

MÉTRICAS DIFUSIVAS ASOCIADAS AL TRANSPORTE PÚBLICO EN AMBA EN EL CONTEXTO COVID-19

FLORENCIA ACOSTA, HUGO AIMAR, MAGALY CATANZARITI, RAQUEL CRESCIMBENI,
IVANA GÓMEZ, FEDERICO MORANA, LUIS NOWAK, RICARDO PLANK,
AND ALEJANDRA PERINI

RESUMEN. Este trabajo tiene por objeto ilustrar y mostrar una herramienta informática basada en análisis armónico discreto que, alimentada con datos precisos de hábitat y conectividad de las diferentes ciudades que integran el AMBA, puede ser útil para predecir y para simular resultados de intervenciones gubernamentales en pos de disminuir, atenuar y demorar la evolución de la pandemia en el mayor conglomerado urbano de la Argentina. Observamos también que el esquema puede adecuarse a barrios de ciudades y a barrios dentro de las 41 ciudades que integran el AMBA. La técnica básica es la construcción de métricas difusivas que permiten medir distancias entre distintas ciudades en términos que no son los geográficos usuales y bosquejar posibles dinámicas de la propagación de la pandemia en grandes escalas. Al mismo tiempo pueden simularse las métricas que se obtendrían suprimiendo o disminuyendo conectividades entre distintos distritos.

1. INTRODUCCIÓN

En una comunidad como la de AMBA, con una gran población pero sobre todo con una notable heterogeneidad social y habitacional, no es de esperar, y es evidente por los datos dentro de CABA, que exista un R_0 único independiente del conglomerado urbano en consideración. Por otra parte, los intentos de generar un medio homogéneo teórico con un R_0 promedio corren el riesgo de inducir medidas sanitarias de testeo y aislamiento que sean ineficientes por defecto en algunos lugares o innecesarias por exceso en otros. De esto resulta claro que si se toman las medidas sanitarias y de aislamiento que corresponden al peor R_0 , entonces toda la sociedad estará mejor protegida contra la pandemia.

Los modelos SIR o sus generalizaciones son buenos predictores frente a concentraciones urbanas homogéneas con un R_0 que represente bien los intervalos de duplicación de la pandemia en toda la población. Es claro que, pensando en los 41 municipios que integran AMBA, así como entre los distintos barrios de CABA, tal homogeneidad es inexistente.

Key words and phrases. COVID-19, AMBA-Argentina, difusión, Laplaciano, metrización.

This work was supported by the Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación de la Nación-MINCYT in Argentina: CONICET and ANPCyT; UNCOMA and UNL.

Entonces puede considerarse el problema de resolver SIR dentro de subregiones o subpoblaciones que puedan considerarse homogéneas. Pero estos diferentes conglomerados urbanos homogéneos tienen momentos de inicio de los contagios diferentes. Lo hemos observado empíricamente por el tiempo que transcurrió entre los ingresos del virus por infectados en viajes internacionales y el inicio de la pandemia en Villa 31 de Retiro en CABA.

Esto plantea problemáticas de diferentes escalas. Una intracomunitaria dentro de cada comunidad homogénea con los métodos de Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias de tipo SIR y al menos otra intercomunitaria que nos permita detectar el tiempo inicial de la pandemia en cada una de las comunidades de un conglomerado mucho mayor.

El AMBA, con sus 41 localidades, 40 del conurbano bonaerense más CABA ofrece una macroestructura suficientemente grande y diversa como para hacer una primera aproximación a la modelización de la manera en la que la pandemia se difunde entre estas 41 localidades. Hay muchos aspectos que con abundancia de datos pueden ponerse en consideración para identificar características propias de cada localidad. Y hay muchos otros aspectos que pueden caracterizar el grado de conectividad entre poblaciones diferentes. Es casi innecesario enfatizar sobre el papel central que CABA ejerce sobre el sistema dado el grado de conectividad de CABA con todas las otras 40 poblaciones de AMBA.

Un primer modelo elemental que puede dar cuenta de características propias de cada comunidad y del grado de conectividad entre ellas para formar un grafo ponderado es el siguiente. Consideramos modelos con varias características básicas de cada localidad, uniformidad, población, densidad de infectados activos en una fecha fija, etcétera. En cuanto a la ponderación de las aristas del grafo que guarda alguna relación con el movimiento de personas entre un distrito y otro, consideramos cantidad y calidad de transporte público que une cada una de las 41 ciudades con cualquier otra. Así obtenemos dos entidades matemáticas: un vector de 41 entradas con la normalización a probabilidad de las características de cada población de cada una de las 41 localidades y una matriz simétrica con 1681 entradas y diagonal nula, en la que en la entrada i, j hay una ponderación de la conectividad vía transporte público entre las localidades i y j . Consideramos en este punto que, aunque algunos de los medios de transporte público que en normalidad funcionan y hoy están restringidos por medidas preventivas, el coeficiente que pondera una arista definido en términos del transporte público, tiene todavía una representación de la cantidad de viajes que se realizan por transporte privado bajo las restricciones que impone COVID-19.

Estos dos datos permiten calcular el operador de Laplace del grafo y su análisis espectral. Desde esta estructura se pueden construir métricas, la de Coifman-Lafon [CL06] o la de Frink [AAG20]. La primera se ha dado en llamar “métrica difusiva” y, ambas dan una noción de cercanía entre dos localidades que no siempre se corresponde con la distancia geográfica y que podría sugerir cuáles localidades son cercanas para el avance de COVID-19. En esta primera parte del trabajo abordamos esta parte del análisis.

Por otro lado, a partir de datos recopilados en <http://www.el1digital.com.ar/.../90161-el-mapa-del-coronavirus-en-el-conurbano> y el análisis espectral, autovalores y autovectores del Laplaciano en el grafo de 41 vértices y 1681 aristas, podemos resolver explícitamente la ecuación de difusión con condición inicial dada por el dato diario en esa página web. Exactamente como si fuera la difusión de la energía térmica en una barra metálica heterogénea, aislada y con una distribución inicial dada. Resulta claro que NO estaríamos midiendo aquí el número de infectados en cada localidad sino sólo veremos cómo es el frente de propagación de la pandemia con el transcurso del tiempo, y eventualmente cuáles serían las localidades a las que la pandemia llegaría antes si no se interrumpen algunas o varias de las conectividades que la matriz describe.

Para armar la matriz de conectividad se han utilizado datos de todos los medios de transporte públicos en AMBA comprendidos por el Sistema Único de Boleto Electrónico (SUBE), provistos por el Ministerio de Transporte de la Nación.

Organizamos este trabajo de la siguiente manera: en la Sección 2 introducimos brevemente el modelo matemático en sus tres componentes principales, que son el operador de Laplace, la ecuación de Difusión y la métrica difusiva. En la Sección 3 exhibimos y ponemos a consideración la matriz de conectividad construida para AMBA con datos SUBE, y el vector de ponderación de cada una de las 41 localidades. Además exponemos para algunos valores del tiempo las métricas difusivas y graficamos bolas métricas de diferentes radios que permiten dar una idea de proximidad o lejanía vistas con la dinámica del avance del virus para diferentes localidades de AMBA. En otros informes se mostrarán resultados de metrización por el método de Frink desarrollado en [AAG20] y se incluirán ejemplos de modificación de estas métricas si se instrumentan medidas de aislación o restricción de algunas localidades.

2. EL OPERADOR DE LAPLACE, LA MÉTRICA DIFUSIVA Y LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN EN EL GRAFO AMBA

Esta sección es la más teórica, aunque sencilla, y tiene por objeto fijar la terminología y fijar el contexto.

Sea $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_{41}\}$ el conjunto de las ciudades (partidos) que constituyen el AMBA (Área Metropolitana Buenos Aires).

A cada $c_i \in \mathcal{C}$ le corresponde un número positivo a_i entre cero y uno que representa a la normalización de la característica particular de la población de la ciudad c_i . La normalización es probabilística: $\sum_{i=1}^{41} a_i = 1$. Denotamos por \vec{a} al vector de componentes a_i .

Además de la ponderación de cada ciudad, hemos cuantificado el flujo urbano entre cada par de ciudades c_i y c_j en términos de los viajes realizados entre ellas utilizando el transporte público en un día de semana típico previo al aislamiento impuesto por la pandemia, a partir del análisis de datos provistos por el Sistema Único de Boleto Electrónico (SUBE). Esto nos da una matriz de 41×41 entradas que mide, de algún modo, el grado de conectividad entre c_i y c_j para cada $i = 1, 2, \dots, 41$ y para cada $j = 1, 2, \dots, 41$. Cada uno de los pesos en esta matriz $\overline{\overline{W}}$ se denota con w_{ij} .

Dado que para nuestro modelo nos interesa conocer cual es la movilidad entre cualquier par de ciudades, independientemente de cual es el distrito de origen y de cual es el de destino, la matriz resulta simétrica. Y como esta tiene en cuenta sólo el tráfico intercomunitario, entonces su diagonal es nula. Por lo tanto, $\overline{\overline{W}}$ contiene un total de 820 datos de conectividad. En la Sección 3 la escribiremos explícitamente. Esta matriz también está normalizada a probabilidad, en el sentido que $\sum_{i=1}^{41} \sum_{j=1}^{41} w_{ij} = 1$.

Esta doble estructura de concentración y afinidad genera métricas naturales en el conjunto de los vértices (ciudades) que pueden dar una idea de proximidad entre ellos que no coincide con la geográfica pero que es más realista en términos de la conectividad del grafo.

La construcción de la métrica se basa en la posibilidad de modelizar difusiones en el grafo. Para esto un operador de Laplace definido sobre funciones reales sobre el grafo es la pieza clave. Sea $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida en los vértices o, si se quiere, un vector con 41 entradas reales cualesquiera. El Laplaciano de f es otra función real definida sobre \mathcal{C} por

$$\Delta f(i) = \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^{41} w_{ij}(f(j) - f(i)).$$

Así definido, el operador Laplaciano es semidefinido negativo y simétrico (autoadjunto). Entonces existe una sucesión finita de escalares no positivos $\lambda_0 = 0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ y una sucesión finita de funciones $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ definidas en \mathcal{C} tales que

$$\Delta \phi_i = \lambda_i \phi_i \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

y $\{\phi_i\}$ es una base de \mathbb{R}^{41} el espacio de todas las funciones definidas en \mathcal{C} . En algún sentido, que el análisis armónico estudia y usa desde hace mucho tiempo, toda la información contenida en nuestros datos \vec{a} y $\overline{\overline{W}}$ se encuentra resumida y organizada jerárquicamente en la resolución espectral $\{\lambda_i, \phi_i\}$ que se obtiene por métodos algebraicos del operador de Laplace.

En particular es ahora sencillo resolver la ecuación de difusión con condición inicial $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(D) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u; & u(i, t); i = 1, 2, \dots, 41; t > 0 \\ u(i, 0) = g(i) \end{cases}$$

Es fácil ver que $u(j, t) = \sum_{i \geq 0} e^{t\lambda_i} \langle g, \phi_i \rangle \phi_i(j)$, donde $\langle g, \phi_i \rangle = \sum_{l=1}^{41} a_l g(l) \phi_i(l)$. Esta fórmula provee una difusión que muestra cómo se propaga con el transcurso del tiempo una “señal” inicial g definida en \mathcal{C} .

Pero esta fórmula induce también una familia de métricas en \mathcal{C} . Son llamadas métricas difusivas y se deben a Coifman y Lafon [CL06]. Para tiempo t positivo y fijo definimos la distancia difusiva a tiempo t entre las ciudades c_i y c_j por la fórmula

$$d_t(i, j) = \sqrt{\sum_{l \geq 0} e^{2t\lambda_l} [\phi_l(i) - \phi_l(j)]^2}.$$

Es sencillo probar que d_t es una métrica y resulta claro que, puesto que los λ_l son menores o iguales que cero, cuando t crezca la métrica desdibujará el papel de las autofunciones que no correspondan al autoespacio del autovalor cero.

Cuando una métrica está dada en el conjunto \mathcal{C} , una idea de la geometría, de la proximidad y del vecindario de una localización lo proveen las bolas métricas. Para $t > 0$ denotamos con $B_t(i, r)$, para $i = 1, 2, \dots, 41$ y $r > 0$ al conjunto

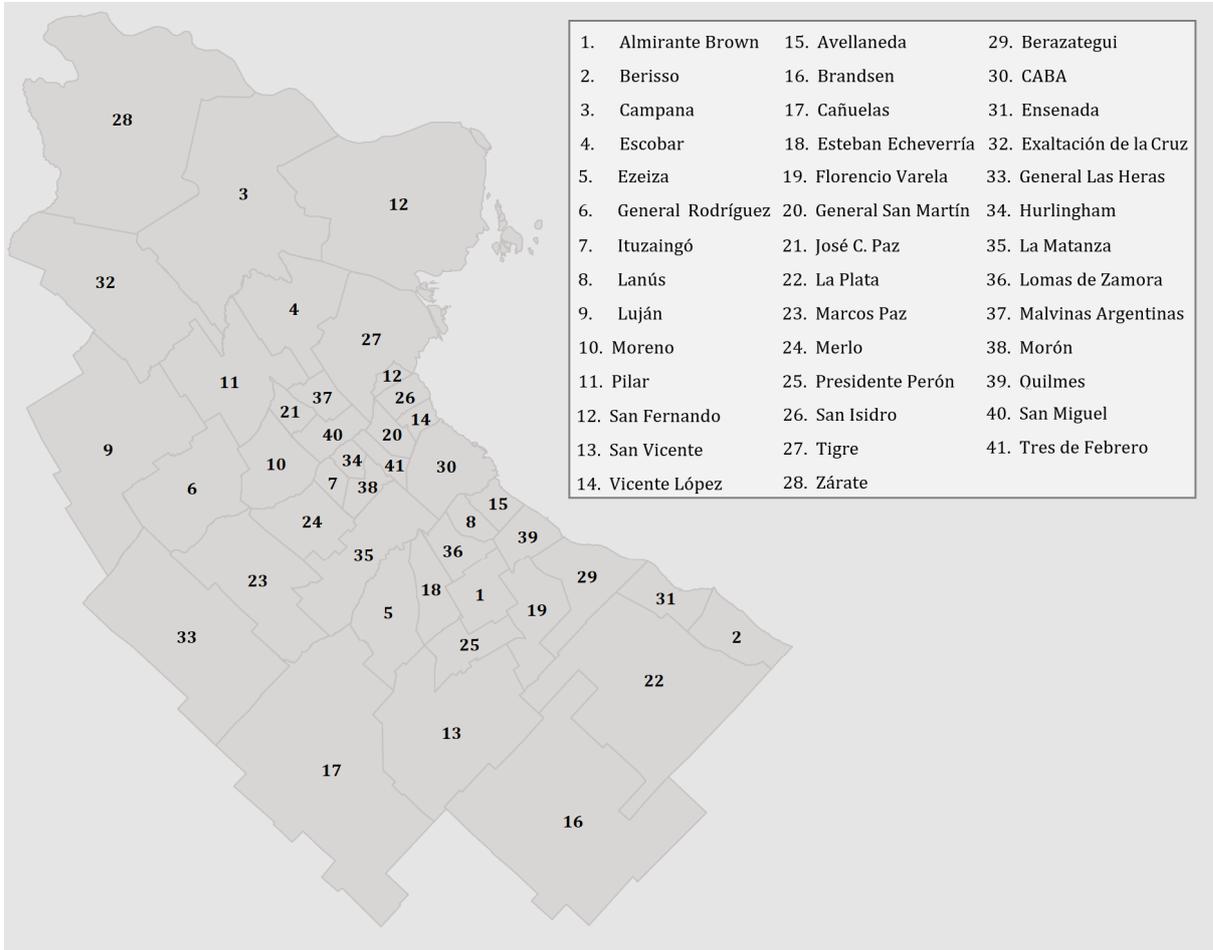
$$B_t(i, r) = \{j : d_t(i, j) < r\}.$$

Las coronas métricas, que nos proveen una idea de cambio de la forma y el tamaño de las bolas a tiempo fijo y cuando r aumenta, son los conjuntos

$$C_t(i, r, R) = B_t(i, R) \setminus B_t(i, r) = \{j : r \leq d_t(i, j) < R\}.$$

3. CONECTIVIDAD Y DENSIDAD AMBA (T,D) (TRANSPORTE Y DENSIDAD)

El siguiente mapa y sus referencias indican la numeración de los vértices en la construcción de los datos \vec{a} y $\overline{\overline{W}}$ correspondientes a AMBA.



Para completar la matriz de conectividad se usaron los datos de SUBE del día 4 de marzo de 2020 (previo a la disposición ASPO). A partir del análisis de los registros de utilización de la tarjeta SUBE en los medios de transporte público (trenes, colectivos y subte) logramos estimar la cantidad de personas que se movilizaban por tales medios entre cada par de distritos del AMBA. La entrada w_{ij} consigna entonces el número de pasajeros que hubo en ese día entre los distritos c_i y c_j . Luego de la normalización a probabilidad, se obtiene la siguiente matriz

$$\overline{\overline{W}} = \begin{pmatrix} W^1 & W^3 \\ W^2 & W^4 \end{pmatrix}$$

donde la matriz W^1 es la siguiente

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
1	0	2.9305E-06	0	7.9543E-06	0.00033827	4.1865E-06	6.6984E-06	0.00260524	2.0932E-06	2.2607E-05	1.0048E-05	1.8839E-05	0.00077157	0.00017458	0.00156784	2.3026E-05	2.2188E-05	0.0017512	0.00148662	5.6517E-05	9.2102E-06
2	2.9305E-06	0	0	0	1.2559E-06	0	0	2.9305E-06	0	8.737E-07	4.1865E-07	0	4.1865E-07	8.737E-07	4.6051E-06	8.737E-07	0	2.0932E-06	1.2978E-05	0	0
3	0	0	0	0.00035418	0	1.0048E-05	1.1895E-07	8.737E-07	1.2978E-05	1.2978E-05	9.5033E-05	7.117E-06	0	1.1303E-05	4.1865E-07	0	4.1865E-07	4.1865E-07	4.1865E-07	5.0328E-06	1.2559E-06
4	7.9543E-06	0	0.00035418	0	2.5119E-06	4.3121E-05	9.6399E-06	6.2707E-06	1.2141E-05	0.00015871	0.00235511	0.00022146	4.1865E-07	0.00068449	6.2797E-06	0	0	8.2102E-06	5.8611E-06	0.0001355	0.00060076
5	0.00033827	1.2559E-06	0	2.5119E-06	0	8.737E-07	5.8611E-06	0.00043744	1.1895E-07	1.6372E-05	3.3492E-06	6.6984E-06	7.4519E-05	3.1817E-05	0.00020849	4.1865E-07	0.0004199	0.00016121	9.294E-05	1.5071E-05	5.0328E-06
6	4.1865E-06	0	1.0048E-05	4.3121E-05	8.737E-07	0	6.2797E-06	0.00024888	0.00018715	0.00050094	1.549E-05	0	1.6746E-06	0	1.6746E-06	0	1.6746E-06	0	1.6746E-06	4.1865E-07	8.737E-07
7	6.6984E-06	0	4.1865E-07	9.6289E-06	5.8611E-06	6.2797E-06	0	1.2978E-05	8.737E-07	0.00122999	2.6793E-05	1.1722E-05	1.2559E-06	5.9448E-05	9.2102E-06	0	8.737E-07	1.8839E-05	4.6051E-06	5.8611E-05	4.3539E-05
8	0.00260524	2.9305E-06	8.737E-07	6.2797E-06	0.00042744	5.0328E-06	1.2978E-05	0	8.737E-07	3.098E-05	1.2559E-05	1.4653E-05	0.0002156	0.00013439	0.00435645	5.8611E-06	2.5119E-05	0.00095954	0.00079459	6.1123E-05	1.549E-05
9	2.0932E-06	0	1.2978E-05	1.2141E-05	4.1865E-07	0.00041488	8.737E-07	0	0.00025496	0.00011136	1.6746E-06	0	6.6984E-06	3.3492E-06	0	1.6746E-06	0	0	1.6746E-06	4.1865E-07	8.737E-07
10	2.2607E-05	8.737E-07	1.2978E-05	0.00025872	1.6327E-05	0.00187135	0.00122999	3.098E-05	0.00025496	0	0.00135728	0.00025956	1.6746E-06	0.000723	4.8144E-05	0	3.7678E-06	0	1.6746E-06	0.00060603	0.00011004
11	1.0048E-05	1.1895E-07	9.5033E-05	0.00035531	3.3492E-06	0.00055094	2.6793E-05	1.2559E-06	0.0001138	0.00135728	0	0.00012936	1.6746E-06	0.000916	1.842E-05	0	4.1865E-07	1.0486E-05	1.2141E-05	0.00018002	0.00150211
12	1.8839E-05	0	7.117E-06	0.00022146	6.6984E-06	1.549E-05	1.1722E-05	1.4653E-05	1.6746E-06	0.00023956	0.00013998	0	8.737E-07	0	0.00093955	2.0095E-05	0	1.5071E-05	1.8002E-05	0.00011345	0.00017751
13	0.00077157	1.2559E-06	0	4.1865E-07	4.3121E-05	0	1.2559E-06	0.0002156	0	1.6746E-06	1.6746E-06	8.737E-07	0	1.1722E-05	9.8801E-05	0.00015406	0.000238E-06	0.00013439	2.7212E-05	3.3492E-06	8.737E-07
14	0.00017458	8.737E-07	1.1303E-05	0.0008449	3.1817E-05	5.1949E-05	5.9448E-05	0.00013439	6.6984E-06	0.000723	0.000916	0.00093065	1.1722E-05	0	0.00010424	0	4.1865E-06	0.00013104	0.0001189	0.00025133	0.00077157
15	0.00156784	4.6051E-06	4.1865E-07	6.2797E-06	0.00020849	7.5357E-06	9.2102E-06	0.00435645	3.3492E-06	4.8144E-05	1.842E-05	2.0095E-05	9.8801E-05	0.00010424	0	2.9305E-06	1.0048E-05	0.00041362	0.00010529	5.4006E-05	2.1351E-05
16	2.3026E-05	8.737E-07	0	4.1865E-07	0	0	5.8611E-06	0	0	0	0	0	0.00015406	0	2.9305E-06	0	3.7678E-06	6.2797E-06	0	0	0
17	2.2188E-05	0	4.1865E-07	0	0.0004199	4.1865E-07	8.737E-07	2.5119E-05	0	3.7678E-06	4.1865E-07	0	5.0328E-06	4.1865E-06	1.0048E-05	0	0	0.00012852	4.1865E-06	8.737E-07	0
18	0.0017512	2.0932E-06	4.1865E-07	9.2102E-06	0.00016121	5.4424E-06	1.8839E-05	0.00095954	1.6746E-06	2.6793E-05	1.0466E-05	1.5071E-05	0.00013439	0.00013104	0.00041362	3.7678E-06	0.00012852	0	0.00019258	6.1646E-05	1.0466E-05
19	0.00148662	1.2978E-05	4.1865E-07	5.8611E-06	9.294E-05	1.6746E-06	4.6051E-06	0.00079459	1.1895E-07	1.1722E-05	1.2141E-05	1.8002E-05	2.7212E-05	0.0001189	0.00010529	6.2797E-06	4.1865E-06	0.00019258	0	3.8516E-05	7.9543E-06
20	5.6517E-05	0	5.0328E-06	0.0001055	1.5071E-05	4.1027E-05	5.8611E-05	6.1123E-05	8.737E-06	0.00060603	0.00018002	0.00011345	3.3492E-06	0.00025133	5.4006E-05	0	8.737E-07	6.1646E-05	3.8516E-05	0	0.00054215
21	9.2102E-06	0	1.2559E-05	0.00060076	5.0328E-06	0.00017876	4.3539E-05	1.549E-05	4.5214E-05	0.00021104	0.00050121	0.00017751	8.737E-07	0.00077157	2.1351E-05	0	0	1.0466E-05	7.9543E-06	0.00054215	0

la matriz W^2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
22	0.000010179	0.00297449	1.6746E-06	5.8611E-06	1.842E-05	1.6746E-06	4.6051E-06	0.00011052	2.0932E-06	1.6746E-06	1.0048E-05	8.737E-07	2.2607E-05	3.5885E-05	0.00028049	4.31207E-05	4.1865E-06	6.1123E-05	0.00105039	1.0932E-05	7.117E-06
23	5.0328E-06	0	2.0932E-06	1.2559E-06	1.6746E-06	6.6289E-06	3.391E-05	3.7678E-06	1.2559E-06	8.1636E-05	4.1865E-06	2.0932E-06	0	9.2102E-06	1.6746E-06	0	1.4653E-05	3.4422E-06	4.1865E-07	1.0048E-05	3.7678E-06
24	2.5119E-05	4.1865E-07	2.2559E-06	2.9566E-05	1.9358E-05	0.00022774	0.0018071	5.9448E-05	2.575E-05	0.00031192	0.00011597	3.098E-05	2.5119E-06	0.00027086	6.488E-05	4.18648E-07	4.6051E-06	5.4424E-06	1.0885E-05	0.00025747	6.824E-05
25	0.00024763	0	0	1.2559E-06	0.00012476	0	1.6746E-06	0.00030143	0	2.9305E-06	4.1865E-07	2.0932E-06	0.00039185	2.8468E-05	0.00015239	1.2559E-06	7.5357E-06	0.00012518	3.0143E-05	1.2559E-06	0
26	7.7031E-05	0	1.549E-05	0.00085697	2.2607E-05	4.8144E-05	8.3311E-05	6.9077E-05	7.5357E-06	0.00069747	0.00071966	0.00030828	3.7678E-06	0.0042219	6.0285E-05	0	1.2559E-06	7.8706E-05	7.4938E-05	0.00025389	0.00055011
27	3.391E-05	0	0.8335E-05	0.00021643	9.2102E-06	4.647E-05	2.7121E-05	3.6004E-05	7.5357E-06	0.0009093	0.00018366	0.000389	2.9305E-06	0.00020835	2.7631E-05	0	8.737E-07	3.5166E-05	2.5119E-05	0.0006712	0.00137588
28	8.737E-07	4.1865E-07	0.00046177	5.1072E-05	8.737E-07	2.9305E-06	0	4.1865E-07	3.3492E-06	1.2559E-06	8.737E-06	2.0932E-06	0	5.4424E-06	1.2559E-06	0	0	0	8.737E-07	4.1865E-07	5.0328E-06
29	0.00148662	1.2978E-05	4.1865E-07	1.2559E-06	2.6793E-05	4.1865E-06	2.0932E-06	0.00010486	4.1865E-07	1.3397E-05	1.1895E-06	8.7918E-06	1.6237E-05	5.4006E-05	0.00084478	2.51189E-06	2.0932E-06	1.2559E-06	0.00028049	2.0932E-06	2.5119E-06
30	0.01449697	0.00018002	0.00018127	0.00173797	0.0015335	0.00092019	0.00254119	0.01654537	0.00039373	0.00974489	0.0003264	0.00024943	0.00111156	0.01877383	0.01543773	2.8692E-06	0.00023984	0.00078651	0.00081284	0.0108907	0.0043958
31	1.6746E-06	0.00014736	0	0	2.0932E-06	0	2.9305E-06	0	8.737E-07	4.1865E-07	8.737E-07	4.1865E-07	8.737E-07	2.0932E-06	4.6051E-06	0	0	0	4.1865E-07	1.9358E-05	4.1865E-07
32	0	0	5.0328E-06	3.7678E-05	0	1.0885E-05	0	1.2559E-06	4.3599E-05	1.4653E-05	0.00020639	4.1865E-07	0	4.1865E-06	0	0	0	0	0	0	0
33	4.1865E-07	0	0	0	0	8.737E-07	4.1865E-07	0	4.1865E-07	1.1303E-05	0	0	0	1.2559E-06	0	0	0	0	0	0	0
34	1.2559E-06	0	1.2559E-06	2.8048E-05	3.7678E-06	5.4424E-05	0.0003705	9.6289E-06	2.2188E-05	0.0003705	9.5033E-05	1.4234E-05	1.6746E-06	9.0847E-05	1.2978E-05	0	4.1865E-07	3.4329E-05	9.6289E-06	0.0009646	0.00028677
35	0.00043874	2.5119E-06	0.000238E-06	3.7678E-05	0.00040106	0.00062044	0.00040651	1.5909E-05	0.0014165	8.2474E-05	8.2474E-05	3.0561E-05	0.00072761	0.00020683	8.7295E-07	0.00039939	0.00015874	0.00016871	0.000663	0.0001189	0
36	0.00070033	5.0328E-06	2.0932E-06	4.1865E-05	0.00112407	1.2978E-05	3.2855E-05	0.00020328	2.5119E-06	8.9991E-05	3.2336E-05	5.1912E-05	0.00040441	0.00044837	0.00148118	1.46527E-05	7.6402E-05	0.00077216	0.00082025	0.00023151	3.6004E-05
37	1.3397E-05	8.737E-07	2.5119E-05	0.00110146	4.6051E-06	2.7811E-05	2.7121E-05	1.6746E-06	6.2797E-06	0.00054901	0.000163757	0.0002604	4.1865E-07	0.00243577	2.0514E-05	4.18648E-07	0	1.0885E-05	1.1303E-05	0.00034415	0.00020239
38	6.824E-05	4.1865E-07	1.6746E-06	3.0143E-05	2.0514E-05	0.00011778	0.00268772	4.1446E-05	2.3026E-05	0.00215687	0.00010341	2.6375E-05	2.9305E-06	0.00011094	4.4377E-05	0	5.4424E-06	0.0001335	3.6422E-05	0.00023808	0.00029808
39	0.0034978	2.0095E-05	4.1865E-07	6.6984E-06	8.9991E-05	1.6746E-06	7.5357E-06	0.00173571	2.5119E-06	2.177E-05	1.3397E-05	1.8839E-05	4.3539E-05	0.0001369	0.000431751	4.18648E-07	9.6289E-06	0.00023947	0.000465787	4.3121E-05	1.0885E-05
40	1.4653E-05	0	5.4424E-06	0.00041111	5.0328E-06	8.4985E-05	0.0001796	1.6327E-05	1.7165E-05	0.0031824	0.00070165	0.00022146	0	0.00058904	1.8839E-05	0	0	9.6289E-06	1.0885E-05	0.00059867	0.00471606
41	6.824E-05	0	4.1865E-07	4.2702E-05	2.9724E-05	6.1123E-05	0														

La matriz $\overline{\overline{W}}$ ha sido normalizada a probabilidad.

En cuanto al vector \vec{a} de ponderación de cada nodo que admite una gran diversidad de realizaciones, consideramos aquí tres casos particulares que pueden resultar relevantes:

(a.u) (uniforme) considera indistinguibles los 41 nodos de AMBA, $a_i = \frac{1}{41}$ para todo i ;

(a.p) (población) considera la población de cada distrito normalizada a probabilidad,

(a.p)=[3.579363480758277621e-02, 5.788394180180012928e-03,
6.318203353702244243e-03, 1.526833299263768116e-02, 1.311090646093637617e-02,
6.566197863464147584e-03, 1.082927316897536532e-02, 2.770421312323734925e-02,
7.171369114657205959e-03, 3.242490803462106524e-02, 2.263657730464147325e-02,
1.046826547204704472e-02, 4.618755579951293148e-03, 1.602147489990880455e-02,
2.133315455541013109e-02, 1.856995818571933500e-03, 3.766367981831693704e-03,
2.220158427967411710e-02, 3.095184578728080865e-02, 2.545580139847833379e-02,
1.840313204555365373e-02, 4.273592475524534001e-02, 3.978567001166944707e-03,
3.629908149849021132e-02, 6.340111630451666404e-03, 1.749214280006333028e-02,
2.771444895745634254e-02, 7.667657427579228566e-03, 2.189456911178398746e-02,
1.841041086099826918e-01, 3.698248804397697657e-03, 2.187535447561851296e-03,
1.042259329947925993e-03, 1.158762278137545100e-02, 1.365492608500590843e-01,
3.880710031686192274e-02, 2.154631131361967392e-02, 1.907289081208175460e-02,
3.979303262926556922e-02, 1.820434137045848569e-02, 2.059539632880732010e-02,
];

(a.i/p) (densidad de infectados) considera la normalización del cociente infectados/población total en cada distrito,

(a.i/p)=[3.205167782096091794e-02, 1.292287926397626963e-02,
5.276182567333032904e-03, 1.906430428862160992e-02, 2.108510440253153970e-02,
1.312566928229969010e-02, 1.696831382900065507e-02, 4.143987482412073153e-02,
1.009061155045549128e-02, 1.231210460920429892e-02, 1.555273215377810450e-02,
2.073796281174820205e-02, 1.179449579680185052e-02, 2.248178499713923348e-02,
6.730776614466740804e-02, 7.005491564916179782e-03, 8.419211419793661000e-03,
2.475667339869822708e-02, 2.046352575528753368e-02, 4.171439609020602401e-02,
1.842357346102988305e-02, 1.133920772758370034e-02, 1.614469975311924252e-02,
1.388754922258063698e-02, 2.564854000481441368e-02, 2.998100992472053569e-02,
1.986149696948652857e-02, 8.801261983164363617e-03, 2.629216885213415608e-02,

1.287020400254462182e-01, 1.451033261375908948e-02, 5.203583095255035970e-03,
2.028276291235305007e-02, 2.497958429825594337e-02, 2.401421674111741539e-02,
3.519878284827589188e-02, 1.735859053412208003e-02, 2.472526919664944436e-02,
3.965957492073578922e-02, 2.469901978987302724e-02, 4.571597255398312382e-02]

Implementamos en `Phyton` el algoritmo para construir la métrica aplicado al vector \vec{a} y a la matriz $\overline{\overline{W}}$ precedentes.

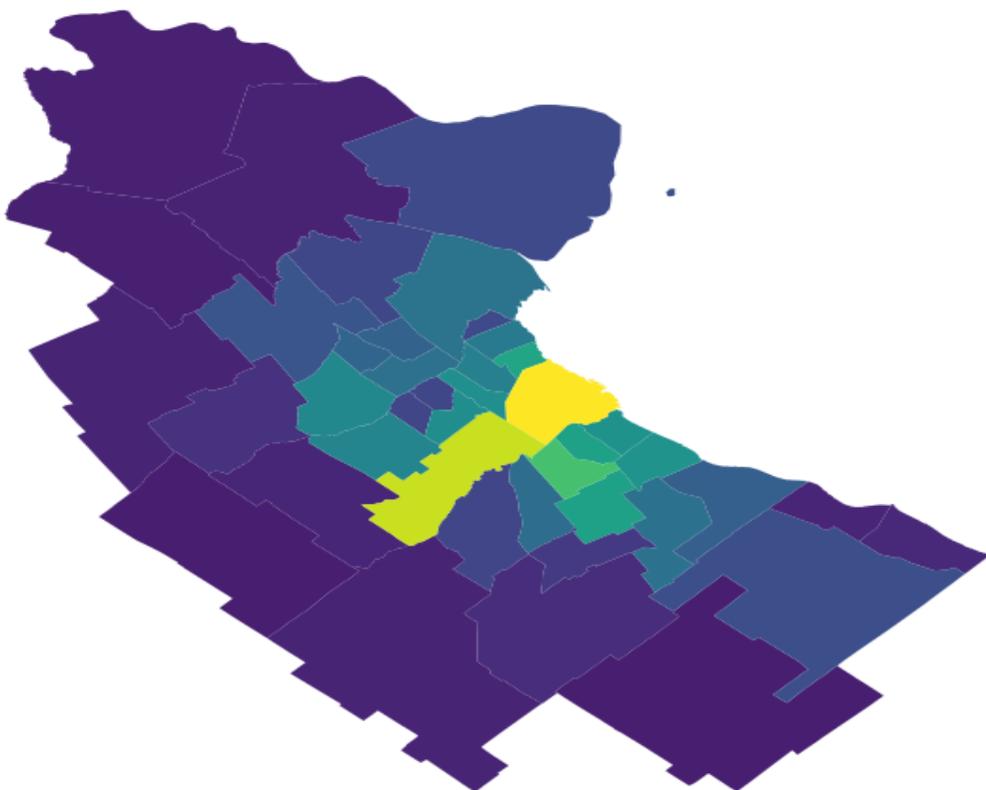
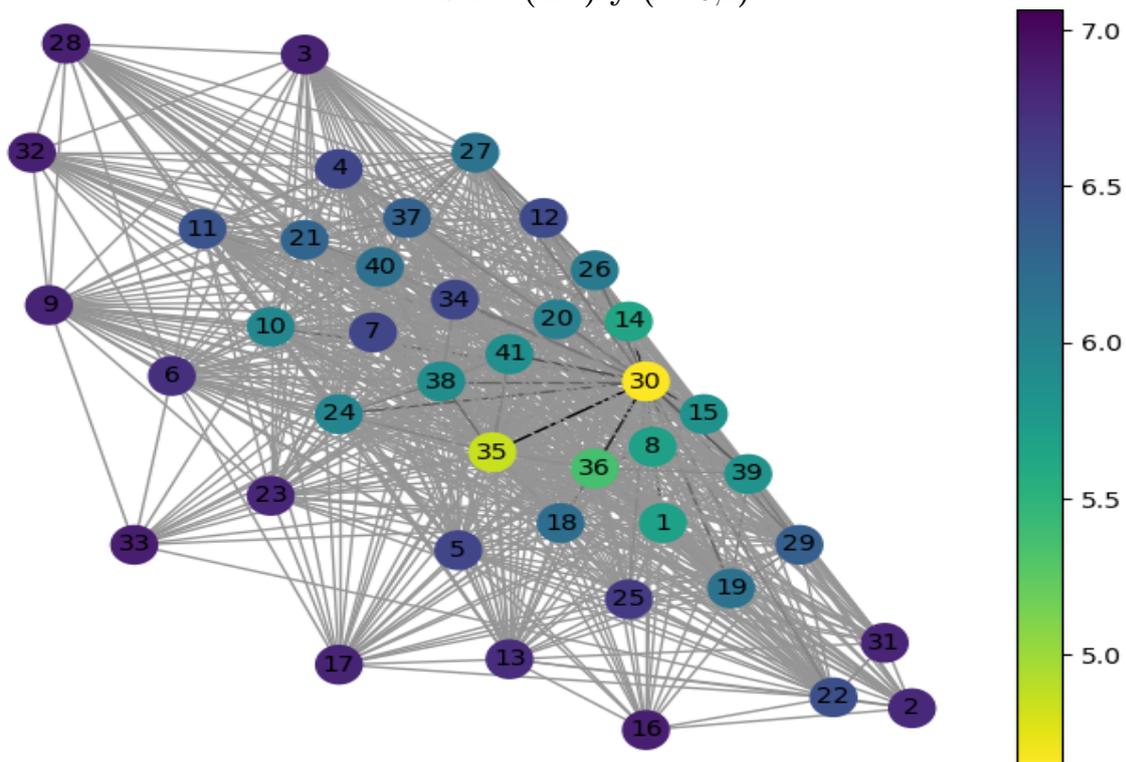
Un parámetro que permanece indefinido en la construcción y que puede usarse para calibrar mejor resolución es el parámetro t que no representa un tiempo real de propagación de la pandemia sino una variable de ajuste de la métrica.

En las gráficas que exhibiremos usaremos la notación **(b.t)** para declarar el valor de t en el que se construye la métrica difusiva.

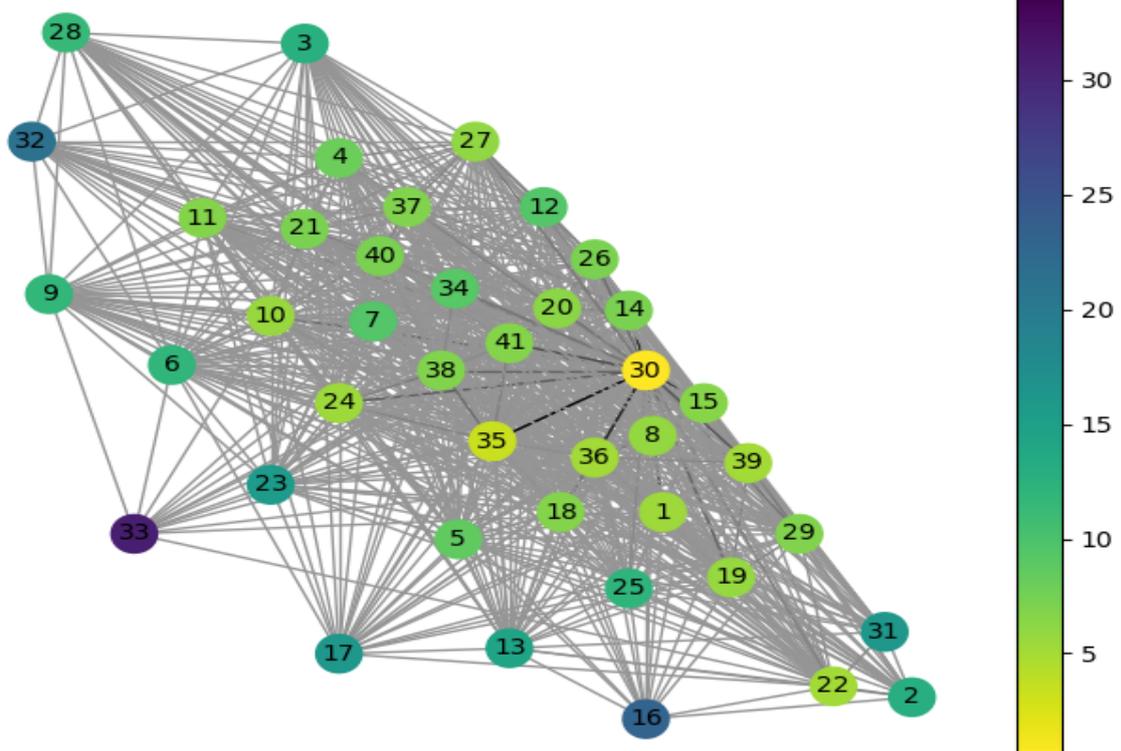
Otro parámetro de representación que permite ver con claridad las localizaciones próximas y lejanas, en esta métrica particular, desde un nodo fijo es el radio de las bolas. Usaremos aquí una notación cromática que queda determinada en cada gráfica.

Los gráficos que exhibimos están todos centrados en CABA, que tiene el número 30 en la asignación nodal del mapa. Los colores de los nodos corresponden a la “distancia epidemiológica” de los distintos distritos con CABA, en escala gradual entre los valores mínimo y máximo (de más claro a más oscuro). Las aristas están dibujadas en escala de grises de acuerdo a su peso, asignando grises más oscuros a las de mayor peso.

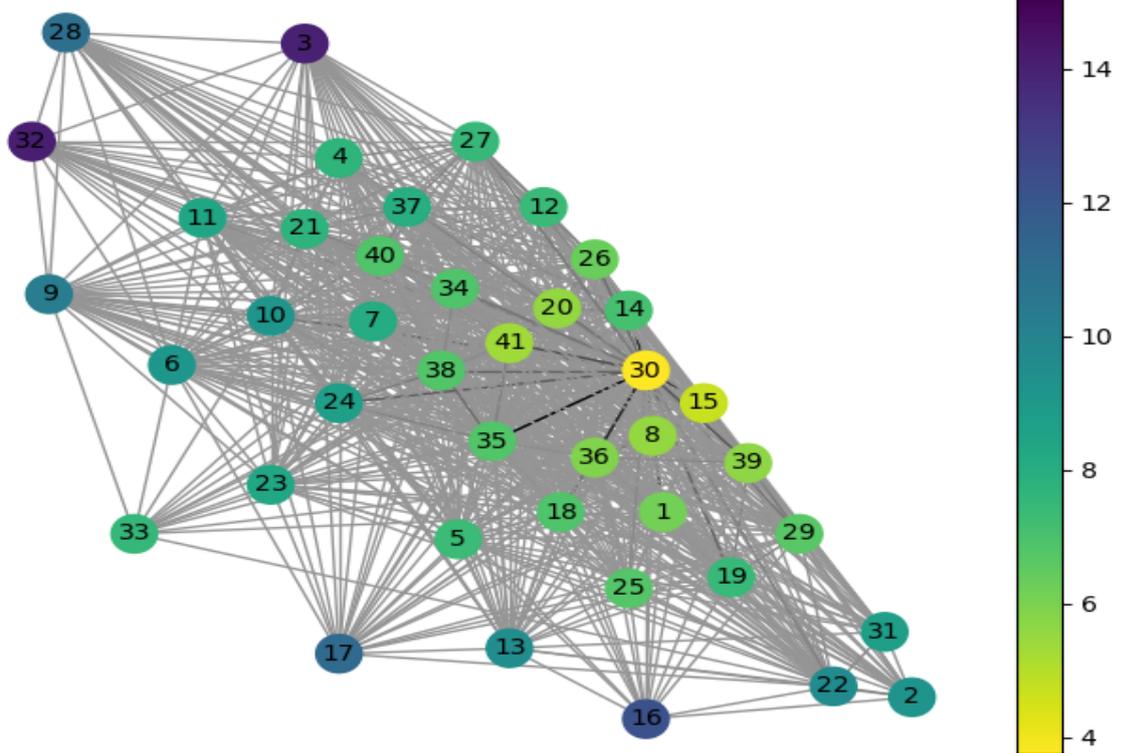
Caso (a.u) y (b. 0,1)



Caso (a.p) y (b. 0,05)



Caso (a.i/p) y (b. 0,01)



REFERENCIAS

- [AAG20] María Florencia Acosta, Hugo Aimar, and Ivana Gómez, *On Frink's type metrization of weighted graphs*, Asian Research Journal of Mathematics (2021).
- [CL06] Ronald R. Coifman and Stéphane Lafon, *Diffusion maps*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **21** (2006), 5–30.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA APLICADA DEL LITORAL, CONICET, UNL.
UAT CONICET SANTA FE.

CCT CONICET Santa Fe, Predio “Alberto Cassano”, Colectora Ruta Nac. 168 km 0, Paraje El Pozo, S3007ABA Santa Fe, Argentina.

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS Y CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE, CONICET; DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA-FAEA-UNCOMA.
Neuquén, Argentina

Contacto e-mail: haimar@santafe-conicet.gov.ar