizar el Segundo Teorema de Extrapolación?

- Consideremos la siguiente función maximal sharp ρ-local

$$M_\rho^\sharp f(x) = \sup_{x\in B\in\mathcal{B}_\rho} \fint_B |f - f_B| \quad + \quad \sup_{x\in B=B(y,\rho(y))} \fint_B |f|,$$

¿Cómo utilizar el Segundo Teorema de Extrapolación?

- Consideremos la siguiente función maximal sharp ρ-local

$$M^\sharp_\rho f(x) = \sup_{x\in B\in\mathcal{B}_\rho} \fint_B |f - f_B| \quad + \quad \sup_{x\in B=B(y,\rho(y))} \fint_B |f|,$$

- Caracteriza el espacio $BMO_\rho(w)$:

$$BMO_\rho(w) = \left\{ f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) : \|M^\sharp_\rho f\, w\|_{L^\infty} < \infty \right\}$$

- Desigualdad de tipo Fefferman-Stein:

Si $1 < p < \infty$ y $w \in A^\rho_p$:

$$\|g\|_{L^p(w)} \lesssim \|M^\sharp_\rho g\|_{L^p(w)}, \qquad \forall\, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d).$$

Teorema

$r \geqslant 1$: $$T : L^\infty(w) \to BMO_\rho(w), \quad \forall\, w \ \textit{tal que}\ w^{-r} \in A_1^\rho$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^p(w) \to L^p(w), \quad \forall\, p > r, \ \forall w \in A_{p/r}^\rho$$

$$\&$$

$r < p, \gamma < \infty$: $$\left\| \Big(\sum_i |Tf_i|^\gamma \Big)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)} \lesssim \left\| \Big(\sum_i |f_i|^\gamma \Big)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)}, \quad \forall w \in A_{p/r}^\rho$$

Teorema

$r \geqslant 1$:
$$T : L^\infty(w) \to BMO_\rho(w), \quad \forall\, w \text{ tal que } w^{-r} \in A_1^\rho$$
$$\Downarrow$$
$$T : L^p(w) \to L^p(w), \quad \forall\, p > r, \ \forall w \in A_{p/r}^\rho$$
$$\&$$
$r < p, \gamma < \infty$:
$$\Big\| \Big(\sum_i |Tf_i|^\gamma \Big)^{1/\gamma} \Big\|_{L^p(w)} \lesssim \Big\| \Big(\sum_i |f_i|^\gamma \Big)^{1/\gamma} \Big\|_{L^p(w)}, \quad \forall w \in A_{p/r}^\rho$$

Demostración :

$$\text{Hipótesis} \implies M_\rho^\sharp \circ T : L^\infty(v) \longrightarrow L^\infty(v), \quad \forall v \text{ tal que } v^{-r} \in A_1^\rho$$

Teorema

$r \geqslant 1$: $$T : L^\infty(w) \to BMO_\rho(w), \quad \forall\, w \text{ tal que } w^{-r} \in A_1^\rho$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^p(w) \to L^p(w), \quad \forall\, p > r, \ \forall w \in A_{p/r}^\rho$$

$$\&$$

$r < p, \gamma < \infty$: $$\Big\| \Big(\sum_i |Tf_i|^\gamma \Big)^{1/\gamma} \Big\|_{L^p(w)} \lesssim \Big\| \Big(\sum_i |f_i|^\gamma \Big)^{1/\gamma} \Big\|_{L^p(w)}, \quad \forall w \in A_{p/r}^\rho$$

Demostración :

$$\text{Hipótesis} \implies M_\rho^\sharp \circ T : L^\infty(v) \longrightarrow L^\infty(v), \quad \forall v \text{ tal que } v^{-r} \in A_1^\rho$$

$$\Downarrow \ 2^{\text{o}} \text{ Teo. Extrapolación}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(M_\rho^\sharp \circ T) f|^p w \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p w, \qquad \forall w \in A_{p/r}^\rho$$

Teorema

$r \geqslant 1$: $$T : L^\infty(w) \to BMO_\rho(w), \quad \forall\, w \ \textit{tal que}\ w^{-r} \in A_1^\rho$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^p(w) \to L^p(w), \quad \forall\, p > r, \ \ \forall w \in A_{p/r}^\rho$$

$$\&$$

$r < p, \gamma < \infty$: $$\Big\| \Big(\sum_i |Tf_i|^\gamma \Big)^{1/\gamma} \Big\|_{L^p(w)} \lesssim \Big\| \Big(\sum_i |f_i|^\gamma \Big)^{1/\gamma} \Big\|_{L^p(w)}, \quad \forall w \in A_{p/r}^\rho$$

Demostración :

$$\text{Hipótesis} \implies M_\rho^\sharp \circ T : L^\infty(v) \longrightarrow L^\infty(v), \quad \forall v \text{ tal que } v^{-r} \in A_1^\rho$$

$$\Downarrow \ 2^{\text{o}} \text{ Teo. Extrapolación}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf|^p w \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |(M_\rho^\sharp \circ T) f|^p w \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p w, \qquad \forall w \in A_{p/r}^\rho$$

Definición

El núcleo $K(x,y)$ pertenece a $\mathcal{S}_\rho(\infty)$ si:

- Tamaño: Para cada $N>0$,

$$|K(x,y)| \leqslant C_N \frac{1}{|x-y|^d}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}.$$

- Suavidad: Para cada $M>0$ y algún $\delta>0$,

$$|K(x,y)-K(x_0,y)| \leqslant C_M \frac{|x-x_0|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-M},$$

siempre que $|x-x_0| \leqslant \frac{|x-y|}{2}$.

Definición

El núcleo $K(x,y)$ pertenece a $\mathcal{S}_\rho(s)$ si existe $s>1$ tal que:

- Tamaño: Para cada $N>0$,

$$\left(\int_{R<|x-x_0|\leqslant 2R}|K(x,y)|^s dy\right)^{1/s}\leqslant C_N R^{-d/s'}\left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-N},$$

  para todo $x\in B(x_0,r)$ y $R\geqslant 2r$.

- Suavidad:(Hörmander-s) Para cada τ,

$$\sum_{k\geqslant 1}k(2^k r)^{d/s'}\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{\tau}\left(\int_{2^{k+1}B\setminus 2^k B}|K(x,y)-K(x_0,y)|^s dy\right)^{1/s}\leqslant C_\tau$$

  para toda bola $B=B(x_0,r)$ con $r\leqslant\rho(x_0)$ y todo $x\in B$.

Sea T un operador integral (singular) con núcleo $K(x, y)$.

Sea T un operador integral (singular) con núcleo $K(x, y)$.

T de tipo fuerte (p, p), $p > 1$, $p \simeq 1$

$+$

$K \in \mathcal{S}_\rho(\infty)$

Sea T un operador integral (singular) con núcleo $K(x, y)$.

T de tipo fuerte (p, p), $p > 1$, $p \simeq 1$

$+$

$K \in \mathcal{S}_\rho(\infty)$

$\Downarrow$

$$T : L^\infty(w) \longrightarrow BMO_\rho(w)$$

$$\forall\ w/\ w^{-1} \in A_1^\rho$$

Sea T un operador integral (singular) con núcleo $K(x,y)$.

T de tipo fuerte (p,p), $p > 1$, $p \simeq 1$

$+$

$K \in \mathcal{S}_\rho(\infty)$

$$\Downarrow$$

$$T : L^\infty(w) \longrightarrow BMO_\rho(w)$$

$$\forall\ w/\ w^{-1} \in A_1^\rho$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^p(w) \to L^p(w),\ \ \forall\, p > 1$$

$$T : L^p_{l^\gamma}(w) \to L^p_{l^\gamma}(w),\ \ \forall\, p,\gamma > 1$$

$$\forall\ w \in A_p^\rho$$

Sea T un operador integral (singular) con núcleo $K(x,y)$.

T de tipo fuerte (p,p), $p>1$, $p \simeq 1$
$+$
$K \in \mathcal{S}_\rho(\infty)$

T de tipo débil (s', s'), $s>1$
$+$
$K \in \mathcal{S}_\rho(s)$

$\Downarrow$

$$T : L^\infty(w) \longrightarrow BMO_\rho(w)$$

$$\forall\ w/\ w^{-1} \in A_1^\rho$$

$\Downarrow$

$$T : L^p(w) \to L^p(w),\ \ \forall\, p>1$$

$$T : L^p_{l^\gamma}(w) \to L^p_{l^\gamma}(w),\ \ \forall\, p,\gamma>1$$

$$\forall\ w \in A_p^\rho$$

Aplicaciones: Integrales Singulares asociadas a ρ

Sea T un operador integral (singular) con núcleo $K(x,y)$.

T de tipo fuerte (p,p), $p>1$, $p \simeq 1$
$+$
$K \in \mathcal{S}_\rho(\infty)$

$\Downarrow$

$T : L^\infty(w) \longrightarrow BMO_\rho(w)$

$\forall\ w/\ w^{-1} \in A_1^\rho$

$\Downarrow$

$T : L^p(w) \to L^p(w), \ \forall\, p>1$

$T : L^p_{l^\gamma}(w) \to L^p_{l^\gamma}(w), \ \forall\, p,\gamma>1$

$\forall\ w \in A_p^\rho$

T de tipo débil (s',s'), $s>1$
$+$
$K \in \mathcal{S}_\rho(s)$

$\Downarrow$

$T : L^\infty(w) \longrightarrow BMO_\rho(w)$

$\forall\ w/\ w^{-s'} \in A_1^\rho$

Sea T un operador integral (singular) con núcleo $K(x,y)$.

T de tipo fuerte (p,p), $p>1$, $p \simeq 1$
$+$
$K \in \mathcal{S}_\rho(\infty)$

$\Downarrow$

$T : L^\infty(w) \longrightarrow BMO_\rho(w)$

$\forall\ w/\ w^{-1} \in A_1^\rho$

$\Downarrow$

$T : L^p(w) \to L^p(w),\ \ \forall\, p>1$

$T : L^p_{l^\gamma}(w) \to L^p_{l^\gamma}(w),\ \ \forall\, p,\gamma > 1$

$\forall\ w \in A_p^\rho$

T de tipo débil (s',s'), $s>1$
$+$
$K \in \mathcal{S}_\rho(s)$

$\Downarrow$

$T : L^\infty(w) \longrightarrow BMO_\rho(w)$

$\forall\ w/\ w^{-s'} \in A_1^\rho$

$\Downarrow$

$T : L^p(w) \to L^p(w),\ \ \forall\, p>s'$

$T : L^p_{l^\gamma}(w) \to L^p_{l^\gamma}(w),\ \ \forall\, p,\gamma > s'$

$\forall\ w \in A_{p/s'}^\rho$

Operadores con núcleo en $\mathcal{S}_\rho(\infty)$: Sea $V \in RH_q$ con $q > d/2$.

1. $\mathcal{R} = \nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$, $\quad q \geqslant d$.
2. $\mathcal{R}^* = (-\Delta + V)^{-1/2}\nabla$, $\quad q \geqslant d$.
3. $\nabla(-\Delta + V)^{-1}\nabla$, $\quad q \geqslant d$.
4. $(-\Delta + V)^{i\eta}$ con $\eta \in \mathbb{R}$.

Operadores con núcleo en $\mathcal{S}_\rho(\infty)$: Sea $V \in RH_q$ con $q > d/2$.

1. $\mathcal{R} = \nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$, $\quad q \geqslant d$.
2. $\mathcal{R}^* = (-\Delta + V)^{-1/2}\nabla$, $\quad q \geqslant d$.
3. $\nabla(-\Delta + V)^{-1}\nabla$, $\quad q \geqslant d$.
4. $(-\Delta + V)^{i\eta}$ con $\eta \in \mathbb{R}$.

Operadores con núcleo en $\mathcal{S}_\rho(s)$: Sea $V \in RH_q$ con $q > d/2$.

1. $(-\Delta + V)^{-1/2}V^{1/2}$, $\quad s = 2q$.
2. $(-\Delta + V)^{-1}V$, $\quad s = q$.
3. $\mathcal{R}^* = (-\Delta + V)^{-1/2}\nabla$, $\quad \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$ y $q < d$.

Operadores con núcleo en $\mathcal{S}_\rho(\infty)$: Sea $V \in RH_q$ con $q > d/2$.

1. $\mathcal{R} = \nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$, $\quad q \geqslant d$.
2. $\mathcal{R}^* = (-\Delta + V)^{-1/2}\nabla$, $\quad q \geqslant d$.
3. $\nabla(-\Delta + V)^{-1}\nabla$, $\quad q \geqslant d$.
4. $(-\Delta + V)^{i\eta}$ con $\eta \in \mathbb{R}$.

Operadores con núcleo en $\mathcal{S}_\rho(s)$: Sea $V \in RH_q$ con $q > d/2$.

1. $(-\Delta + V)^{-1/2}V^{1/2}$, $\quad s = 2q$.
2. $(-\Delta + V)^{-1}V$, $\quad s = q$.
3. $\mathcal{R}^* = (-\Delta + V)^{-1/2}\nabla$, $\quad \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$ y $q < d$.

Estos operadores satisfacen las condiciones para pertenecer a $\mathcal{S}_\rho(\infty)$ y $\mathcal{S}_\rho(s)$.

- Condiciones de acotación, probadas por [S, 95].
- Condiciones de tamaño y suavidad, probadas por [S, 95], [GLP, 08] y algunas son nuevos.

ESPACIO DE HARDY ASOCIADO A ρ

- En [DZ, 99] $\longrightarrow$ $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ con $w = 1$.
  $\searrow$ Descomposición atómica y caracterización por $\mathcal{R}$.
- En [LTZ, 12] $\longrightarrow$ $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ con $w \in A_1$.

- En [DZ, 99] $\longrightarrow$ $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ con $w = 1$.
  $\searrow$ Descomposición atómica y caracterización por $\mathcal{R}$.

- En [LTZ, 12] $\longrightarrow$ $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ con $w \in A_1$.

Espacio de Hardy-Schrödinger

Para $w \in A_1^{\rho}$,

$$H^1_{\mathcal{L}}(w) = \left\{ f \in L^1(w) : \ \mathcal{T}^* f = \sup_{t>0} |e^{-t\mathcal{L}} f(x)| \in L^1(w) \right\},$$

$$e^{-t\mathcal{L}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k_t(x,y) f(y)\, dy, \qquad \|f\|_{H^1_{\mathcal{L}}(w)} \doteq \|\mathcal{T}^* f\|_{L^1(w)}$$

Espacios de Hardy-Schrödinger con pesos

- En [DZ, 99] $\longrightarrow$ $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ con $w = 1$.
  $\searrow$ Descomposición atómica y caracterización por $\mathcal{R}$.

- En [LTZ, 12] $\longrightarrow$ $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ con $w \in A_1$.

Espacio de Hardy-Schrödinger

Para $w \in A_1^{\rho}$,

$$H^1_{\mathcal{L}}(w) = \left\{ f \in L^1(w) : \ \mathcal{T}^* f = \sup_{t>0} |e^{-t\mathcal{L}} f(x)| \in L^1(w) \right\},$$

$$e^{-t\mathcal{L}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k_t(x,y) f(y) \, dy, \qquad \|f\|_{H^1_{\mathcal{L}}(w)} \doteq \|\mathcal{T}^* f\|_{L^1(w)}$$

Pregunta: ¿Existe una caracterización maximal dependiendo sólo de ρ?

Pregunta: ¿Existe una caracterización maximal dependiendo sólo de ρ?

Pregunta: ¿Existe una caracterización maximal dependiendo sólo de ρ?

Espacio de Hardy-Schrödinger

Para una ρ y un peso w,

$$H^1_\rho(w) = \Big\{ f \in L^1(w) : \; \mathcal{W}^*_\rho f(x) = \sup_{0<t<\rho(x)^2} |W_t f(x)| \in L^1(w) \Big\},$$

$$W_t f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy, \qquad \|f\|_{H^1_\rho(w)} \doteq \|\mathcal{W}^*_\rho f\|_{L^1(w)}$$

Pregunta: ¿Existe una caracterización maximal dependiendo sólo de ρ?

Espacio de Hardy-Schrödinger

Para una ρ y un peso w,

$$H^1_\rho(w) = \left\{ f \in L^1(w) : \ \mathcal{W}^*_\rho f(x) = \sup_{0<t<\rho(x)^2} |W_t f(x)| \in L^1(w) \right\},$$

$$W_t f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy, \qquad \|f\|_{H^1_\rho(w)} \doteq \|\mathcal{W}^*_\rho f\|_{L^1(w)}$$

¿Cómo se relacionan?

PREGUNTA: ¿Existe una caracterización maximal dependiendo sólo de ρ?

ESPACIO DE HARDY-SCHRÖDINGER

Para una ρ y un peso w,

$$H^1_\rho(w) = \left\{ f \in L^1(w) : \ \mathcal{W}^*_\rho f(x) = \sup_{0<t<\rho(x)^2} |W_t f(x)| \in L^1(w) \right\},$$

$$W_t f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy, \qquad \|f\|_{H^1_\rho(w)} \doteq \|\mathcal{W}^*_\rho f\|_{L^1(w)}$$

¿Cómo se relacionan?

Teorema

Si $\rho = \rho_V \implies H^1_\rho(w) = H^1_{\mathcal{L}}(w)$ para $w \in A^\rho_1$.

Descomposición Atómica

Átomos:

Una función $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ es un (ρ, w)-átomo si:

- sop $a \subset B(x_0, r)$, $r \leqslant \gamma\rho(x_0)$. $\gamma = \gamma(c_0, d) > 1$
- $\|a\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{w(B(x_0, r))}$.
- $\displaystyle\int a(x)\, dx = 0$, si $r < \rho(x_0)/\gamma$.

Teorema

Si $w \in A_1^\rho$:

$$f \in H_\rho^1(w) \iff f = \textstyle\sum_j \lambda_j a_j, \quad \left(\sum_j |\lambda_j| < \infty \right)$$

&

$$\|f\|_{H_\rho^1(w)} \cong \text{ínf} \left\{ \sum_j |\lambda_j| : f = \sum_j \lambda_j a_j \right\}.$$

Transformada de Riesz ρ-local

- $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
- $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.
- $\eta \equiv 1$ en $B(0,1)$.
- Radial.
- sop $\subset B(0,2)$.

Transformada de Riesz ρ-local

- $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
- $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.
- $\eta \equiv 1$ en $B(0,1)$.
- Radial.
- sop $\subset B(0,2)$.

$$R_j^\rho f(x) \doteq v.p. \int k_j(x-y)\, \eta\left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right) f(y)\, dy, \qquad k_j(z) = \frac{z_j}{|z|^{d+1}}.$$

Transformada de Riesz ρ-local

- $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
- $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.
- $\eta \equiv 1$ en $B(0,1)$.
- Radial.
- sop $\subset B(0,2)$.

$$R_j^\rho f(x) \doteq v.p. \int k_j(x-y)\, \eta\left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right) f(y)\, dy, \qquad k_j(z) = \frac{z_j}{|z|^{d+1}}.$$

Teorema

Si $w \in A_1^\rho$*:*

$$f \in H^1_\rho(w) \iff f,\ R_j^\rho f \in L^1(w), \qquad j = 1, \dots, d.$$

$$\&$$

$$\|f\|_{H^1_\rho(w)} \simeq \|f\|_{L^1(w)} + \sum_{j=1}^{d} \|R_j^\rho f\|_{L^1(w)}.$$

Caso Schrödinger: $H^1_\rho(w) = H^1_{\mathcal{L}}(w)$

- Vale la caracterización por $\{R^\rho_j\}_{j=1}^d$.
- ¿Vale también una caracterización por $\{\mathcal{R}_j\}_{j=1}^d$ (transformadas de Riesz-Schrödinger)?

Caso Schrödinger: $H^1_\rho(w) = H^1_{\mathcal{L}}(w)$

- Vale la caracterización por $\{R_j^\rho\}_{j=1}^d$.
- ¿Vale también una caracterización por $\{\mathcal{R}_j\}_{j=1}^d$ (transformadas de Riesz-Schrödinger)?

Teorema

Sea $\mathcal{L} = -\Delta + V$ con $V \in RH_q$:

$$q \geqslant d \text{ y } w \in A_1^\rho.$$

$$\frac{d}{2} < q < d \text{ y } w^{s'} \in A_1^\rho \text{ con } \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}.$$

Caso Schrödinger: $H^1_\rho(w) = H^1_{\mathcal{L}}(w)$

- Vale la caracterización por $\{R_j^\rho\}_{j=1}^d$.
- ¿Vale también una caracterización por $\{\mathcal{R}_j\}_{j=1}^d$ (transformadas de Riesz-Schrödinger)?

Teorema

Sea $\mathcal{L} = -\Delta + V$ con $V \in RH_q$:

$$f \in H^1_{\mathcal{L}}(w) \iff f,\ \mathcal{R}_j f \in L^1(w)$$

$q \geqslant d$ y $w \in A_1^\rho$.

$\frac{d}{2} < q < d$ y $w^{s'} \in A_1^\rho$ con $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$.

En ambos casos,

$$\|f\|_{H^1_{\mathcal{L}}(w)} \simeq \|f\|_{L^1(w)} + \sum_{j=1}^{d} \|\mathcal{R}_j f\|_{L^1(w)}.$$

Sea T un operador integral (singular) con núcleo $K(x, y)$.

Sea T un operador integral (singular) con núcleo $K(x,y)$.

$$T : L^p \to L^p,\ \ \forall\, p > p_0, \quad p_0 \geqslant 1$$
$$+$$
$$K \in \mathcal{S}'(\infty)$$

Sea T un operador integral (singular) con núcleo $K(x,y)$.

$$T : L^p \to L^p, \;\; \forall\, p > p_0, \;\; p_0 \geqslant 1$$

$$+$$

$$K \in \mathcal{S}'(\infty)$$

$$\Downarrow$$

$$T : H^1_{\mathcal{L}}(w) \longrightarrow L^1(w)$$

$$\forall\; w \in A_1^\rho$$

Sea T un operador integral (singular) con núcleo $K(x,y)$.

$$T : L^p \to L^p, \ \ \forall\, p > p_0, \quad p_0 \geqslant 1$$
$$+$$
$$K \in \mathcal{S}'(\infty)$$

$$\Downarrow$$

$$T : H^1_{\mathcal{L}}(w) \longrightarrow L^1(w)$$
$$\forall\ w \in A_1^{\rho}$$

Ejemplos: $V \in RH_q$ con $q > d/2$.

1. $\mathcal{R} = \nabla(-\Delta + V)^{-1/2}, \qquad q \geqslant d.$
2. $\mathcal{R}^* = (-\Delta + V)^{-1/2}\nabla, \qquad q \geqslant d.$
3. $\nabla(-\Delta + V)^{-1}\nabla, \qquad q \geqslant d.$
4. $(-\Delta + V)^{i\eta}$ con $\eta \in \mathbb{R}$.

Motivación:

$$S : H^1_{\mathcal{L}}(w) \longrightarrow L^1(w), \qquad w \in A_1^\rho$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Sf|\, w \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}^* f|\, w, \qquad w \in A_1^\rho$$

Motivación:

$$S : H^1_{\mathcal{L}}(w) \longrightarrow L^1(w), \qquad w \in A_1^\rho$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Sf|\, w \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}^* f|\, w, \qquad w \in A_1^\rho$$

Obs:

- $\mathcal{T}^* : L^1(w) \not\longrightarrow L^1(w), \quad w \in A_1^\rho.$

Motivación:

$$S : H^1_{\mathcal{L}}(w) \longrightarrow L^1(w), \qquad w \in A_1^\rho$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Sf|\, w \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}^* f|\, w, \qquad w \in A_1^\rho$$

$$¿\Downarrow?$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Sf|^p\, w \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}^* f|^p\, w \qquad w \in A_p^\rho, \quad p > 1$$

Obs:
- $\mathcal{T}^* : L^1(w) \not\longrightarrow L^1(w), \quad w \in A_1^\rho.$

Motivación:

$$S : H^1_{\mathcal{L}}(w) \longrightarrow L^1(w), \qquad w \in A^{\rho}_1$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Sf|\, w \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}^* f|\, w, \qquad w \in A^{\rho}_1$$

¿ $\Downarrow$?

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Sf|^p\, w \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}^* f|^p\, w \qquad w \in A^{\rho}_p, \quad p > 1$$

Obs:

- $\mathcal{T}^* : L^1(w) \not\longrightarrow L^1(w), \quad w \in A^{\rho}_1.$
- $\mathcal{T}^* : L^p(w) \longrightarrow L^p(w), \quad \forall\, p > 1, \ \forall\, w \in A^{\rho}_p.$

Motivación:

$$S : H^1_{\mathcal{L}}(w) \longrightarrow L^1(w), \qquad w \in A_1^\rho$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Sf|\, w \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}^* f|\, w, \qquad w \in A_1^\rho$$

$$¿\Downarrow?$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Sf|^p\, w \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}^* f|^p\, w \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p\, w, \qquad w \in A_p^\rho, \ \ p > 1$$

Obs:
- $\mathcal{T}^* : L^1(w) \not\longrightarrow L^1(w), \quad w \in A_1^\rho.$
- $\mathcal{T}^* : L^p(w) \longrightarrow L^p(w), \quad \forall\, p > 1, \ \forall\, w \in A_p^\rho.$

Teorema

Sea $1 < s \leqslant \infty$.

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Sf|\, w \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |Tf|\, w, \qquad \forall\, w \ \textit{tal que}\ w^{s'} \in A_1^{\rho}.$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Sf|^p\, w \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |Tf|^p\, w, \qquad \begin{array}{c} \forall\, 1 < p < s, \\ \forall\, w \ \textit{tal que}\ w^{-\frac{1}{p-1}} \in A^{\rho}_{p'/s'}. \end{array}$$

Teorema

Sea $1 < s \leqslant \infty$.

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Sf|\, w \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |Tf|\, w, \qquad \forall\, w \textit{ tal que } w^{s'} \in A_1^{\rho}.$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Sf|^p\, w \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |Tf|^p\, w, \qquad \begin{array}{c} \forall\, 1 < p < s, \\ \forall\, w \textit{ tal que } w^{-\frac{1}{p-1}} \in A^{\rho}_{p'/s'}. \end{array}$$

Corolario

Sea $1 < s \leqslant \infty$.

$$S : H^1_{\mathcal{L}}(w) \longrightarrow L^1(w), \qquad \forall\, w \text{ tal que } w^{s'} \in A_1^{\rho}.$$

$$\Downarrow$$

$$S : L^p(w) \longrightarrow L^p(w), \qquad \begin{array}{c} \forall\, 1 < p < s, \\ \forall\, w \text{ tal que } w^{-\frac{1}{p-1}} \in A^{\rho}_{p'/s'}. \end{array}$$

COMPARACIÓN DE OPERADORES

Comparación

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)\, dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^p w(x)\, dx.$$

- T operador con cierta singularidad (e.j., un operador integral singular).
- S operador en principio más manejable (e.j., operador maximal).
- w en una cierta clase de pesos.

Comparación

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)\, dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^p w(x)\, dx.$$

- T operador con cierta singularidad (e.j., un operador integral singular).
- S operador en principio más manejable (e.j., operador maximal).
- w en una cierta clase de pesos.

Ejemplos

Para $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty = \bigcup_{p \geqslant 1} A_p$,

1. $$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf|^p w\, dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} (Mf)^p w\, dx,$$ [C-F, '72]
2. $$\int_{\mathbb{R}^d} (Mf)^p w\, dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} (M^\# f)^p w\, dx,$$ [F-S, '72]
3. $$\int_{\mathbb{R}^d} |I_\alpha f|^p w\, dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} (M_\alpha f)^p w\, dx,$$ [M-W, '74]

Método clásico: desigualdades de tipo good-λ.

- Nueva técnica: desarrollada por [CMP, 04'] basada en tres ingredientes
  1. Una desigualdad bastante general debido a A. Lerner.

     $$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)w(x)\,dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} M^{\#} f(x) Mw(x)\,dx, \qquad f \geqslant 0.$$

  2. Estimaciones puntuales para la función maximal sharp de Tf.

     $$M^{\#}(|Tf|^q)(x) \leqslant C[Mf(x)]^q, \qquad q \in (0, q_0),$$

  3. Extrapolación.

- Nueva técnica: desarrollada por [CMP, 04'] basada en tres ingredientes
  1. Una desigualdad bastante general debido a A. Lerner.

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)w(x)\,dx \leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} M^{\#}f(x)Mw(x)\,dx, \qquad f \geqslant 0.$$

  2. Estimaciones puntuales para la función maximal sharp de Tf.

$$M^{\#}(|Tf|^q)(x) \leqslant C[Mf(x)]^q, \qquad q \in (0, q_0),$$

  3. Extrapolación.

- Esquema:
  1. Para $w \in A_1$ y $0 < q < q_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf|^q w\,dx$$

- Nueva técnica: desarrollada por [CMP, 04'] basada en tres ingredientes
  1. Una desigualdad bastante general debido a A. Lerner.
     $$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)w(x)\,dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} M^{\#}f(x)Mw(x)\,dx, \qquad f \geqslant 0.$$
  2. Estimaciones puntuales para la función maximal sharp de Tf.
     $$M^{\#}(|Tf|^q)(x) \leqslant C[Mf(x)]^q, \qquad q \in (0, q_0),$$
  3. Extrapolación.

- Esquema:
  1. Para $w \in A_1$ y $0 < q < q_0$,
     $$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf|^q w\,dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} M^{\#}(|Tf|^q)Mw\,dx$$

Comparación

- Nueva técnica: desarrollada por [CMP, 04'] basada en tres ingredientes
  1. Una desigualdad bastante general debido a A. Lerner.

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)w(x)\,dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} M^{\#} f(x) M w(x)\,dx, \qquad f \geqslant 0.$$

  2. Estimaciones puntuales para la función maximal sharp de Tf.

$$M^{\#}(|Tf|^q)(x) \leqslant C[Mf(x)]^q, \qquad q \in (0, q_0),$$

  3. Extrapolación.

- Esquema:
  1. Para $w \in A_1$ y $0 < q < q_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf|^q w\,dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} M^{\#}(|Tf|^q) M w\,dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |Mf|^q w\,dx.$$

- Nueva técnica: desarrollada por [CMP, 04'] basada en tres ingredientes
  1. Una desigualdad bastante general debido a A. Lerner.

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)w(x)\,dx \leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} M^{\#}f(x)Mw(x)\,dx, \qquad f \geqslant 0.$$

  2. Estimaciones puntuales para la función maximal sharp de Tf.

$$M^{\#}(|Tf|^q)(x) \leqslant C[Mf(x)]^q, \qquad q \in (0, q_0),$$

  3. Extrapolación.

- Esquema:
  1. Para $w \in A_1$ y $0 < q < q_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf|^q w\,dx \leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} M^{\#}(|Tf|^q)Mw\,dx \leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} |Mf|^q w\,dx.$$

  2. Extrapolación $\Longrightarrow$ $\|Tf\|_{L^p(w)} \lesssim \|Mf\|_{L^p(w)}, \quad \forall\, p > 0$ y $\forall\, w \in A_\infty$.

$\mathcal{B}_\rho = \{B(y,r):\ y \in \mathbb{R}^d,\ r \leqslant \rho(y)\}$ es una base de Muckenhoupt

$$\mathcal{B}_\rho = \{B(y,r): \ y \in \mathbb{R}^d, \ r \leqslant \rho(y)\}$$ es una base de Muckenhoupt

- Maximal local:

$$M_\rho^{\mathrm{loc}} f(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}_\rho, B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| \, dy.$$

$$\mathcal{B}_\rho = \{B(y,r): \ y \in \mathbb{R}^d, \ r \leqslant \rho(y)\}$$ es una base de Muckenhoupt

- Maximal local:

$$M_\rho^{\mathrm{loc}} f(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}_\rho, B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| \, dy.$$

- Pesos Locales: $A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}} = \bigcup_{p \geqslant 1} A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$,

  - $w \in A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$: $$\left(\fint_B w \right)^{1/p} \left(\fint_B w^{1-p'} \right)^{1/p'} \leqslant C, \quad \forall B \in \mathcal{B}_\rho.$$
  - $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$: $$\fint_B w \leqslant C \inf_B w \quad \forall B \in \mathcal{B}_\rho.$$
  - $A_p \subsetneq A_p^\rho \subsetneq A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$.

$$\mathcal{B}_\rho = \{B(y,r) : \ y \in \mathbb{R}^d, \ r \leqslant \rho(y)\} \text{ es una base de Muckenhoupt}$$

- Maximal local:

$$M_\rho^{\mathrm{loc}} f(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}_\rho, B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| \, dy.$$

- Pesos Locales: $A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}} = \bigcup_{p \geqslant 1} A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$,
  - $w \in A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$: $$\left(\fint_B w \right)^{1/p} \left(\fint_B w^{1-p'} \right)^{1/p'} \leqslant C, \quad \forall B \in \mathcal{B}_\rho.$$
  - $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$: $$\fint_B w \leqslant C \inf_B w \quad \forall B \in \mathcal{B}_\rho.$$
  - $A_p \subsetneq A_p^\rho \subsetneq A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$.

- Acotación:

$$M_\rho^{\mathrm{loc}} : L^p(w) \to L^p(w) \ \text{ para } \ w \in A_p^{\rho,\mathrm{loc}}, \quad p > 1.$$

Teorema [CMP, 04']

Supongamos que para algún q_0, $0 < q_0 < \infty$, y para todo $0 < q < q_0$ y $w \in A_1^{\mathrm{loc}}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^q w(x)\, dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^q w(x)\, dx.$$

Entonces, para todo $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty^{\mathrm{loc}}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)\, dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^p w(x)\, dx.$$

Además, para todo p y γ tales que $0 < p, \gamma < \infty$, y todo $w \in A_\infty^{\mathrm{loc}}$, se cumple

$$\left\| \left(\sum_i |Tf_i|^\gamma \right)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)} \leqslant C \left\| \left(\sum_i |Sf_i|^\gamma \right)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)}.$$

Desigualdad de Lerner asociada a ρ (Ingrediente 1)

Teorema

$f, w \geqslant 0$ y $f, w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, w(x)\, dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} M_\rho^{\#} f(x)\, M_\rho^{\mathrm{loc}} w(x)\, dx.$$

Desigualdad de Lerner asociada a ρ (Ingrediente 1)

Teorema

$f, w \geqslant 0$ y $f, w \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, w(x)\, dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} M_\rho^{\#} f(x)\, M_\rho^{\text{loc}} w(x)\, dx.$$

$$M_\rho^{\sharp} f(x) = \sup_{x \in B \in \mathcal{B}_\rho} \fint_B |f - f_B| \quad + \quad \sup_{x \in B = B(y, \rho(y))} \fint_B |f|.$$

$$M_\rho^{\text{loc}} f(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}_\rho, B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f|.$$

Teorema

- $0 < p < \infty$ y $1 < s \leqslant \infty$.
- T de tipo débil (s', s') con núcleo K en $\mathcal{S}_\rho(s)$.

Teorema

- $0 < p < \infty$ y $1 < s \leqslant \infty$.
- T de tipo débil (s', s') con núcleo K en $\mathcal{S}_\rho(s)$.

Entonces para cualquier $\theta > 0$ existe una constante C_θ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf|^p w\,dx \leqslant C_\theta \int_{\mathbb{R}^d} |M^\theta_{\rho,s'} f|^p w\,dx.$$

Además, para todo $0 < r < \infty$:

$$\left\| \left(\sum_i |Tf_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \leqslant C_\theta \left\| \left(\sum_i |M^\theta_{\rho,s'} f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)}.$$

Teorema

- $0 < p < \infty$ y $1 < s \leqslant \infty$.
- T de tipo débil (s', s') con núcleo K en $\mathcal{S}_\rho(s)$.

Entonces para cualquier $\theta > 0$ existe una constante C_θ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf|^p w\, dx \leqslant C_\theta \int_{\mathbb{R}^d} |M^{\theta}_{\rho,s'} f|^p w\, dx.$$

Además, para todo $0 < r < \infty$:

$$\left\| \left(\sum_i |Tf_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \leqslant C_\theta \left\| \left(\sum_i |M^{\theta}_{\rho,s'} f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)}.$$

- $w \in A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$.
- $M^{\theta}_{\rho,s'} f(x) = \sup_{r>0} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)} \right)^{-\theta} \left(⨍_{B(x,r)} |f|^{s'} \right)^{1/s'}$.

$$[b,T]f = b\,Tf \;-\; T(bf).$$

$$[b,T]f = b\,Tf \; - \; T(bf).$$

Teorema

- $0 < p < \infty$ y $1 < s \leqslant \infty$.
- T de tipo débil (s', s') con núcleo K en $\mathcal{S}_\rho(s)$.

$$[b,T]f = b\,Tf \;-\; T(bf).$$

Teorema

- $0 < p < \infty$ y $1 < s \leqslant \infty$.
- T de tipo débil (s', s') con núcleo K en $\mathcal{S}_\rho(s)$.

Entonces para cualquier $\theta > 0$ existe una constante C_θ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |[b,T]f|^p w\,dx \leqslant C_\theta \int_{\mathbb{R}^d} |M^{\theta}_{\rho,\psi_{s'}} f|^p w\,dx.$$

$$[b,T]f = b\,Tf \;-\; T(bf).$$

Teorema

- $0 < p < \infty$ y $1 < s \leqslant \infty$.
- T de tipo débil (s', s') con núcleo K en $\mathcal{S}_\rho(s)$.

Entonces para cualquier $\theta > 0$ existe una constante C_θ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |[b,T]f|^p w\,dx \leqslant C_\theta \int_{\mathbb{R}^d} |M^{\theta}_{\rho,\psi_{s'}} f|^p w\,dx.$$

- $w \in A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$.
- $M^{\theta}_{\rho,\psi_{s'}} f(x) = \sup_{r>0} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{-\theta} \| f \|_{\psi_{s'},B(x,r)}, \qquad \psi_{s'}(t) = t^{s'} \log(1+t)^{s'}.$
- $b \in BMO_\rho^\infty$, i.e. $\exists \sigma > 0$:

$$\fint_B |b(y) - b_B| dy \leqslant C \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\sigma}, \qquad \forall\, B = B(x,r) \subset \mathbb{R}^d.$$

Desigualdades puntuales (ingrediente 2)

Teorema

- $0 < p < \infty$ *y* $1 < s \leqslant \infty$.
- T *de tipo débil* (s', s') *con núcleo* K *en* $\mathcal{S}_\rho(s)$.

Entonces para cualquier $\theta > 0$ *existe una constante* C_θ *tal que*

- *Para* $0 < q < 1$,

$$M_\rho^\sharp(|Tf|^q)(x) \leqslant C_\theta \left[M_{\rho,s'}^\theta f(x) \right]^q.$$

- *Para* $q < \epsilon$,

$$M_\rho^\sharp(|[b,T]f|^q)(x) \leqslant C_\theta \left\{ \left[M_\rho^{\mathrm{loc}}(Tf)^\epsilon(x) \right]^{1/\epsilon} \; + \; M_{\rho,\psi_{s'}}^\sigma f(x) \right\}^q.$$

Aplicación en el contexto Schrödinger

Sea $V \in RH_q, \; q > d/2.$

$T_0 = \mathcal{L}^{i\eta}, \mathcal{R}, \mathcal{R}^*(q \geqslant d).$

$T_1 = \mathcal{L}^{-1/2}V^{1/2}, \; T_2 = \mathcal{L}^{-1}V, \; T_3 = \mathcal{R}^*(q < d).$

Sea $V \in RH_q$, $q > d/2$.

$T_0 = \mathcal{L}^{i\eta}, \mathcal{R}, \mathcal{R}^*(q \geqslant d)$.

$T_1 = \mathcal{L}^{-1/2}V^{1/2}$, $T_2 = \mathcal{L}^{-1}V$, $T_3 = \mathcal{R}^*(q < d)$.

- $T_0 \quad \prec \quad \{M_\rho^\theta\}_{\theta>0}$

- $T_i \quad \prec \quad \{M_{\rho,s_i'}^\theta\}_{\theta>0}$

$$\{M_{\rho,s_i'}^\theta\}_{\theta>0} \longrightarrow \begin{cases} s_1 = 2q \\ s_2 = q \\ \dfrac{1}{s_3} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{d} \end{cases}$$

Sea $V \in RH_q, \;\; q > d/2.$

$T_0 = \mathcal{L}^{i\eta}, \mathcal{R}, \mathcal{R}^*(q \geqslant d).$

$T_1 = \mathcal{L}^{-1/2}V^{1/2}, \;\; T_2 = \mathcal{L}^{-1}V, \;\; T_3 = \mathcal{R}^*(q < d).$

- $T_0 \quad \prec \quad \{M_\rho^\theta\}_{\theta>0}$

- $$T_i \quad \prec \quad \{M^\theta_{\rho,s_i'}\}_{\theta>0} \begin{array}{l} \nearrow \; s_1 = 2q \\ \longrightarrow \; s_2 = q \\ \searrow \; \frac{1}{s_3} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d} \end{array}$$

- $[b, T_0] \quad \prec \quad \{M^\theta_{\rho,\psi}\}_{\theta>0}, \qquad \psi(t) = t\log(1+t)$

- $[b, T_i] \quad \prec \quad \{M^\theta_{\rho,\psi_{s_i'}}\}_{\theta>0}, \qquad \psi_{s_i'}(t) = t^{s_i'}\log(1+t)^{s_i'}$

B. Bongioanni, E. Harboure, and O. Salinas.
Classes of weights related to Schrödinger operators.
J. Math. Anal. Appl., 373(2): 563–579, 2011.

R. R. Coifman and C. Fefferman.
Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals.
Studia Math., 51:241–250, 1974.

D. Cruz-Uribe, J. M. Martell, and C. Pérez.
Extrapolation from A_∞ weights and applications.
J. Funct. Anal., 213(2):412–439, 2004.

J. Dziubański, and G. Garrigós, and T. Martínez, and J.L. Torrea, and J. Zienkiewicz.
BMO spaces related to Schrödinger operators with potentials satisfying a reverse Hölder inequality.
Math. Z., 249(2): 329–356, 2005.

J. Dziubański and J. Zienkiewicz.
Hardy spaces H^1 associated to Schrödinger operators with potential satisfying reverse Hölder inequality.
Revista Matemática Iberoamericana, 15(2): 279–296, 1999.

C. Fefferman and E. M. Stein.
H^p spaces of several variables.
Acta Math., 129(3-4):137–193, 1972.

Z. Guo, P. Li, and L. Peng.
L^p boundedness of commutators of Riesz transforms associated to Schrödinger operator.
J. Math. Anal. Appl., 341(1):421–432, 2008.

H. Liu, L. Tang and H. Zhu.
Weighted Hardy spaces and BMO spaces associated with Schrödinger operators.
Math. Nachr., 285(17-18): 2173–2207, 2012.

Benjamin Muckenhoupt and Richard Wheeden.
Weighted norm inequalities for fractional integrals.
Trans. Amer. Math. Soc., 192:261–274, 1974.

Z. Shen.
On the Neumann problem for Schrödinger operators in Lipschitz domains potentials.
Indiana Univ. Math. J., 43(1): 143–176, 1994.

Z. Shen.
L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials.
Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 45(2): 513–546, 1995.