ANÁLISIS DE PERTURBACIONES DEL SISTEMA DE HAAR

Autor:
WILFREDO ARIEL RAMOS
Director:
Dr. Hugo A. Aimar
Codirectora:
Dra. Gladis G. Pradolini

Santa Fe - Argentina

2014

LEMA

Lema de Cotlar. Sea $\{T_i\}$ *una sucesión de operadores lineales y continuos sobre un espacio de Hilbert* H. *Supongamos que existe* $s : \mathbb{Z} \to (0, \infty)$ *tal que* $\sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k)^{\frac{1}{2}} = A < \infty$, *y*

$$\|T_i^* T_j\| \leq s(i-j) \qquad y \qquad \left\|T_i T_j^*\right\| \leq s(i-j).$$

Entonces

$$\left\|\sum_{i=-N}^{N} T_i\right\| \leq A,$$

para todo $N \in \mathbb{N}$.

El lema de Schur es una extensión de la desigualdad de Young en contextos no invariantes por traslaciones.

Lema

(Lema de Schur) Sean (X,μ) *e* (Y,ν) *dos espacios de medida* σ*-finita. Sea* $K : X \times Y \to \mathbb{R}$*, tal que*

A) $\int_X |K(x,y)|\, d\mu(x) < M$ *c.t.p* $y \in Y$,

B) $\int_Y |K(x,y)|\, d\nu(y) < M$ *c.t.p* $x \in X$,

para alguna constante $M > 0$*. Entonces el operador* Υ, $1 < p < \infty$ *definido por*

$$\Upsilon g(x) = \int_Y K(x,y) g(y) d\nu(y)$$

está acotado de $L^p(Y,\nu)$ *en* $L^p(X,\mu)$ *y además* $\|\Upsilon\| \leq M$.

DEFINICIÓN

Si $1 < p < \infty$, A_p*:*

$$\left(\int_Q w\right)\left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq C\,|Q|^p \;\; \forall Q \subset \mathbb{R}^n$$

A_1*:*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)\,dy \leq c \; \underset{Q}{inf.ess}\; w(y) \;\forall Q \subset \mathbb{R}^n.$$

$A_\infty := \bigcup_{p\geq 1} A_p$.

Definición

Marco

Una sucesión $\{f_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *de elementos de un espacio de Hilbert* H *es un marco para* H *si existen constantes* $A, B > 0$ *tales que*

$$A\,\|f\|_H^2 \leq \sum_k |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\,\|f\|_H^2 \qquad \textit{para toda } f \in H. \tag{1}$$

Definición

Sucesión de Bessel

Si cumple la desigualdad de la derecha en la definición de Marco.

Definición

Base de Riesz

Si es un marco exacto.

TEOREMA

Teorema de estabilidad de Favier-Zalik de bases de Riesz.

Teorema

Teorema de estabilidad de Favier-Zalik de bases de Riesz.

- H *un espacio de Hilbert*

TEOREMA

Teorema de estabilidad de Favier-Zalik de bases de Riesz.

- *H un espacio de Hilbert,*
- *$\{f_n\}$ Base de Riesz en H con cotas A y B,*

Teorema

Teorema de estabilidad de Favier-Zalik de bases de Riesz.

- *H un espacio de Hilbert,*
- *$\{f_n\}$ Base de Riesz en H con cotas A y B,*
- *$\{g_n\}$ sucesión (perturbadas) en H tal que $\{f_n - g_n\}$ (perturbaciones) es una sucesión de Bessel en H con cota $M < A$.*

TEOREMA

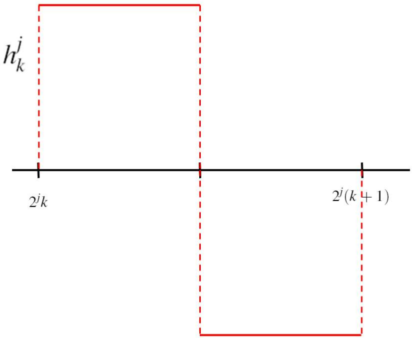
Teorema de estabilidad de Favier-Zalik de bases de Riesz.

- *H un espacio de Hilbert,*
- *$\{f_n\}$ Base de Riesz en H con cotas A y B,*
- *$\{g_n\}$ sucesión (perturbadas) en H tal que $\{f_n - g_n\}$ (perturbaciones) es una sucesión de Bessel en H con cota $M < A$.*

entonces $\{g_n\}$ es una base de Riesz en H con cotas $[1 - \left(\frac{M}{A}\right)^{\frac{1}{2}}]^2 A$ y $[1 + \left(\frac{M}{B}\right)^{\frac{1}{2}}]^2 B$.

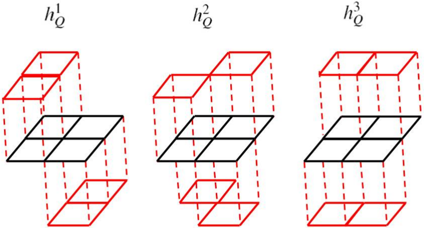
Sistemas de Wavelets de Haar en $(\mathbb{R}^n, dx)$:

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}) := \{h_k^j := 2^{j/2} h(2^j x - k)\}$$



Sistemas de Wavelets de Haar en $(\mathbb{R}^n, dx)$:

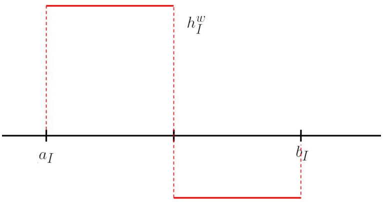
$$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) := \{h_Q^m,\ Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ m = 1, ..., 2^n - 1\}$$



Sistemas de Wavelets de Haar en $(\mathbb{R}^n, wdx)$:

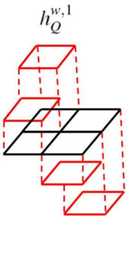
$$\mathcal{H}^w(\mathbb{R}) := \{h_I^w,\ I \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$$

$$h_I^w(x) = \frac{1}{\sqrt{w(I)}}\left\{\sqrt{\frac{w(I_r)}{w(I_l)}}\chi_{I_l}(x) - \sqrt{\frac{w(I_l)}{w(I_r)}}\chi_{I_r}(x)\right\}. \quad (1)$$



Sistemas de Wavelets de Haar en $(\mathbb{R}^n, wdx)$:

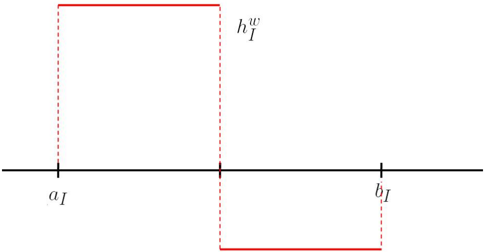
$$\mathcal{H}^w(\mathbb{R}^n) := \{h_Q^{w,m},\ Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ m = 1, ..., 2^n - 1\}$$



Estabilidad de Bases de Haar desbalanceadas por pesos de Muckenhoupt

Si $w \in A_\infty$

$$h_I^w(x) = \frac{1}{\sqrt{w(I)}} \left\{ \sqrt{\frac{w(I_r)}{w(I_l)}} \chi_{I_l}(x) - \sqrt{\frac{w(I_l)}{w(I_r)}} \chi_{I_r}(x) \right\}. \tag{1}$$

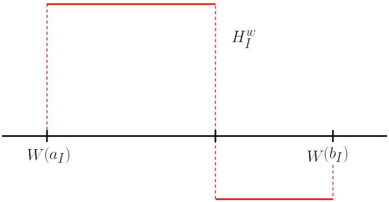


Estabilidad de Bases de Haar desbalanceadas por pesos de Muckenhoupt

$\mathcal{H}^w := \{h_I^w,\ I \in \mathcal{D}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}, wdx)$

Si $W(x) = \int_0^x w(y)dy$ y $H_I^w = h_I^w \circ W^{-1}$.

$$H_I^w(x) = \frac{1}{\sqrt{|I'|}} \left\{ \sqrt{\frac{|I'_r|}{|I'_l|}} \chi_{I'_l}(x) - \sqrt{\frac{|I'_l|}{|I'_r|}} \chi_{I'_r}(x) \right\} \tag{1}$$

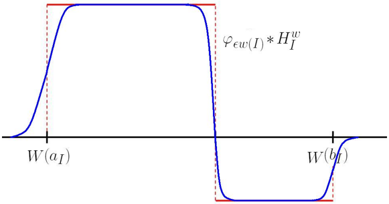


entonces la familia $\{H_I^w,\ I \in \mathcal{D}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$

Estabilidad de Bases de Haar desbalanceadas por pesos de Muckenhoupt

Dada $\varphi \in C^\infty$

$$H_I^{w,\epsilon}(x) = \left(\varphi_{\epsilon w(I)} * H_I^w\right)(x) \tag{1}$$



probamos que $\mathcal{H}^\epsilon = \{H_I^{w,\epsilon},\ I \in \mathcal{D}\}$ es una Base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$.

Claves de la Demostración

- $b_J^\epsilon = H_J^w - H_J^{w,\epsilon}$,
- $Tf = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{J\in\mathcal{D}^j} \langle f, b_J^\epsilon\rangle H_J^w = \sum_{j\in\mathbb{Z}} T_j f$,
- $\left\|T_i^* T_j\right\|$, $\left\|T_i T_j^*\right\|$

Claves de la Demostración

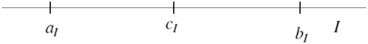
$$\left\|T_i T_j^* f\right\|^2 = \sum_{I\in\mathcal{D}^i}\left(\sum_{J\in\mathcal{D}^j}\langle f, H_J^w\rangle\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon\rangle\right)^2$$

Claves de la Demostración

$$\left\|T_i T_j^* f\right\|^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle \right)^2$$

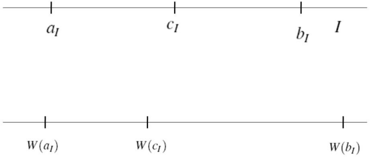
Claves de la Demostración

$$\left\| T_i T_j^* f \right\|^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle \right)^2$$



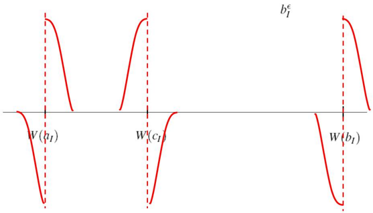
Claves de la Demostración

$$\left\|T_i T_j^* f\right\|^2 = \sum_{I\in\mathcal{D}^i}\left(\sum_{J\in\mathcal{D}^j}\langle f, H_J^w\rangle\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon\rangle\right)^2$$



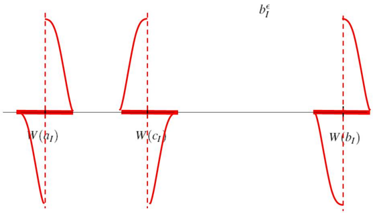
Claves de la Demostración

$$\left\| T_i T_j^* f \right\|^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle \right)^2$$



Claves de la Demostración

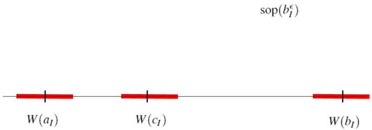
$$\left\|T_i T_j^* f\right\|^2 = \sum_{I\in\mathcal{D}^i}\left(\sum_{J\in\mathcal{D}^j}\langle f, H_J^w\rangle\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon\rangle\right)^2$$



Estabilidad de Bases de Haar desbalanceadas por pesos de Muckenhoupt

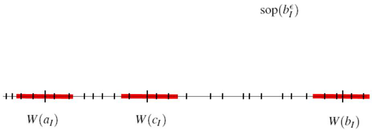
Claves de la Demostración

$$\left\|T_i T_j^* f\right\|^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle \right)^2$$



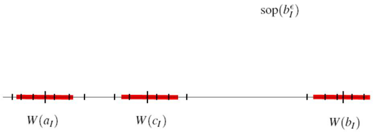
Claves de la Demostración

$$\left\|T_i T_j^* f\right\|^2 = \sum_{I\in\mathcal{D}^i}\left(\sum_{J\in\mathcal{D}^j}\langle f, H_J^w\rangle\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon\rangle\right)^2$$

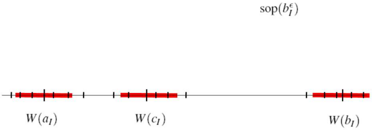


Claves de la Demostración

$$\left\|T_i T_j^* f\right\|^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle \right)^2$$



Claves de la Demostración



$$\int_{W^\epsilon(J)} b_J^\epsilon(x) b_I^\epsilon(x) dx = \int_{W^\epsilon(J)} b_J^\epsilon(x) \left(b_I^\epsilon(x) - b_I^\epsilon(y)\right) dx$$

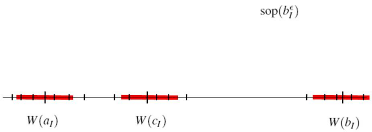
Claves de la Demostración

$$\sum_{J\in\mathcal{B}} |\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon\rangle|^2 = \sum_{J\in\mathcal{B}} \left| \sum_{m=1}^{3} \int_{S_J^{\epsilon,m}} b_J^\epsilon(x)\,(b_I^\epsilon(x) - b_I^\epsilon(x_J^m))\,dx \right|^2$$

$$\leq \sum_{J\in\mathcal{B}} \frac{C}{\epsilon^2 w(I)^3} \left(\sum_{m=1}^{3} \int_{S_J^{\epsilon,m}} |b_J^\epsilon(x)|\,|x - x_J^m|\,dx \right)^2$$

$$\leq C \sum_{I\in\mathcal{B}} \frac{1}{\epsilon^2 w(I)^3} \, |S_J^\epsilon|^2 \, \frac{1}{w(J)} \epsilon^2 w(J)^2$$

Claves de la Demostración

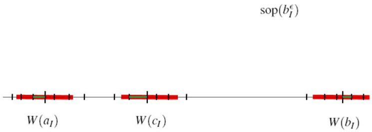


Entonces

$$\sum_{J\in B} |\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon\rangle|^2 \leq \epsilon^2 \sum_{J\in B} \left(\frac{w(J)}{w(I)}\right)^3 \leq c\epsilon^2 (1/2)^{2\gamma(j-i)}$$

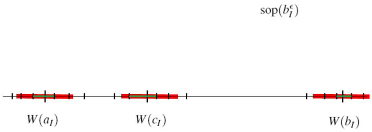
Claves de la Demostración

$$\left\|T_i T_j^* f\right\|^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle \right)^2$$



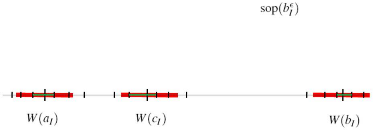
Claves de la Demostración

$$\left\|T_i T_j^* f\right\|^2 = \sum_{I\in\mathcal{D}^i}\left(\sum_{J\in\mathcal{D}^j}\langle f, H_J^w\rangle\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon\rangle\right)^2$$



Estabilidad de Bases de Haar desbalanceadas por pesos de Muckenhoupt

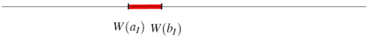
Claves de la Demostración



$$\sum_{J\in C} |\langle b_J^\epsilon, b_I^\epsilon\rangle|^2 \leq c\epsilon^2 \frac{w(J)}{w(I)} \leq c\epsilon^2 (1/2)^{\gamma(j-i)}$$

Claves de la Demostración

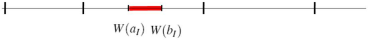
$$\left\|T_i T_j^* f\right\|^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle \right)^2$$



Estabilidad de Bases de Haar desbalanceadas por pesos de Muckenhoupt

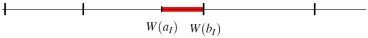
Claves de la Demostración

$$\left\|T_i T_j^* f\right\|^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle \right)^2$$



Claves de la Demostración

$$\left\|T_i T_j^* f\right\|^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle \right)^2$$



Claves de la Demostración

$$\left\|T_iT_j^*f\right\|^2 = \sum_{I\in\mathcal{D}^i}\left(\sum_{J\in\mathcal{D}^j}\langle f, H_J^w\rangle\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon\rangle\right)^2 \leq c\epsilon^2(1/2)^{\gamma|i-j|}$$

Claves de la Demostración

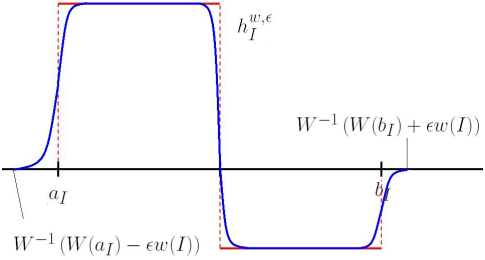
$$\left\|T_i T_j^* f\right\|^2 = \sum_{I\in\mathcal{D}^i}\left(\sum_{J\in\mathcal{D}^j}\langle f, H_J^w\rangle\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon\rangle\right)^2 \le c\epsilon^2(1/2)^{\gamma|i-j|}$$

por lo tanto $\{H_J^{w,\epsilon}\}$ es una base de Riesz en $L^2(\mathbb{R})$ con cotas $(1 \pm \sqrt{c\epsilon^{1/2}})^2$.

Finalmente, sea

$$h_I^{w,\epsilon}(x) = \left(H_I^{w,\epsilon} \circ W\right)(x) \tag{1}$$

para ϵ lo suficientemente pequeño y positivo.



Estabilidad de Bases de Haar desbalanceadas por pesos de Muckenhoupt

Teorema

Sea w un peso en la clase $A_\infty(\mathbb{R})$. Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ dependiendo sólo de w tal que

A) *para cada $\epsilon < \epsilon_0$, el sistema $\{h_I^{w,\epsilon}. I \in \mathcal{D}\}$ es una base de Riesz para $L^2(wdx)$ de funciones absolutamente continuas,*

B) *las cotas Riesz de $\{h_I^{w,\epsilon},\ I \in \mathcal{D}\}$ pueden resultar tan cercanas a uno como se desee tomando ϵ lo suficientemente pequeño,*

C) *el soporte de cada $h_I^{w,\epsilon}$ es un intervalo $I^\epsilon = [a_I^\epsilon, b_I^\epsilon]$. Además $a_I^\epsilon \nearrow a_I$, $b_I^\epsilon \searrow b_I$ cuando $\epsilon \to 0$ y $0 < \frac{|I^\epsilon|}{|I|} - 1 < C\epsilon^{\frac{1}{p}}$ si $w \in A_p$ para alguna constante C.*

Diremos que $w \in A_{\infty}^{\text{v.s}}(\mathbb{R}^n)$ sii $w(x) = w(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} w_i(x_i)$, donde $w_i \in A_{\infty}(\mathbb{R})$.

Caso “ multiparamétrico”

TEOREMA

- $\{\psi_l^{(1)}\}$ *base de Riesz en* $L^2(\mathbb{R}, w_1 dx)$ *con cotas* A_1 *y* B_1*,*

Caso “ multiparamétrico”

TEOREMA

- $\{\psi_l^{(1)}\}$ *base de Riesz en* $L^2(\mathbb{R}, w_1 dx)$ *con cotas* A_1 *y* B_1*,*
- $\{\psi_l^{(2)}\}$ *base de Riesz en* $L^2(\mathbb{R}, w_2 dx)$ *con cotas* A_2 *y* B_2*,*

Caso “ multiparamétrico”

TEOREMA

- $\{\psi_l^{(1)}\}$ *base de Riesz en* $L^2(\mathbb{R}, w_1 dx)$ *con cotas* A_1 *y* B_1*,*
- $\{\psi_l^{(2)}\}$ *base de Riesz en* $L^2(\mathbb{R}, w_2 dx)$ *con cotas* A_2 *y* B_2*,*

  $\vdots$
- $\{\psi_l^{(n)}\}$ *base de Riesz en* $L^2(\mathbb{R}, w_n dx)$ *con cotas* A_n *y* B_n*,*

Caso “ multiparamétrico”

TEOREMA

- $\{\psi_l^{(1)}\}$ *base de Riesz en* $L^2(\mathbb{R}, w_1 dx)$ *con cotas* A_1 *y* B_1*,*
- $\{\psi_l^{(2)}\}$ *base de Riesz en* $L^2(\mathbb{R}, w_2 dx)$ *con cotas* A_2 *y* B_2*,*

  $\vdots$
- $\{\psi_l^{(n)}\}$ *base de Riesz en* $L^2(\mathbb{R}, w_n dx)$ *con cotas* A_n *y* B_n*,*
- *Si*

$$\psi_\lambda(x) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{l_i}^{(i)}(x_i).$$

Caso " multiparamétrico"

TEOREMA

- $\{\psi_l^{(1)}\}$ *base de Riesz en* $L^2(\mathbb{R}, w_1 dx)$ *con cotas* A_1 *y* B_1,
- $\{\psi_l^{(2)}\}$ *base de Riesz en* $L^2(\mathbb{R}, w_2 dx)$ *con cotas* A_2 *y* B_2,

  $\vdots$
- $\{\psi_l^{(n)}\}$ *base de Riesz en* $L^2(\mathbb{R}, w_n dx)$ *con cotas* A_n *y* B_n,
- *Si*

$$\psi_\lambda(x) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{l_i}^{(i)}(x_i).$$

Entonces $\{\psi_\lambda\}$ *es una base de Riesz sobre* $L^2(\mathbb{R}^n, w dx)$ *con cotas* $A = \prod_{i=1}^n A_i$ *y* $B := \prod_{i=1}^n B_i$.

Caso "multiparamétrico"

COROLARIO

Dado $\epsilon > 0$, sean w_i, con $i = 1, \dots, n$, pesos de Muckenhoupt pertenecientes a las clases $A_\infty(\mathbb{R})$. Sean $\{h_I^{w_i,\epsilon},\ I \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$, el sistema de Riesz en $L^2(\mathbb{R}, w_i dx_i)$. Dado $\vec{J} = (J_1, \dots, J_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^n$, sea

$$\psi_{\vec{J}}^{\epsilon} := \prod_{i=1}^{n} h_{J_i}^{w_i,\epsilon}.$$

Entonces el sistema $\{\psi_{\vec{J}}^{\epsilon},\ \vec{J} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^n\}$, es una base de Riesz sobre $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$, donde $w = \prod_{i=1}^n w_i$. Cada $\psi_{\vec{J}}^{\epsilon}$ es continua y tiene soporte compacto.

Caso "uniparamétrico"

Teorema

Dado $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeño, la familia de funciones* $\{\mathfrak{h}_Q^{w,\lambda,\epsilon}\}$ *es una base de Riesz de funciones continuas en* $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ *con cotas tan cercanas a uno y con soportes tan ajustados a los cubos diádicos como se quiera.*

Espacios de tipo Homogéneo

Espacios de tipo Homogéneo

DEFINICIÓN

Una casi-métrica sobre un conjunto X es una función $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ *tal que*

- $\rho(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$*;*
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ *para dodo* $x, y \in X$*;*
- *existe* $K > 1$ *tal que* $\rho(x, y) \leq K\left(\rho(x, z) + \rho(z, y)\right)$ *para todo* $x, y, z \in X$*.*

Espacios de tipo Homogéneo

Definición

Una casi-métrica sobre un conjunto X *es una función* $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ *tal que*

- $\rho(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$*;*
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ *para dodo* $x, y \in X$*;*
- *existe* $K > 1$ *tal que* $\rho(x, y) \leq K\,(\rho(x, z) + \rho(z, y))$ *para todo* $x, y, z \in X$*.*

Definición

Un espacio de tipo homogeneo (X, ρ, μ) *es un espacio casi-métrico con una medida* μ*, doblante respecto de la casi-métrica* ρ*, esto es, existe* $A > 0$ *tal que para todo* $r > 0$ *se verifica*

$$\mu(B_\rho(x, 2r)) \leq A\mu(B_\rho(x, r)) \ \ \textit{para todo } x \in X$$

Donde $B_\rho(x, r) := \{y \in X / \ \rho(x, y) < r\}$ es la bola de centro x y radio r.

Espacios de tipo Homogéneo

DEFINICIÓN

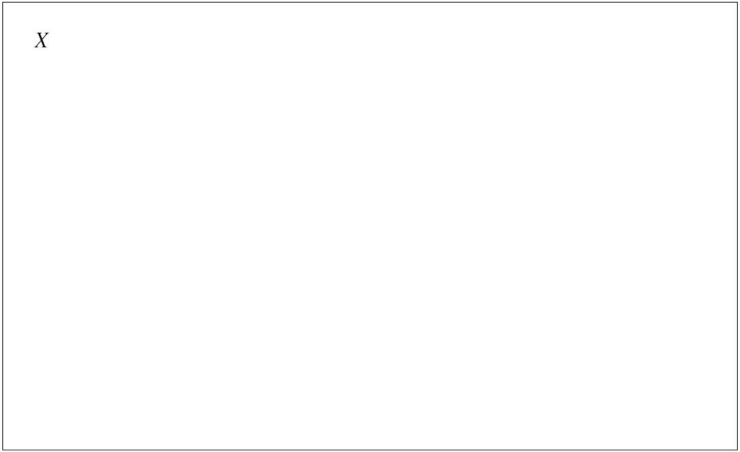
Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Diremos que X es α-Ahlfors si existen c_1 y c_2 constantes positivas tales que

$$c_1 r^\alpha \leq \mu\left(B(x,r)\right) \leq c_2 r^\alpha$$

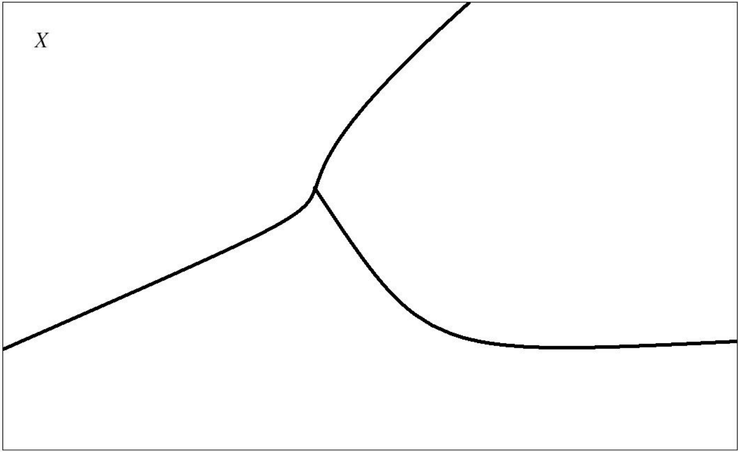
para cualquier $0 < r < diam X$, y todo $x \in X$.

Familias Diádicas

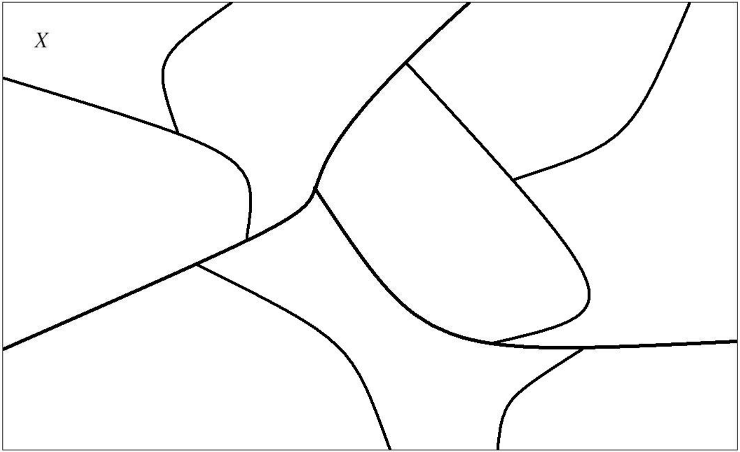
Familias Diádicas



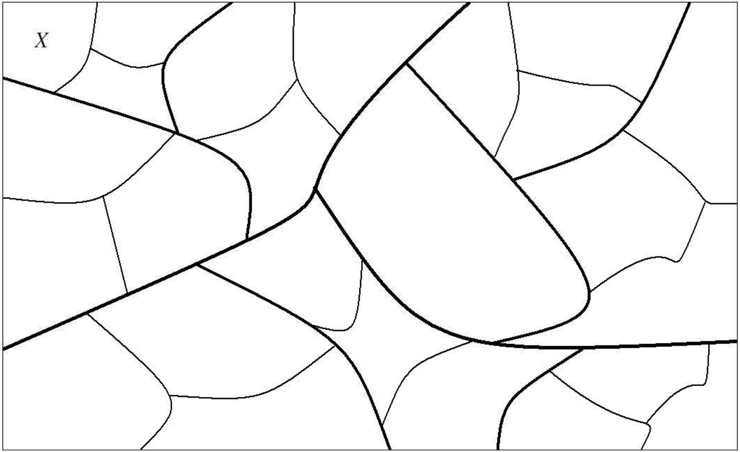
Familias Diádicas



Familias Diádicas



Familias Diádicas



Familias Diádicas

DEFINICIÓN

Decimos que $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ *es una familia diádica sobre* X *con parámetro* $\delta \in (0,1)$*, abreviadamente que* $\mathcal{D}$ *pertenece a* $\mathfrak{D}(\delta)$*, si cada* $\mathcal{D}^j$ *es una familia de conjuntos abiertos* Q *de* X*, tal que*

1. *si* $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}^j$*, distintos,* $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$*,*

Familias Diádicas

DEFINICIÓN

Decimos que $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ *es una familia diádica sobre* X *con parámetro* $\delta \in (0,1)$*, abreviadamente que* $\mathcal{D}$ *pertenece a* $\mathfrak{D}(\delta)$*, si cada* $\mathcal{D}^j$ *es una familia de conjuntos abiertos* Q *de* X*, tal que*

1. *si* $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}^j$*, distintos,* $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$*,*
2. $\mu(X \setminus \bigcup_{Q\in\mathcal{D}^j}) = 0$*,*

Familias Diádicas

Definición

Decimos que $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ es una familia diádica sobre X con parámetro $\delta \in (0,1)$, abreviadamente que $\mathcal{D}$ pertenece a $\mathfrak{D}(\delta)$, si cada $\mathcal{D}^j$ es una familia de conjuntos abiertos Q de X, tal que

1. *si $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}^j$, distintos, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$,*
2. $\mu(X \setminus \bigcup_{Q\in\mathcal{D}^j}) = 0$,
3. *Todo cubo $Q \in \mathcal{D}^i$ tiene un sólo padre $J \in \mathcal{D}^j$ ($Q \subset J$), $j < i$,*

Familias Diádicas

DEFINICIÓN

Decimos que $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ *es una familia diádica sobre* X *con parámetro* $\delta \in (0,1)$*, abreviadamente que* $\mathcal{D}$ *pertenece a* $\mathfrak{D}(\delta)$*, si cada* $\mathcal{D}^j$ *es una familia de conjuntos abiertos* Q *de* X*, tal que*

1. *si* $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}^j$*, distintos,* $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$*,*
2. $\mu(X \setminus \bigcup_{Q\in\mathcal{D}^j}) = 0$*,*
3. *Todo cubo* $Q \in \mathcal{D}^i$ *tiene un sólo padre* $J \in \mathcal{D}^j$ *(*$Q \subset J$*),* $j < i$*,*
4. $B(x, a_1\delta^j) \subseteq Q \subseteq B(x, a_2\delta^j)$.

Pesos de Muckenhoupt

Pesos de Muckenhoupt

DEFINICIÓN

(a) $1 < p < \infty$, A_p:

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B w d\mu\right)\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^p \leq C.\ \forall B \subset X$$

(b) A_1:

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_Q w d\mu \leq C \operatorname*{inf.ess}_{B}\ w,\ \forall B \subset X$$

(c)$A_\infty := \bigcup_{p\geq 1} A_p$.

Pesos de Muckenhoupt Diádicos

Pesos de Muckenhoupt Diádicos

Definición

Sea $\mathcal{D}(X) \in \mathfrak{D}(\delta)$ una familia de cubos diádicos en X.

- A_p^{dy}, $1 < p < \infty$,

$$\left(\int_Q \nu d\mu\right)\left(\int_Q \nu^{-\frac{1}{p-1}} d\mu\right)^{p-1} \leq C\mu(Q)^p, \qquad \forall Q \in \mathcal{D}$$

- $\nu \in A_1^{dy}$

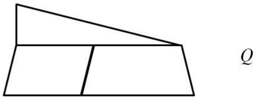
$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \nu d\mu \leq C \operatorname*{inf.ess}_Q \nu \; \forall Q \in \mathcal{D} \tag{1}$$

- $A_\infty^{dy} = \bigcup_{p\geq 1} A_p^{dy}$

Sistemas de Haar

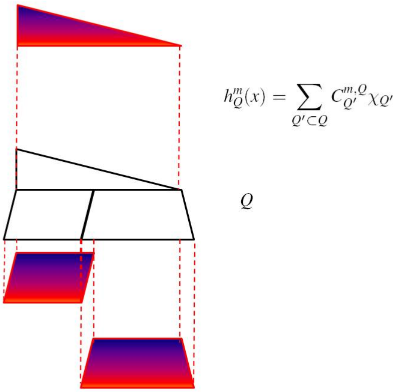
Sistemas de Haar

$$h_Q^m(x) = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{m,Q} \chi_{Q'}$$



Sistemas de Haar

$$h_Q^m(x) = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{m,Q} \chi_{Q'}$$



Sistemas de Haar

Trabajamos con una familia de funciones asociadas a una familia diádica $\mathcal{D}$, que cumple las siguientes propiedades:

Sistemas de Haar

Trabajamos con una familia de funciones asociadas a una familia diádica $\mathcal{D}$, que cumple las siguientes propiedades:

- Para cada $h \in \mathcal{H}$ existe una única $j \in \mathbb{Z}$ y un cubo $Q = Q(h) \in \mathcal{D}^j$ tal que $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subseteq Q$, y esta propiedad no se cumple para ningún cubo en $\mathcal{D}^{j+1}$.

Sistemas de Haar

Trabajamos con una familia de funciones asociadas a una familia diádica $\mathcal{D}$, que cumple las siguientes propiedades:

- Para cada $h \in \mathcal{H}$ existe una única $j \in \mathbb{Z}$ y un cubo $Q = Q(h) \in \mathcal{D}^j$ tal que $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subseteq Q$, y esta propiedad no se cumple para ningún cubo en $\mathcal{D}^{j+1}$.
- Para cualquier $Q \in \mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ existe exactamente $M_Q = \#(\mathcal{O}(Q)) - 1 \geq 1$ funciones $h \in \mathcal{H}$ tales que el primer item se cumple.

Sistemas de Haar
Trabajamos con una familia de funciones asociadas a una familia diádica $\mathcal{D}$, que cumple las siguientes propiedades:

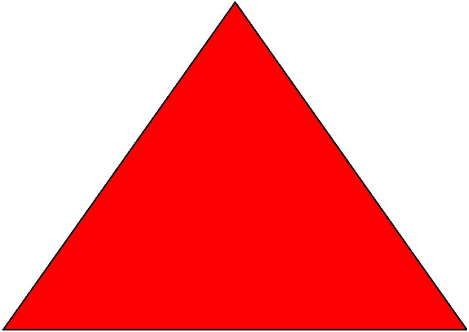
- Para cada $h \in \mathcal{H}$ existe una única $j \in \mathbb{Z}$ y un cubo $Q = Q(h) \in \mathcal{D}^j$ tal que $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subseteq Q$, y esta propiedad no se cumple para ningún cubo en $\mathcal{D}^{j+1}$.
- Para cualquier $Q \in \mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ existe exactamente $M_Q = \#(\mathcal{O}(Q)) - 1 \geq 1$ funciones $h \in \mathcal{H}$ tales que el primer item se cumple.
- Para cada $h \in \mathcal{H}$ obtenemos que $\int_X h d\mu = 0$.

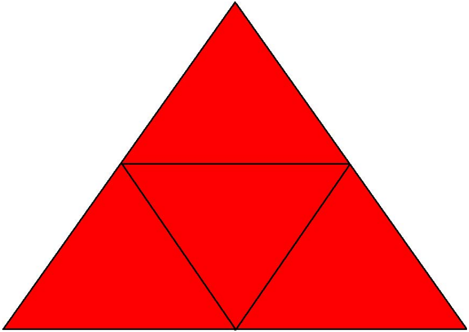
Sistemas de Haar

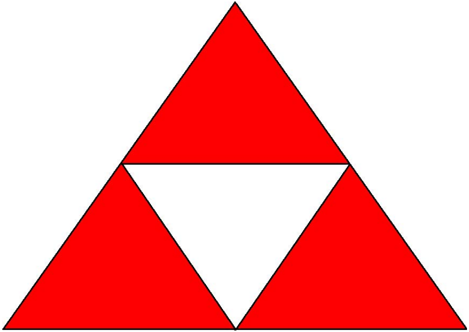
Trabajamos con una familia de funciones asociadas a una familia diádica $\mathcal{D}$, que cumple las siguientes propiedades:

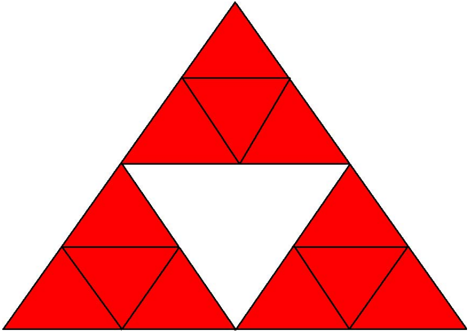
- Para cada $h \in \mathcal{H}$ existe una única $j \in \mathbb{Z}$ y un cubo $Q = Q(h) \in \mathcal{D}^j$ tal que $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subseteq Q$, y esta propiedad no se cumple para ningún cubo en $\mathcal{D}^{j+1}$.
- Para cualquier $Q \in \mathcal{D} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ existe exactamente $M_Q = \#(\mathcal{O}(Q)) - 1 \geq 1$ funciones $h \in \mathcal{H}$ tales que el primer item se cumple.
- Para cada $h \in \mathcal{H}$ obtenemos que $\int_X h d\mu = 0$.
- El sistema $\{h\}$ es una base ortonormal de $L^2(X)$ si $\mu(X) = \infty$ y $\{h\} \cup \{\mu(X)^{-1/2}\}$ es una base ortonormal de $L^2(X)$ si $\mu(X) < \infty$.

Parte B - Contexto Abstracto - Preliminares

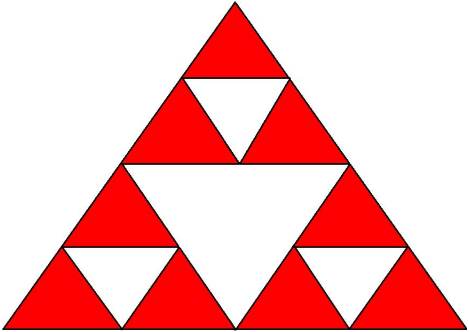




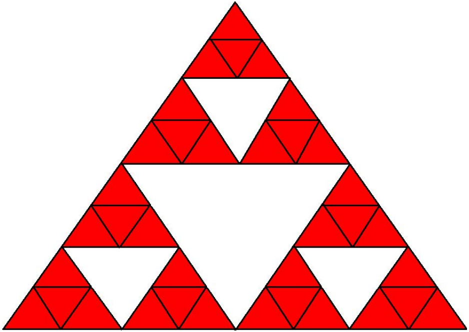


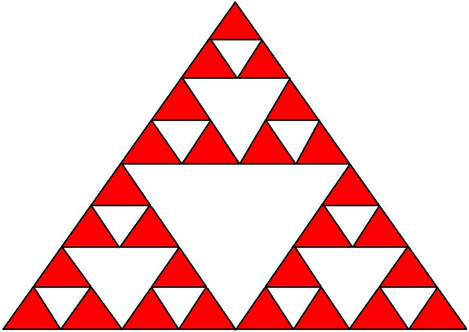


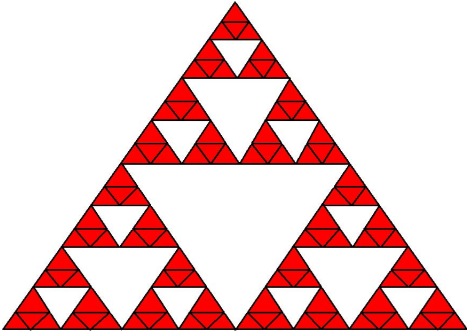
Parte B - Contexto Abstracto - Preliminares

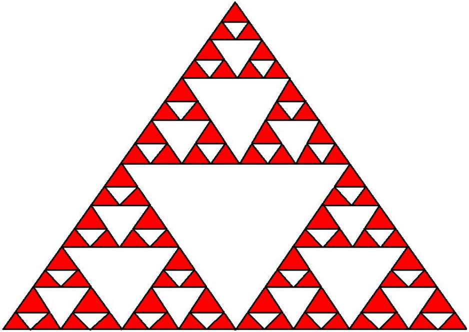


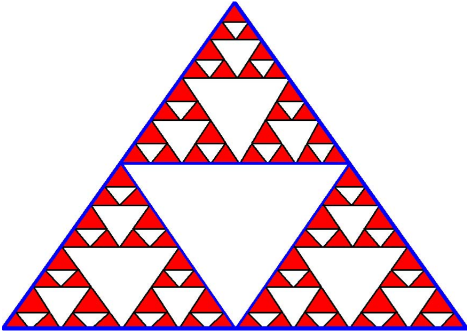
Parte B - Contexto Abstracto - Preliminares

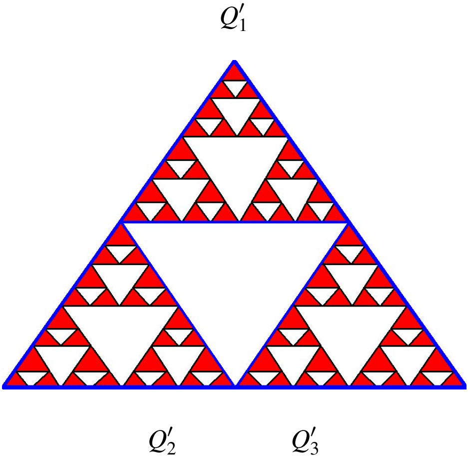


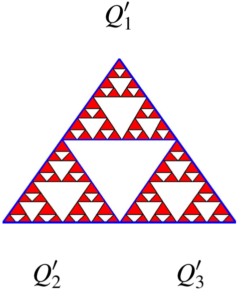









Q_1'
Q_2'
Q_3'



$$h^1_Q(x) := \frac{4}{\sqrt{42}}(3^{j+1})^{1/2}\left(1\chi_{Q'_1}(x) + 1/4\chi_{Q'_2}(x) - 5/4\chi_{Q'_3}(x)\right),$$

$$h^2_Q(x) := \frac{3}{\sqrt{14}}(3^{j+1})^{1/2}\left(-2/3\chi_{Q'_1}(x) + 1\chi_{Q'_2}(x) - 1/3\chi_{Q'_3}(x)\right),$$

Sistemas de Haar y Espacios de Banach de funciones definidas sobre espacios de tipo homogéneo

Caracterización de Espacios de Banach de funciones con wavelets de Haar

$$\mathbb{B}^r = \{f / \ |f|^r \in \mathbb{B}\}$$

$$\mathbb{B}' = \{f / \sup_{\|g\|_{\mathbb{B}}=1} \int_X fg d\mu < \infty\}$$

$$M^{\text{dy}} f(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f| \, d\mu$$

Caracterización de Espacios de Banach de funciones con wavelets de Haar

Denotamos L_c^∞ al espacio de las funciones acotadas con soporte compacto definido por

$$L_c^\infty = L_c^\infty(X,\mu) = \{f \in L^\infty(X) / \operatorname{sop}(f) \subset B(x_0,r) \text{ para algún } x_0 \in X,\ r>0\}.$$

Diremos que $\mathbb{B}$ es un E.B.F. con la propiedad $\mathfrak{A}$, si L_c^∞ es denso en $\mathbb{B}$ y existe un número real $p_1 > 1$ tal que $\mathbb{B}^{1/p_1}$ es un E.B.F. cumpliendo que

$$\left\|M^{\mathrm{dy}} f\right\|_{\left(\mathbb{B}^{1/p_1}\right)'} \leq c\,\|f\|_{\left(\mathbb{B}^{1/p_1}\right)'},$$

donde M^{dy} es el operador Maximal diádico de Hardy-Littlewood .

Caracterización de Espacios de Banach de funciones con wavelets de Haar

TEOREMA

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{H}$ un sistema de Haar. Sea $\mathbb{B}$ un E.B.F. con la propiedad $\mathfrak{A}$. Entonces $\mathcal{H}$ es una base incondicional para $\mathbb{B}$. Además, existen dos constantes positivas c_1 y c_2 tales que, para cualquier $f \in \mathbb{B}$, las siguientes desigualdades se cumplen

$$c_1 \|f\|_{\mathbb{B}} \leq \|Sf\|_{\mathbb{B}} \leq c_2 \|f\|_{\mathbb{B}}, \tag{1}$$

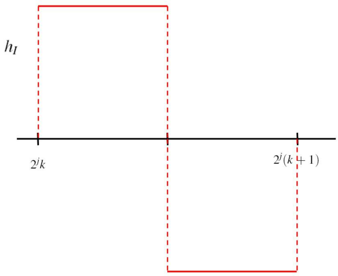
donde

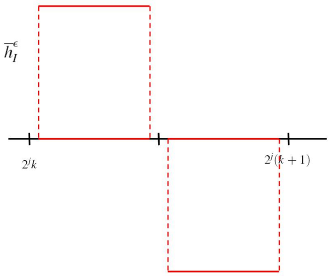
$$\mathcal{S}(f)(x) = \left(\sum_{h \in \mathcal{H}} |\langle f, h \rangle|^2 |h(x)|^2 \right)^{1/2}. \tag{2}$$

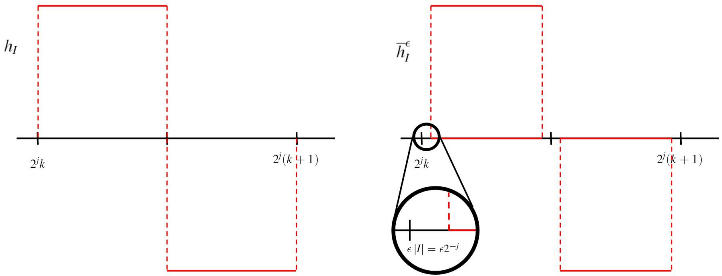
Casos particulares:

- $\mathbb{B} = L^p(X,\mu),\ 1 < p < \infty,$
- $\mathbb{B} = L^{p,q}(X,\mu),\ 1 < p,q < \infty,$
- $\mathbb{B} = L^{p(\cdot)}(X,\mu)$, si M está acotada sobre $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$ en $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$. Si X es α-Ahlfors, $\mu(X) < \infty$ es suficiente pedir que el exponente p satisfaga
$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c}{-\log(d(x,y))}.$$

Perturbaciones del sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R})$






h_I
2^jk
$2^j(k+1)$
$\overline{h}_I^{\epsilon}$
2^jk
$2^j(k+1)$
$\epsilon\,|I| = \epsilon 2^{-j}$

TEOREMA

Sea $\epsilon > 0$ “lo suficientemente pequeño”. Dado $I \in \mathcal{D}$ sea E_I tal que

(I) *E_I es unión de dos sub-intervalos de I, simétricos con respecto al centro del intervalo I,*

(II) *$|I \backslash E_I| \leq \epsilon\, |I|$, para todo $I \in \mathcal{D}$.*

Entonces la familia $\{\overline{h}_I^{\epsilon} = h_I \chi_{E_I},\ I \in \mathcal{D}\}$ es una base de Riesz en $L^2(\mathbb{R})$, con cotas $A_\epsilon = (1 - (c^2\epsilon)^{1/2})^2$ y $B_\epsilon = (1 + (c^2\epsilon)^{1/2})^2$.

Demostración.

- $\overline{b}_I^{\epsilon} = h_I - \overline{h}_I^{\epsilon}$,
- por Favier-Zalik es suficiente ver que $\sum_{I\in\mathcal{D}} \left|\langle f, \overline{b}_I^{\epsilon}\rangle\right|^2 \leq c_\epsilon \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$,
- para probar la desigualdad usamos el Lema de Cotlar y el Lema de Schur.

$\square$

TEOREMA

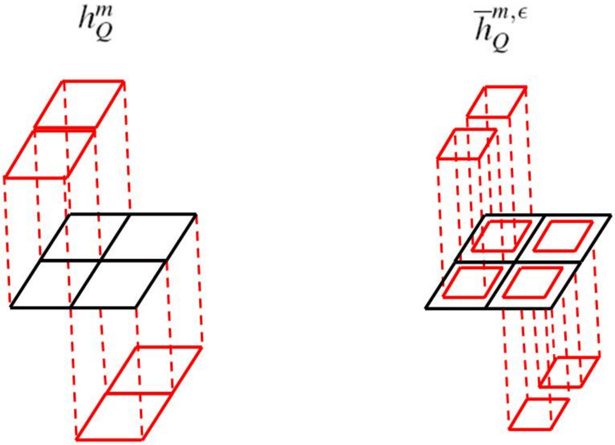
Sea $I \in \mathcal{D}$ y E_I un subconjunto de I cumpliendo las siguientes propiedades,

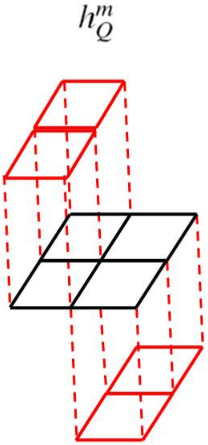
(I) $\int_{E_I} h_I dx = 0$, *para todo* $I \in \mathcal{D}$.

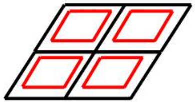
(II) $\left(\overline{I \backslash E_I}\right)^c$ *tiene a lo sumo m componentes conexas.*

(III) $|I \backslash E_I| \leq \epsilon |I|$, *para todo* $I \in \mathcal{D}$.

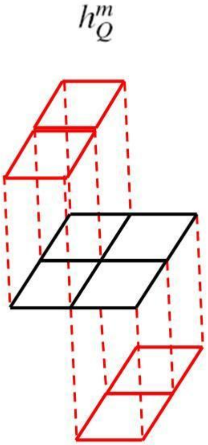
Entonces la familia $\{\overline{h}_I^{\epsilon} = h_I \chi_{E_I},\ I \in \mathcal{D}\}$ *es una base de Riesz en* $L^2(\mathbb{R})$, *con cotas* $A_\epsilon = (1 - (c^2\epsilon)^{1/2})^2$ *y* $B_\epsilon = (1 + (c^2\epsilon)^{1/2})^2$.

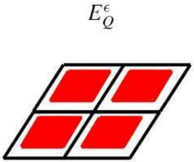

h_Q^m
$\overline{h}_Q^{m,\epsilon}$


h_Q^m

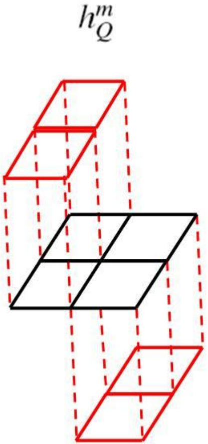


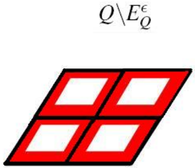
Perturbaciones del sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R}^n)$





Perturbaciones del sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R}^n)$





Teorema

- *Sea* $\epsilon > 0$ *dado.*
- *si* $|Q' \backslash K_{Q'}| \leq 2^{-n}\epsilon\,|Q|$.
- *Sea* $E_Q^\epsilon = \bigcup_{Q' \subset Q} K_{Q'}$ *y* $\overline{h}_Q^{m,\epsilon} = h_Q^m \chi_{E_Q^\epsilon}$ *y supongamos que* $\overline{h}_Q^{m,\epsilon}$ *tiene integral nula.*

Entonces el sistema $\{\overline{h}_Q^{m,\epsilon} = h_Q^m \chi_{E_Q^\epsilon},\ Q \in \mathcal{D},\ m = 1, ..., 2^n - 1\}$ *es una base de Riesz en* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *con cotas Riesz* $A_\epsilon = [1 - (C^2\epsilon)^{1/2}]^2$ *y* $B_\epsilon = [1 + (C^2\epsilon)^{1/2}]^2$, *con* C *dependiendo sólo de* n.

Claves de la Demostración

Analizamos el operador

$$Tf = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{D}^i \\ m=1,\dots,2^n-1}} \langle f, \overline{b}_Q^{m,\epsilon}\rangle h_Q^m = \sum_{i\in\mathbb{Z}} T_i f,$$

donde
$\overline{b}_Q^{m,\epsilon} = h_Q^m - \overline{h}_Q^{m,\epsilon}$

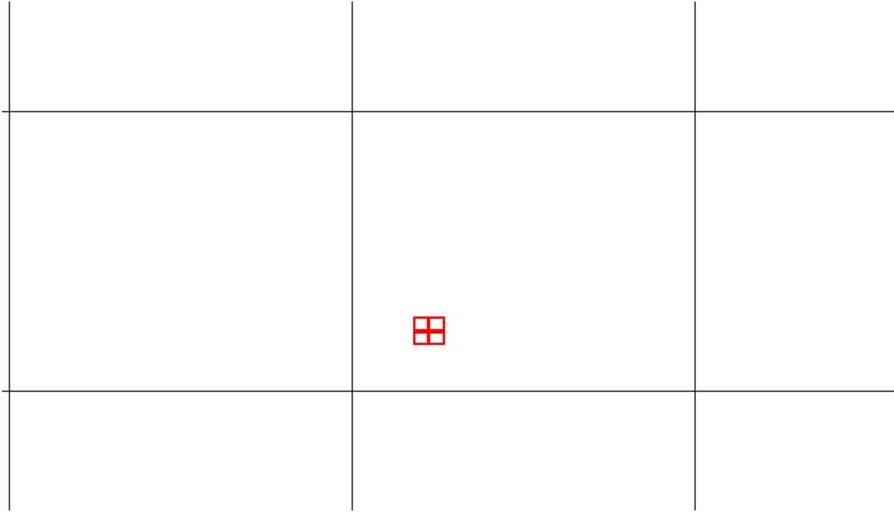
Claves de la Demostración

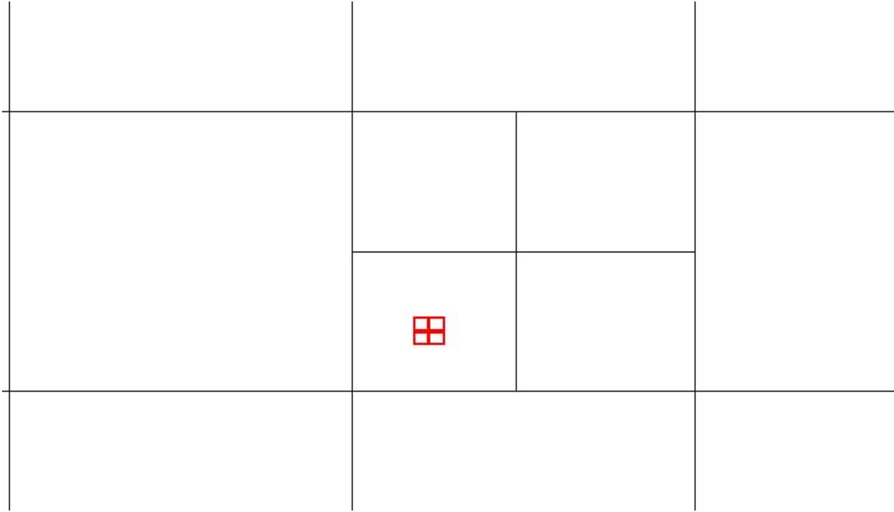
$$\left\|T_i T_j^* f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{\substack{Q\in\mathcal{D}^i \\ m=1,\ldots,2^n-1}} \left(\sum_{\substack{J\in\mathcal{D}^j \\ k=1,\ldots,2^n-1}} \langle f, h_J^k\rangle \langle \overline{b}_Q^{m,\epsilon}, \overline{b}_J^{k,\epsilon}\rangle \right)^2 .$$

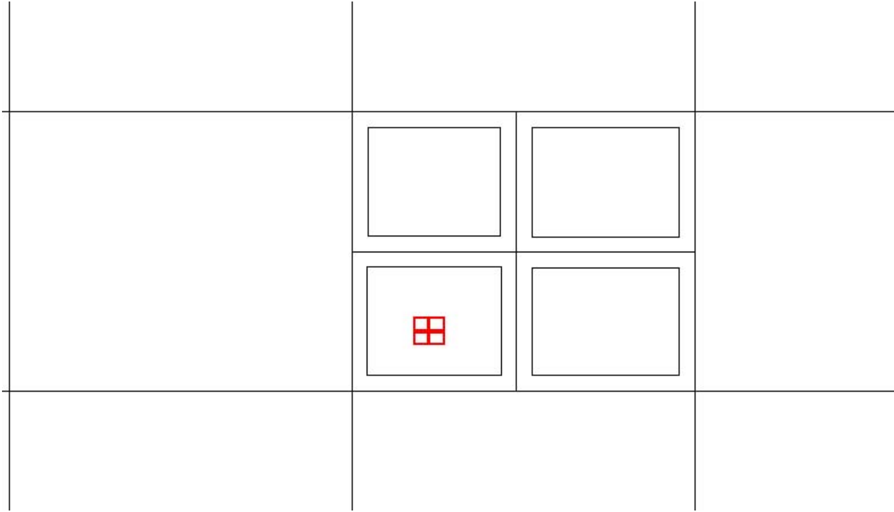
$\square$

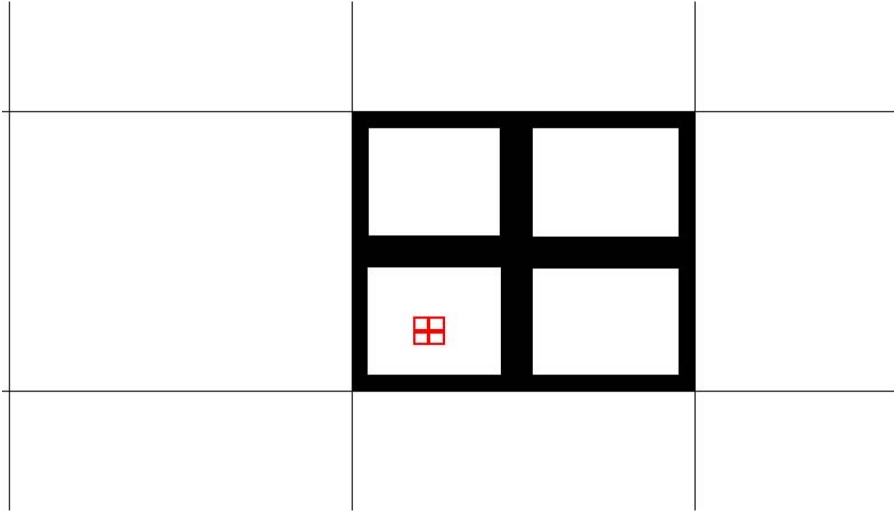
Perturbaciones del sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R}^n)$

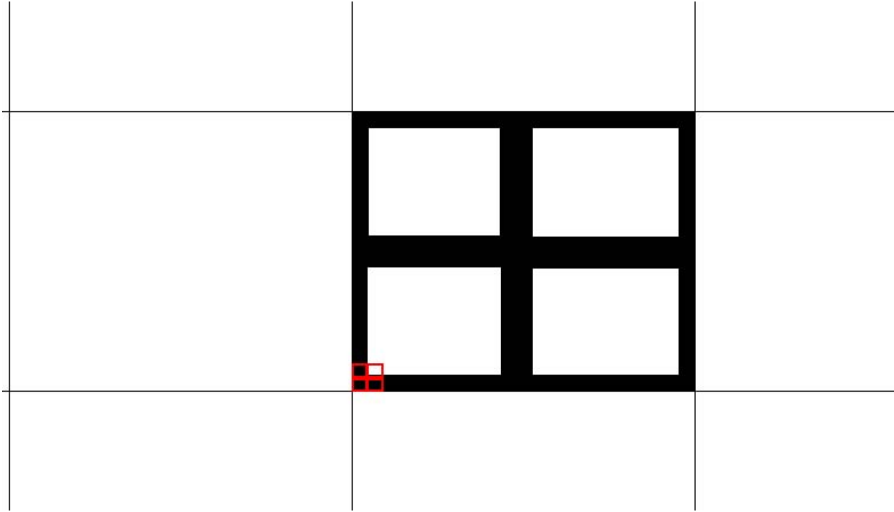
Perturbaciones del sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R}^n)$



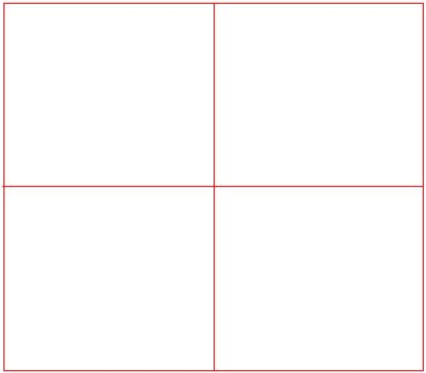


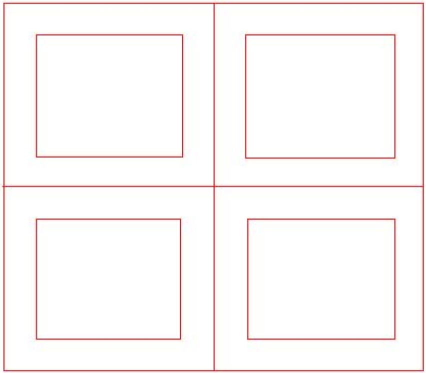


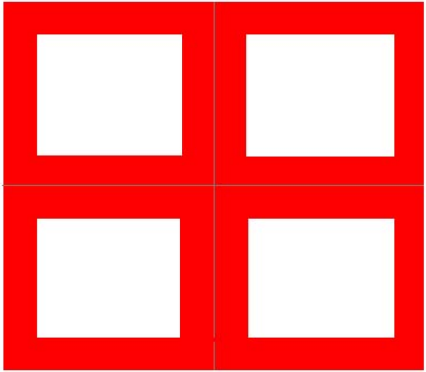


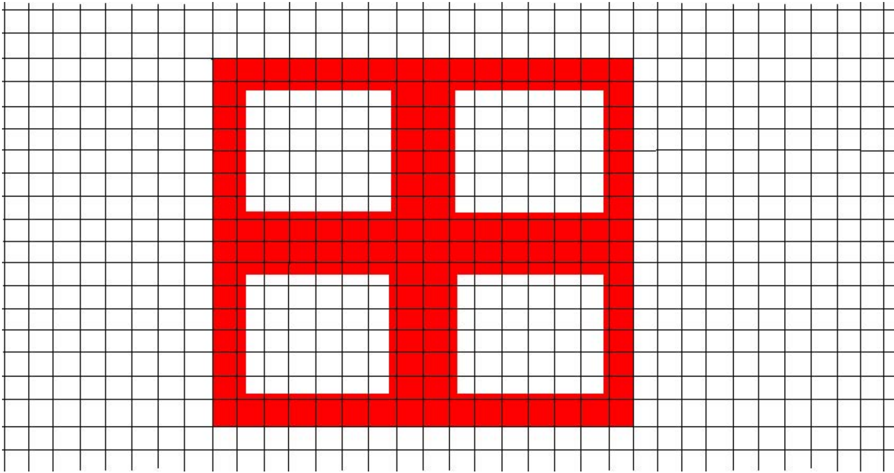


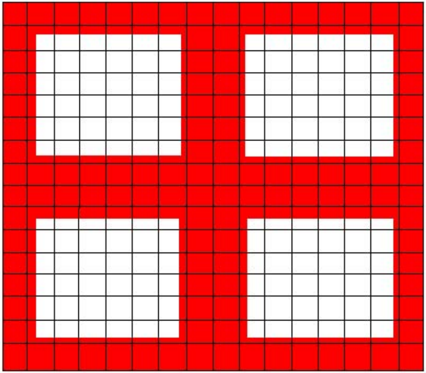
Perturbaciones del sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R}^n)$

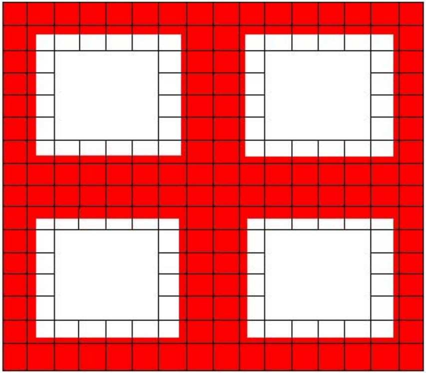


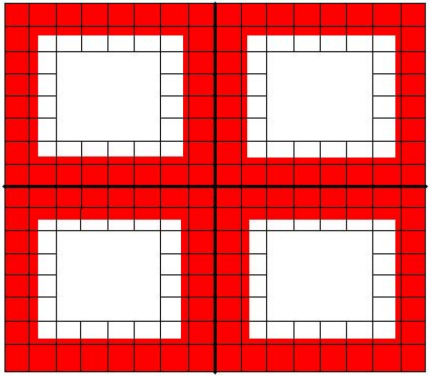


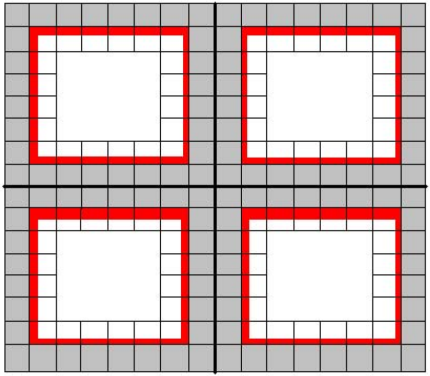


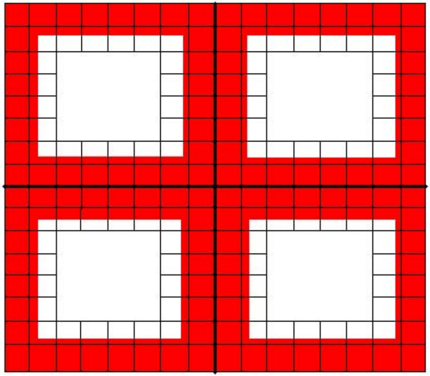








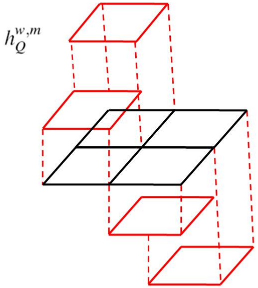




Bases de Riesz en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ de perturbaciones de sistemas de wavelets de Haar desbalanceadas

Bases de Riesz en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ de perturbaciones de sistemas de wavelets de Haar desbalanceadas

$$H^w(\mathbb{R}^n) = \{h_Q^{w,m},\ Q \in \mathcal{D},\ m = 1, ..., 2^n - 1\},\ h_Q^{w,m} = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{m,Q} \chi_{Q'}$$



Bases de Riesz en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ de perturbaciones de sistemas de wavelets de Haar desbalanceadas

dado $\epsilon > 0$, $Q' \subset Q$.

$$K_{Q'}^{m,\epsilon} := \{x \in Q' /\, d(x, Q'^c) \geq \rho_{Q'}^{m,\epsilon}\},$$

donde elegimos $\rho_{Q'}^{m,\epsilon}$ de modo que

- $w(Q' \backslash K_{Q'}^{m,\epsilon}) \leq \epsilon 2^{-n} w(Q)$
- $\sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{m,Q} w(K_{Q'}^{m,\epsilon}) = 0$

Bases de Riesz en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ de perturbaciones de sistemas de wavelets de Haar desbalanceadas

Teorema

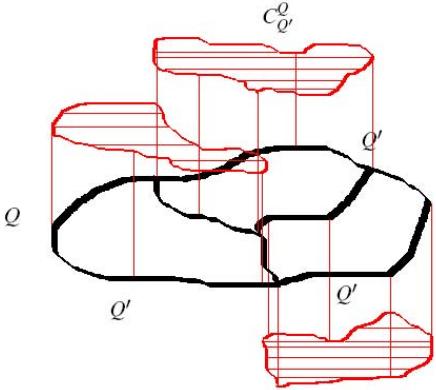
Sea w un peso en la clase A_∞, $\mathcal{H}^w$ el sistema de wavelets de Haar desbalanceadas en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ y $\epsilon > 0$, suficientemente pequeño. Entonces la familia de perturbaciones

$$\overline{h}_Q^{w,m,\epsilon} = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{m,Q} \chi_{K_{Q'}^{m,\epsilon}}, \; Q \in \mathcal{D}, \; m = 1, ..., 2^n - 1, \tag{1}$$

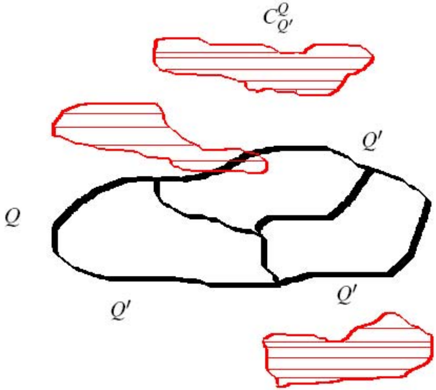
constituyen una base de Riesz de $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$, con cotas Riesz $A_\epsilon^w = [1 - (c\epsilon)^{1/2}]^2$ y $B_\epsilon^w = [1 + (c\epsilon)^{1/2}]^2$.

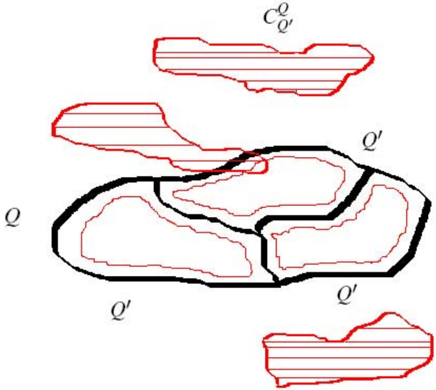
Perturbaciones de bases de Haar por aproximación de soportes en espacios Ahlfors

Perturbaciones de bases de Haar por aproximación de soportes en espacios Ahlfors

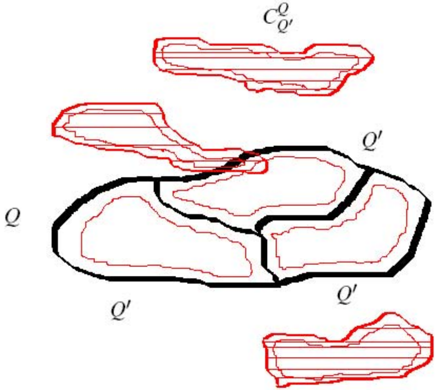


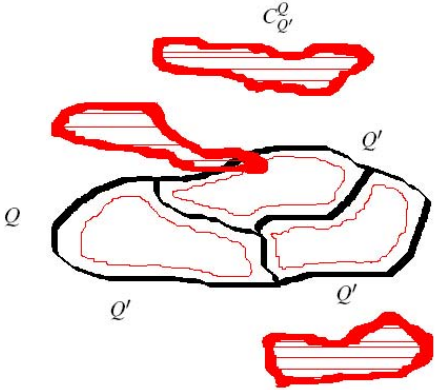
Perturbaciones de bases de Haar por aproximación de soportes en espacios Ahlfors



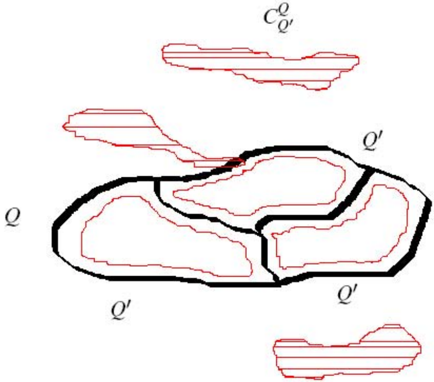

$C_{Q'}^{Q}$
Q'
Q
Q'
Q'

Perturbaciones de bases de Haar por aproximación de soportes en espacios Ahlfors

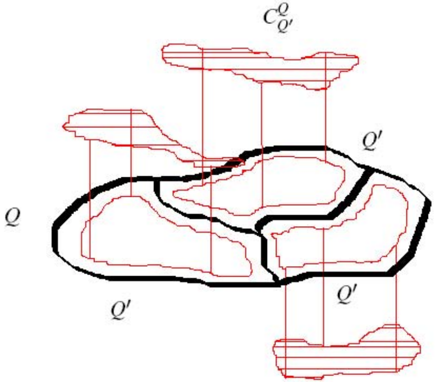


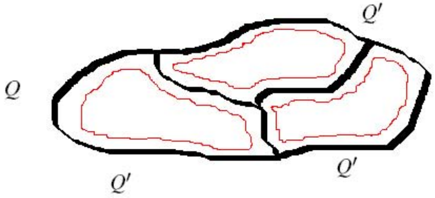

$C_{Q'}^{Q}$
Q'
Q
Q'
Q'

Perturbaciones de bases de Haar por aproximación de soportes en espacios Ahlfors

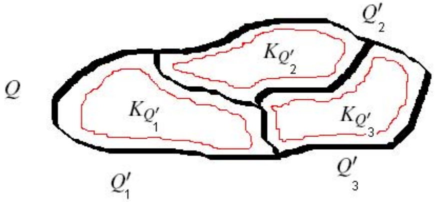


Perturbaciones de bases de Haar por aproximación de soportes en espacios Ahlfors

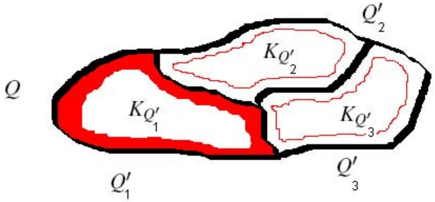


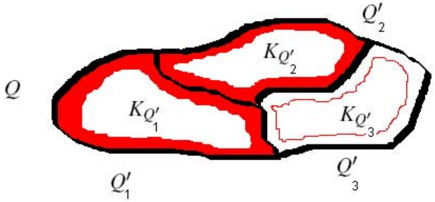

Q'
Q
Q'
Q'

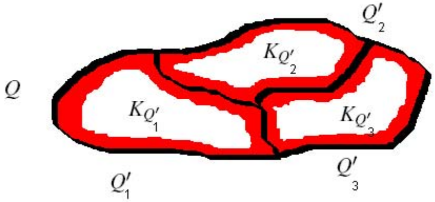
Perturbaciones de bases de Haar por aproximación de soportes en espacios Ahlfors



Perturbaciones de bases de Haar por aproximación de soportes en espacios Ahlfors




Q'_2
$K_{Q'_2}$
Q
$K_{Q'_1}$
$K_{Q'_3}$
Q'_3
Q'_1


Q'_2
$K_{Q'_2}$
Q
$K_{Q'_1}$
$K_{Q'_3}$
Q'_3
Q'_1

Perturbaciones de soportes de sistemas de Haar

Dado $F \subset X$ sea $N_j(F) = \sharp\left(\{Q \in \mathcal{D}^j : \overline{Q} \cap F \neq \emptyset\}\right)$.

DEFINICIÓN

Definimos la dimensión "box diádica superior" de F con respecto a $\mathcal{D}$, como

$$\overline{dim_{B,\mathcal{D}}}(F) := \limsup_{j\to\infty} \frac{\log_\Delta N_j(F)}{j},$$

donde $\Delta = 1/\delta$.

Perturbaciones de soportes de sistemas de Haar

Diremos que una familia $\{F(t),\ t \in T\}$ de subconjuntos medibles de X tiene "dimensión box diádica superior (d.b.d.s) uniforme menor que β" si

$$\lim_{J\to\infty} \sup_{j\geq J} \frac{\log_{\Delta}(N_j(F(t)))}{j} < \beta,$$

uniformemente en $t \in T$. Esto es, existe un J independiente de $t \in T$ tal que

$$\sup_{j\geq J} \frac{\log_{\Delta} N_j(F(t))}{j} < \beta,$$

para todo $t \in T$.

Perturbaciones de soportes de sistemas de Haar

Proposición

Si $\{F(t),\ t\in T\}$ es una familia de subconjuntos de X con d.b.d.s. uniforme menor que β entonces existe un $J\in\mathbb{Z}$ tal que

$$N_j(F(t))=\sharp\left(\{Q\in\mathcal{D}^j:\ \overline{Q}\cap F(t)\neq\emptyset\}\right)\leq\Delta^{j\beta},$$

para todo $j\geq J$ y para todo $t\in T$.

Lema

Supongamos ahora que (X,d,μ) es α-Ahlfors para algún $\alpha>0$. Sea $Q\in\mathcal{D}$ y sea $K_Q(\rho):=\{x\in Q:\ d(x,\partial Q)>\rho\}$. Supongamos que la familia $\{\partial K_Q(\rho):,\ \rho\geq 0\}$ tiene d.b.d.s uniforme menor que β, con $\beta<\alpha$. Entonces la función $\mu(K_Q(\rho))$ es monótona creciente y continua y por consiguiente $\mu(Q\backslash K_Q(\rho))$ también es continua.

Perturbaciones de soportes de sistemas de Haar

DEFINICIÓN

Hipótesis $H(\beta)$.
Para (X, d, μ) y $\mathcal{D}$ en las condiciones precedentes, diremos que $(X, d, \mu, \mathcal{D})$ satisface la hipótesis $H(\beta)$ si para cada $Q \in \mathcal{D}$ y cada $\rho > 0$ los conjuntos $\partial K_Q(\rho)$ con $K_Q(\rho) = \{x \in Q : \ d(x, \partial Q) > \rho\}$ tienen d.b.d.s. menor que β uniforme relativa a la escala de Q. Precisamente, existe $J \in \mathbb{Z}$ independiente de ρ y de $Q \in \mathcal{D}^j$ tal que, si $I \in \mathcal{D}^i$

$$\sup_{j \geq J+i} \frac{\log_\Delta N_j(\partial K_I(\rho))}{j - i} < \beta.$$

Perturbaciones de soportes de sistemas de Haar

LEMA

Sea (X, d, μ) *un espacio* α*-Ahlfors,* $\mathcal{D}$ *una familia diádica con parámetro* δ *que satisface* $H(\beta)$ *para algún* $\beta < \alpha$ *y*
$\mathcal{H} = \{h_Q^m,\ Q \in \mathcal{D},\ 1 \geq m \geq \sharp\mathcal{O}(Q) - 1\}$ *un sistema de Haar en* $L^2(X)$*.*
Entonces para cada $\epsilon > 0$ *fijo y para cada* $h_Q^m \in \mathcal{H}$ *podemos elegir* $\{\rho_{Q'}^{m,\epsilon},\ Q' \in \mathcal{O}(Q)\}$ *todos estrictamente positivos tales que si*

$$K_{Q'}^{m,\epsilon} := \{x \in Q' / d(x, \partial Q') > \rho_{Q'}^{m,\epsilon}\}, \tag{2}$$

tenemos,
(A) $\int_X h_Q^m(x)\chi_{\bigcup_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} K_{Q'}^{m,\epsilon}}(x)d\mu(x) = \int_X h_Q^m d\mu = 0.$
(B) $\mu\left(Q' \backslash K_{Q'}^{m,\epsilon}\right) \leq c\epsilon\mu(Q').$

Perturbaciones de soportes de sistemas de Haar

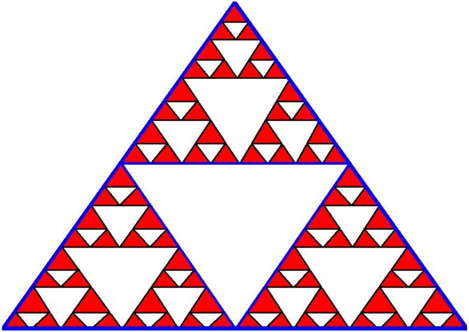
TEOREMA

Sea (X, d, μ) *un espacio* α*-Ahlfors con* $\alpha > 0$. *Sea* $\mathcal{D}$ *una familia diádica con parámetro* δ. *Supongamos que el sistema* $(X, d, \mu, \mathcal{D})$ *satisface la propiedad* $H(\beta)$ *para algún* $0 < \beta < \alpha$. *Sea* $\mathcal{H}$ *un sistema de Haar asociado a* $\mathcal{D}$. *Sea* $\overline{\mathcal{H}}$ *el conjunto de las funciones*

$$\overline{h}_Q^{m,\epsilon} = h_Q^m \chi_{\bigcup_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} K_{Q'}^{m,\epsilon}} = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{Q,m} \chi_{K_{Q'}^{m,\epsilon}}. \tag{2}$$

Entonces para ϵ *suficientemente chico se tiene que* $\overline{\mathcal{H}}$ *es una base de Riesz para* $L^2(X, \mu)$ *con cotas Riesz tan cercanas a uno como se quiera.*

Perturbaciones de soportes de sistemas de Haar



Estudiamos operadores de tipo

$$Tf = \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda \langle f, \alpha_\lambda \rangle \beta_\lambda.$$

donde $\{\alpha_\lambda\}$ y $\{\beta_\lambda\}$ son sistemas de Riesz asociados y $\{m_\lambda\}$ es un multiplicador en $l^\infty(\Lambda)$.

La notación general tendrá el siguiente aspecto

$$T_{i,j}^{\vartheta,\epsilon\, \text{máx}\,\{i,j\},k,l}f.$$

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda \langle f,\alpha_\lambda\rangle \beta_\lambda\right)$$

PROPOSICIÓN

Sea (X, d, μ) *un espacio de tipo homogéneo. Sea* $w \in \mathcal{A}_\infty(X, d, \mu)$. *Sea* $\mathcal{H}$ *un sistema de Haar desbalanceado en* $(X, d, wd\mu)$. *Sea* $1 < p < \infty$ *y* $v \in A_p(X, d, wd\mu)$.
Entonces la familia de operadores $T_{0,0}^{\vartheta,0,X,w}$ *está acotada en* $L^p(X, d, vwd\mu)$ *uniformemente para* $|\vartheta(h)| \leq 1$.

El valor 1 en un subíndice está asociado a un procedimiento de regularización de un sistema de Haar $\mathcal{H}$ que procedemos a describir. Dado $Q \in \mathcal{D}^j$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, se define el conjunto K_Q^ϵ como sigue

$$K_Q^\epsilon := \overline{\{x \in Q/\ d(x, Q^c) > \epsilon\delta^j\}}, .$$

que resulta compacto si (X, d) es completo.
Asociado a cada subconjunto K_Q^ϵ definimos las funciones

$$\phi_Q^\epsilon(x) := \frac{d(x, Q^c)}{d(x, Q^c) + d(x, K_Q^\epsilon)}. \tag{2}$$

y

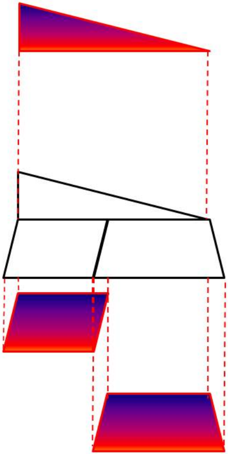
$$\psi_Q^\epsilon := \frac{\phi_Q^\epsilon}{\int \phi_Q^\epsilon d\mu}. \tag{3}$$

DEFINICIÓN

Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y sea $\{\psi_Q^\epsilon\}$ la sucesión de funciones dadas antes. Dada la wavelet de Haar $h_Q^m = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{Q,m} \chi_{Q'}$, definimos su "función regular asociada" como

$$\tilde{h}_Q^{m,\epsilon} := \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{Q,m} \mu(Q') \psi_{Q'}^\epsilon.$$

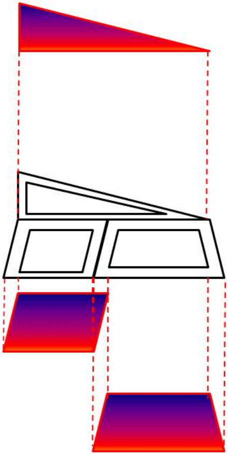
Integrales Singulares y sumabilidad de perturbaciones regulares de sistemas de Haar



$$h_Q^m(x) = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{m,Q} \chi_{Q'}$$

Q

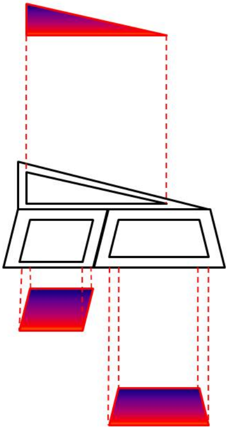
Integrales Singulares y sumabilidad de perturbaciones regulares de sistemas de Haar



$$h_Q^m(x) = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{m,Q} \chi_{Q'}$$

Q

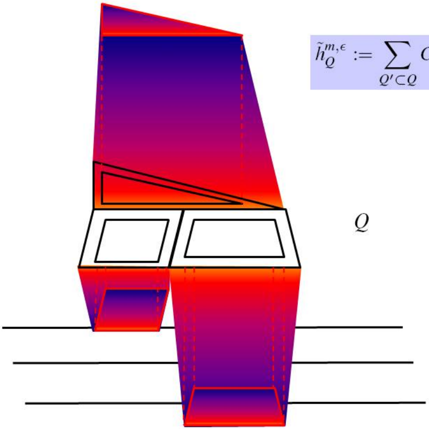
Integrales Singulares y sumabilidad de perturbaciones regulares de sistemas de Haar



Q

INTEGRALES SINGULARES Y SUMABILIDAD DE PERTURBACIONES REGULARES DE SISTEMAS DE HAAR

$$\tilde{h}_Q^{m,\epsilon} := \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{Q,m} \mu(Q') \psi_{Q'}^{\epsilon}$$



La Teoría L^2

La Teoría L^2

TEOREMA

Dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, la sucesión de funciones $\{\tilde{h}_Q^{m,\epsilon},\ Q \in \mathcal{D},\ m = 1, ..., \sharp\mathcal{O}(Q) - 1.\}$ constituyen una sucesión de Bessel en $L^2(X)$ de funciones con soporte localizado, lo que es equivalente a decir que el operador $T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ está acotado en $L^2(X)$.

La Teoría L^2

TEOREMA

Si X es α-Ahlfors entonces el operador $T^{\vartheta,\epsilon,X,1}_{1,1}$ está acotado sobre $L^2(X)$ con cota independiente de la sucesión ϑ. Más precisamente

$$\left\| T^{\vartheta,\epsilon,X,1}_{1,1} f \right\|_{L^2(X)} \leq \frac{c}{\epsilon^{1/2}} \|f\|_{L^2(X)} .$$

Los Núcleos

Los Núcleos

DEFINICIÓN

Si $\Delta = \{(x,x),\ x \in \mathbb{R}^n\}$ *decimos que* $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta \to \mathbb{C}$ *es un núcleo estándar si existen* $\gamma > 0$ *y* $C > 0$ *tales que*

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n}, \tag{2}$$

$$|K(x,y) - K(x,z)| \leq C\frac{|y-z|^\gamma}{|x-y|^{n+\gamma}} \ si \ |x-y| > 2\,|y-z|\,, \tag{3}$$

$$|K(x,y) - K(w,y)| \leq C\frac{|x-w|^\gamma}{|x-y|^{n+\gamma}} \ si \ |x-y| > 2\,|x-w|\,. \tag{4}$$

Los Núcleos

DEFINICIÓN

Si $\Delta = \{(x,x),\ x \in X\}$ *decimos que* $K : X \times X \backslash \Delta \to \mathbb{C}$ *es un núcleo estándar si existen* $\gamma > 0$ *y* $C > 0$ *tales que*

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{d(x,y)^{\alpha}}, \tag{2}$$

$$|K(x,y) - K(x,z)| \leq C\frac{d(y,z)^{\gamma}}{d(x,y)^{\alpha+\gamma}} \text{ si } d(x,y) > 2d(y,z), \tag{3}$$

$$|K(x,y) - K(w,y)| \leq C\frac{d(x,w)^{\gamma}}{d(x,y)^{\alpha+\gamma}} \text{ si } d(x,y) > 2d(x,w). \tag{4}$$

Los Núcleos
Si definimos el núcleo

$$K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y) := \sum_{I\in\mathcal{D}} \vartheta_I h_I^{\epsilon}(x) h_I^{\epsilon}(y), \tag{2}$$

entonces el operador $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}$ tiene la siguiente representación integral

$$T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y)\,dy,$$

Los Núcleos

Si definimos el núcleo

$$K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y) := \sum_{I\in\mathcal{D}} \vartheta_I h_I^{\epsilon}(x) h_I^{\epsilon}(y), \tag{2}$$

entonces el operador $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}$ tiene la siguiente representación integral

$$T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y) dy,$$

TEOREMA

El núcleo $K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}$ es un núcleo estándar.

Los Núcleos
Dada $f \in L^2(X) \cap L^p(X)$, con X α-Ahlfors podemos escribir al operador $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ como sigue

$$
\begin{aligned}
T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f(x) &= \sum_{\substack{Q\in\mathcal{D} \\ m=1,\ldots,\sharp\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m \langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}\rangle \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \\
&= \int_X \left(\sum_{\substack{Q\in\mathcal{D} \\ m=1,\ldots,\sharp\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(y) \right) f(y)\,d\mu(y) \\
&= \int_X K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}(x,y) f(y)\,d\mu(y).
\end{aligned}
$$

Los Núcleos

Dada $f \in L^2(X) \cap L^p(X)$, con X α-Ahlfors podemos escribir al operador $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ como sigue

$$
\begin{aligned}
T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f(x) &= \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D} \\ m=1,\dots,\sharp\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m \langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \rangle \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \\
&= \int_X \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D} \\ m=1,\dots,\sharp\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(y) \right) f(y) d\mu(y) \\
&= \int_X K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}(x,y) f(y) d\mu(y).
\end{aligned}
$$

TEOREMA

El núcleo $K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ del operador $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ es un núcleo estándar.

La Teoría L^p

La Teoría L^p

TEOREMA

Dado $\epsilon > 0$ si $1 < p < \infty$ entonces existe c tal que

$$\left\| T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1} f \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \begin{cases} \frac{c}{\epsilon^{\frac{2}{p}-1}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} & si \quad 1 < p \leq 2 \\ \frac{c}{\epsilon^{\frac{2}{p'}-1}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} & si \quad 2 < p < \infty. \end{cases}$$

La Teoría L^p

TEOREMA

Si (X,d,μ) *un espacio de tipo homogéneo* α*-Ahlfors y* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeño, entonces el operador* $T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ *está acotado sobre* $L^p(X)$ *para* $2 \leq p < \infty$ *con cota dependiente de* ϵ*. Por lo tanto, por dualidad,* $(T_{0,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1})$ *está acotado en* $L^p(X)$ *para* $1 < p \leq 2$ *con cota dependiente de* ϵ*. Más específicamente* $\left\|(T_{0,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1})f\right\|_{L^p(X)} \leq c\epsilon^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(X)}$, $1 < p \leq 2$ *y* $\left\|T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1}f\right\|_{L^p(X)} \leq c\epsilon^{-\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^p(X)}$, $2 \leq p < \infty$.

La Teoría L^p

TEOREMA

Si X es α-Ahlfors entonces el operador $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ está acotado sobre $L^p(X)$ para $1 < p < \infty$. Más específicamente

$$\left\| T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f \right\|_p \leq \frac{c}{\epsilon^{1/p}} \|f\|_p \qquad 1 < p \leq 2$$

$$\left\| T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f \right\|_p \leq \frac{c}{\epsilon^{1/p'}} \|f\|_p \qquad 2 \leq p < \infty.$$

Acotación con pesos de $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$

Acotación con pesos de $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$

TEOREMA

Sea $1 < p < \infty$, $\nu \in A_p^{dy}$, *entonces el operador* $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ *está acotado sobre* $L^p(X,\nu)$, *con constante* c/ϵ. *En otros términos*

$$\left\| T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f \right\|_{L^p(X,\nu d\mu)} \leq \frac{c}{\epsilon} \|f\|_{L^p(X,\nu d\mu)} . \tag{2}$$

A_p^{dy} como condición necesaria

Para abreviar diremos que h"$\in$"Q si Q es el soporte diádico de h. Tomando

$$\vartheta^1_{\bar{h}}(h) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad h = \bar{h} \\ -1 & \text{si} \quad h \neq \bar{h} \end{cases}$$

y

$$\vartheta^2(h) \equiv 1$$

tenemos que $1/2(\vartheta^1_{\bar{h}} + \vartheta^2) = \delta_{h\bar{h}}$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(T_{0,0}^{\vartheta^1_{\bar{h}},0,X,1} + T_{0,0}^{\vartheta^2,0,X,1}\right)(f)(x) &= \pi_{\bar{h}(f)(x)} \\ &= \langle \bar{h}, f\rangle \bar{h}(x). \end{aligned}$$

De modo que, si sabemos que los operadores de la familia $T_{0,0}^{\vartheta,0,X,1}$ $(\vartheta = \pm 1)$ son acotadas en $L^p(wd\mu)$, uniformemente en ϑ, necesariamente cada π_h es acotado en $L^p(wd\mu)$ con cotas uniformes para $h \in \mathcal{H}$.

A_p^{dy} como condición necesaria

$\star$ *Existe una constante $c > 0$ tal que para todo Q y para toda elección de x e y en elementos distintos de $\mathcal{O}(Q)$ se tiene que*

$$-\sum_{h``\in"Q} h(x)h(y) \geq \frac{c}{\mu(Q)}.$$

A_p^{dy} como condición necesaria

$\star$ *Existe una constante $c > 0$ tal que para todo Q y para toda elección de x e y en elementos distintos de $\mathcal{O}(Q)$ se tiene que*

$$-\sum_{h``\in"Q} h(x)h(y) \geq \frac{c}{\mu(Q)}.$$

TEOREMA

Supongamos que $\mathcal{H}$ verifica $\star$. Si la familia de operadores $T_{0,0}^{\vartheta,0,X,1}$ está acotada uniformemente en $L^p(wd\mu)$ para toda sucesión ϑ con $|\vartheta| = 1$, con $1 < p < \infty$, entonces $w \in A_p^{dy}(X, d, \mu)$.

A_p^{dy} como condición necesaria

TEOREMA

Supongamos que $\mathcal{H}$ verifica $\star$. Si la familia de operadores $T_{0,0}^{\vartheta,0,X,1}$ está acotada uniformemente en $L^p(wd\mu)$ para toda sucesión ϑ con $|\vartheta| = 1$, con $1 < p < \infty$, entonces $w \in A_p^{dy}(X,d,\mu)$.

Demostración

$$w\left(\left\{x \in X : \left|\sum_{h``\in"Q} \pi_h(f)(x)\right| > \lambda\right\}\right) \leq \frac{\tilde{c}}{\lambda^p}\int_X |f|^p \, wd\mu.$$

$A_p^{\mathbf{dy}}$ como condición necesaria

TEOREMA

Supongamos que $\mathcal{H}$ verifica $\star$. Si la familia de operadores $T_{0,0}^{\vartheta,0,X,1}$ está acotada uniformemente en $L^p(wd\mu)$ para toda sucesión ϑ con $|\vartheta| = 1$, con $1 < p < \infty$, entonces $w \in A_p^{dy}(X, d, \mu)$.

Demostración

Si $f \geq 0$, con integral positiva soportada en Q_i' y $x \in Q \backslash Q_i' = \bigcup_{l \neq i} Q_l'$, entonces

$$\left| \sum_{h``\in"Q} \pi_h f(x) \right| = \left| \int_{Q_i'} \left( \sum_{h``\in"Q} h(y)h(x) \right) f(y) d\mu(y) \right|$$
$$\geq \frac{c}{\mu(Q)} \int_{Q_i'} f d\mu.$$

$A_p^{\mathbf{dy}}$ como condición necesaria

TEOREMA

Supongamos que $\mathcal{H}$ verifica $\star$. Si la familia de operadores $T_{0,0}^{\vartheta,0,X,1}$ está acotada uniformemente en $L^p(wd\mu)$ para toda sucesión ϑ con $|\vartheta| = 1$, con $1 < p < \infty$, entonces $w \in A_p^{dy}(X,d,\mu)$.

Demostración

entonces

$$\sum_{l \neq i} w(Q_l') \leq \frac{c}{\left(\frac{1}{\mu(Q_i')}\int_{Q_i'} f d\mu\right)^p} \int_{Q_i'} f^p w d\mu.$$

A_p^{dy} como condición necesaria

TEOREMA

Supongamos que $\mathcal{H}$ verifica $\star$. Si la familia de operadores $T_{0,0}^{\vartheta,0,X,1}$ está acotada uniformemente en $L^p(wd\mu)$ para toda sucesión ϑ con $|\vartheta| = 1$, con $1 < p < \infty$, entonces $w \in A_p^{dy}(X,d,\mu)$.

Demostración

entonces

$$\sum_{l \neq i} w(Q_l') \leq \frac{c}{\left(\frac{1}{\mu(Q_i')}\int_{Q_i'} f d\mu\right)^p} \int_{Q_i'} f^p w d\mu.$$

si $f \equiv 1$ esto implica que

$$w(Q_i') \leq w(Q) \leq (1+c)w(Q_i').$$

$A_p^{\mathbf{dy}}$ como condición necesaria

Teorema

Supongamos que $\mathcal{H}$ verifica $\star$. Si la familia de operadores $T_{0,0}^{\vartheta,0,X,1}$ está acotada uniformemente en $L^p(wd\mu)$ para toda sucesión ϑ con $|\vartheta| = 1$, con $1 < p < \infty$, entonces $w \in A_p^{dy}(X,d,\mu)$.

Demostración
como w duplica entonces

$$\sum_{l \neq i} w(Q_l') \leq \frac{c}{\left(\frac{1}{\mu(Q_i')}\int_{Q_i'} f d\mu\right)^p} \int_{Q_i'} f^p w d\mu.$$

$A_p^{\mathbf{dy}}$ como condición necesaria

TEOREMA

Supongamos que $\mathcal{H}$ verifica $\star$. Si la familia de operadores $T_{0,0}^{\vartheta,0,X,1}$ está acotada uniformemente en $L^p(wd\mu)$ para toda sucesión ϑ con $|\vartheta| = 1$, con $1 < p < \infty$, entonces $w \in A_p^{dy}(X, d, \mu)$.

Demostración

implica

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q f d\mu\right)^p \leq \frac{c}{w(Q)}\int_Q f^p w d\mu.$$

$A_p^{\mathbf{dy}}$ como condición necesaria

TEOREMA

Supongamos que $\mathcal{H}$ verifica $\star$. Si la familia de operadores $T_{0,0}^{\vartheta,0,X,1}$ está acotada uniformemente en $L^p(wd\mu)$ para toda sucesión ϑ con $|\vartheta| = 1$, con $1 < p < \infty$, entonces $w \in A_p^{dy}(X, d, \mu)$.

Demostración

Si tomamos f tal que $f^p w = f$ ($f = w^{-\frac{1}{p-1}}$) obtenemos

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}d\mu\right)^p \leq \frac{c}{w(Q)}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}d\mu.$$

$A_p^{\mathbf{dy}}$ como condición necesaria

TEOREMA

Supongamos que $\mathcal{H}$ verifica $\star$. Si la familia de operadores $T_{0,0}^{\vartheta,0,X,1}$ está acotada uniformemente en $L^p(wd\mu)$ para toda sucesión ϑ con $|\vartheta| = 1$, con $1 < p < \infty$, entonces $w \in A_p^{dy}(X, d, \mu)$.

Demostración

Si tomamos f tal que $f^p w = f$ ($f = w^{-\frac{1}{p-1}}$) obtenemos

$$\left(\int_Q w d\mu\right)\left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq c\mu(Q)^p$$

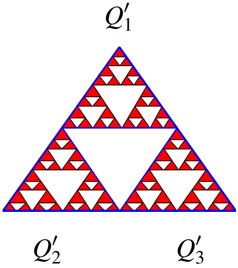
A_p^{dy} como condición necesaria

$\star$ *Existe una constante $c > 0$ tal que para todo Q y para toda elección de x e y en elementos distintos de $\mathcal{O}(Q)$ se tiene que*

$$-\sum_{h``\in"Q} h(x)h(y) \geq \frac{c}{\mu(Q)}.$$

A_p^{dy} como condición necesaria

Ejemplo:



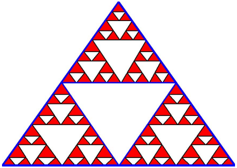
$$h_Q^1(x) := \frac{4}{\sqrt{42}}(3^{j+1})^{1/2}\left(1\chi_{Q_1'}(x) + 1/4\chi_{Q_2'}(x) - 5/4\chi_{Q_3'}(x)\right),$$

$$h_Q^2(x) := \frac{3}{\sqrt{14}}(3^{j+1})^{1/2}\left(-2/3\chi_{Q_1'}(x) + 1\chi_{Q_2'}(x) - 1/3\chi_{Q_3'}(x)\right),$$

A_p^{dy} como condición necesaria

Ejemplo:

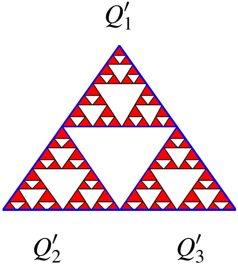
Q_1'



Q_2' Q_3'

$$-\sum_{h\text{``}\in\text{''}Q} h(x)h(y) = \frac{1}{\mu(Q)}.$$

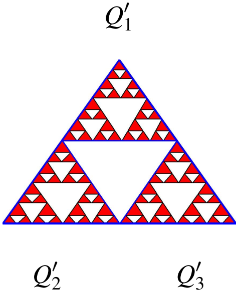
$A_p^{\mathbf{dy}}$ como condición necesaria



COROLARIO

Si F es el triángulo de Sierspinski, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{H}$ como en las construcciones precedentes. Entonces $w \in A_p^{dy}$ si y sólo si la familia $T_{0,0}^{\vartheta,0,F,1}$ está acotada uniformemente en $L^p(wd\mu)$ para toda sucesión $\vartheta = \{\vartheta_Q^m\}$ con $\left|\vartheta_Q^m\right| = 1$.

A_p^{dy} como condición necesaria



MUCHAS GRACIAS POR SU ATENCIÓN