OPERADORES INTEGRALES SINGULARES Y APROXIMACIONES DE LA IDENTIDAD EN ESPACIOS DE TIPO HOMOGENEO

TRABAJO PRESENTADO PARA OPTAR AL TITULO DE
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

Hugo A. Aimar

Director: Dra. Eleonor Harboure de Aguilera

Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias
Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Febrero 1983

Trabajo realizado como becario del CONICET en el Programa Especial de Matemática Aplicada, Santa Fe.

Este trabajo no hubiera sido posible sin la guía y el esfuerzo brindados por mi directora, la Dra. Eleonor Harboure. Agradezco además, la generosa y amplia colaboración del Dr. Roberto Macías, y el constante estímulo infundido por ambos.

Quiero agradecer especialmente la buena disposición del Dr. Carlos Segovia Fernández al dispensarme el tiempo necesario para discutir varios de los puntos aquí expuestos.

Este trabajo fue realizado en uso de Becas Internas del CONICET en el Programa Especial de Matemática Aplicada en la sede del INTEC (Santa Fe), a cuyo Banco de Dactilógrafas agradezco el mecanografiado de estas páginas.-

INTRODUCCION

En esta tesis se estudian problemas relativos a operadores integrales singulares y aproximaciones de la identidad en espacios de tipo homogéneo. Las técnicas de Calderón-Zygmund para el tratamiento de integrales singulares, han demostrado ser útiles aún en este contexto, ver por ejemplo [CW] y [MS3]. Para la acotación en L^2, las técnicas que requieren el uso de la transformada de Fourier no pueden ser adaptadas, puesto que no se cuenta con estructura algebraica. Sin embargo, en el Capítulo II se demuestra que el método de Cotlar (ver [Co]) puede ser generalizado, si se impone al espacio una condición adicional que llamamos propiedad (P), que consiste en la mayoración de la medida de cualquier corona por su amplitud. En el mismo capítulo se demuestra el tipo débil (1,1) y la acotación en L^p del operador maximal de las truncaciones.

En el Capítulo III se extiende el teorema de Zó (ver [Z]) sobre el tipo débil (1,1) de aproximaciones de la identidad, como consecuencia de un resultado más general (teorema (3.8)) en cuya demostración se usa un lema de cubrimiento tipo Besicovitch para espacios no necesariamente acotados, incluido en el Capítulo I. También se prueba que si la propiedad (P) es satisfecha, este teorema puede ser aplicado para generalizar a espacios de tipo homogéneo, y aún a espacios con menor simetría en la casi-distancia, los resultados conocidos para núcleos radiales en $\mathbb{R}^n$. Asimismo se presentan ejemplos de espacios de tipo homogéneo que carecen de la propiedad (P) en los cuales estas conclusiones no son válidas.

El Capítulo IV está dedicado al estudio del problema de Muckenhoupt de acotación en espacios L^p con pesos de los operadores considerados en los capítulos anteriores. En este sentido se demuestra que, si los núcleos tienen la suavidad adecuada, la condición A_p sobre el peso w

es suficiente para obtener desigualdades en $L^p(X, w\,d\mu)$. Finalmente se prueba que, si el núcleo integral singular satisface una propiedad de suavidad análoga a la condición de Dini en L^r sobre la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$, la acotación en norma p vale para pesos de la clase $A_{p/r'}$.

INDICE

CAPITULO I

ALGUNAS PROPIEDADES BASICAS DE ESPACIOS DE TIPO HOMOGENEO

En este capítulo se introducen las definiciones y los resultados básicos sobre espacios de tipo homogéneo. Se obtiene un lema de cubrimiento que no requiere la propiedad de acotación del conjunto cubierto. Esto permite demostrar un lema tipo Calderón-Zygmund sobre la descomposición de funciones de L^1 en espacios no necesariamente acotados.

Finalmente se introduce una propiedad de los espacios de tipo homogéneo normal, que será denominada "propiedad P", y se dan ejemplos que muestran que muchos de los espacios clásicos satisfacen esta condición.

Una función $d: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ será llamada casi-distancia si existe una constante k tal que

(1.1) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$

(1.2) $d(x,y) = d(y,x)$

(1.3) $d(x,y) \leq k[d(x,z) + d(z,y)]$

para toda terna x,y,z de elementos de X.

Un conjunto X en el que está definida una casi-métrica puede ser dotado de la topología inducida por la métrica asociada a la uniformidad cuya base son los d-entornos de la diagonal de $X \times X: \{(x,y): d(x,y) < 1/n\}$. Para esta topología las bolas con centro en x y radio r, $B(x,r) = \{y \in X: d(x,y) < r\}$, forman un sistema de entornos del punto x.

Diremos que (X,d,μ) es un espacio de tipo homogéneo si d es una casi-distancia definida sobre el conjunto X, μ es una medida positiva definida sobre una σ-álgebra de partes de X que contiene las bolas y se cumple

(1.4) $\qquad 0 < \mu(B(x,2r)) \leq A\,\mu(B(x,r)) < \infty$

donde A es una constante independiente de $x \in X$ y $r > 0$. Nos referiremos a k y A como las constantes del espacio.

Se dice que un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ) es acotado si existen $x_0 \in X$ y $R > 0$ tales que $X = B(x_0,R)$. En este caso toda bola $B(x,r)$ puede escribirse como $B(x,r')$, con $r' = \min\{r, 2kR\}$. En efecto, si $y \in X$ se tiene que

$$d(y,x) \leq k\,[d(y,x_0) + d(x_0,x)] < 2kR\,,$$

entonces, si $r > 2kR$ resulta $B(x,r) = X = B(x,r')$. Por lo tanto en un espacio de tipo homogéneo acotado, convendremos en considerar sólo bolas de radios acotados uniformemente.

Es un hecho conocido el que para espacios de tipo homogéneo, la propiedad de acotación de X es equivalente a que $\mu(X) < \infty$. La demostración es simple y la incluimos pues será usado en el lema (1.1). Veamos la implicación no trivial. Supongamos que la medida de X es finita. Tomemos un punto $x_0 \in X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ elijamos un número R_n suficientemente grande como para que $\mu(X) - \mu B(x_0,R_n) < 1/n$. Si el espacio no es acotado, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un punto $x_n \notin B(x_0, 2kR_n)$ por consiguiente $B(x_n, d(x_n,x_0)/2k) \cap B(x_0, R_n) = \phi$, pues de haber un punto u en esta intersección ocurriría que

$$d(x_n, x_0) \leq k\,[d(x_n, u) + d(u, x_0)] < kR_n + d(x_n, x_0)/2$$

que es imposible por elección de x_n. Es igualmente claro que $B(x_0, R_n) \subset B(x_n, 2k\,d(x_n, x_0))$. Entonces, por (1.4) y la elección de R_n y x_n, obtenemos

$$\mu(B(x_0,R_n)) \leq \mu(B(x_n, 2k\,d(x_n, x_0))) \leq C\,.\,\mu(B(x_n\,, d(x_n\,, x_0)/2k)) < C/n$$

que es absurdo, pues el miembro izquierdo crece a $\mu(X)$ y el derecho tiende a cero cuando n tiende a ∞.

Una estructura de espacio de tipo homogéneo sobre X es suficiente para obtener los lemas de cubrimiento necesarios para la descomposición de Calderón-Zygmund de funciones en $L^1(X,\mu)$.

En [CW] se demuestra el siguiente lema de cubrimiento de conjuntos acotados.

<u>LEMA</u>: Si $E \subseteq X$ es un subconjunto acotado de X y $\{B(x,r(x)) : x \in E\}$ un cubrimiento de E por bolas, entonces existe una sucesión de bolas disjuntas $B(x_i, r(x_i))$ tal que la familia $\{B(x_i, C\,r(x_i))\}$ cubre E. C es una constante que sólo depende de k.

Para obtener el teorema general de aproximaciones de la identidad, necesitamos un lema análogo, pero sin la hipótesis de acotación.

(1.5) <u>LEMA</u>: Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo. Sea $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de bolas en X tal que $E = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha$ es medible y de medida finita. Entonces existe una sucesión $\{B_i\} = \{B(x_i, r_i)\} \subset \mathcal{B}$, posiblemente finita, tal que las B_i son disjuntas y para alguna constante C (que sólo depende de k) se tiene que $E \subset \cup B(x_i, C\,r_i)$. Más aún, toda $B \in \mathcal{B}$ queda incluida en alguna de las $B(x_i, C\,r_i)$.

<u>Demostración</u>: Observemos, en primer lugar, que si Λ es una subfamilia de Γ y B_λ es una bola fija con $\lambda \in \Lambda$, entonces la familia

$$\mathcal{F} = \{B_\alpha : \alpha \in \Lambda \ \text{ y } \ B(x_\alpha, 2k\,r_\alpha) \cap B_\lambda \neq \phi\}$$

es distinta del vacío, y el conjunto $\mathcal{R} = \{r_\alpha : B_\alpha \in \mathcal{F}\}$ es acotado. En efecto: si el espacio X es acotado no hay nada que probar. Si el espacio no es acotado, necesariamente será $\mu(X) = \infty$. Si ocurriera que $\sup \mathcal{R} = \infty$ existiría una sucesión $\{r_j\} \subset \mathcal{R}$ creciente a infinito y $r_j > r_\lambda$ para todo j. Sea

$z \in B_\lambda \cap B(x_j, 2k\, r_j)$, para cualquier punto $y \in B(x_\lambda, r_j)$ es válida la desigualdad

$$d(y,x_j) \le k[d(y,x_\lambda) + k(d(x_\lambda,z) + d(z,x_j))] < 4\,k^3\, r_j \ ,$$

y esto es decir que $B(x_\lambda, r_j) \subset B(x_j, 4k^3\, r_j)$ de donde, por (1.4) y la hipótesis en E se obtiene

$$\mu(B(x_\lambda, r_j)) \le C\,\mu(B(x_j,r_j)) \le C\,\mu(E) < \infty \ ,$$

que es imposible, pues el miembro izquierdo crece a $\mu(X) = \infty$ cuando j tiende a infinito.

Pasemos ahora a la construcción inductiva de la sucesión $\{B_i\}$. Sea $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ y $B_{0,1} = B(x_{0,1}, r_{0,1}) \in \mathcal{B}_1$ tal que

$$2\,\mu(B_{0,1}) > \sup\,\{\mu(B) : B \in \mathcal{B}_1\} \ .$$

Definamos

$$\tilde{\mathcal{B}}_1 = \{B_\alpha = B(x_\alpha, r_\alpha) \in \mathcal{B}_1 : B(x_\alpha, 2k\, r_\alpha) \cap B_{0,1} \ne \phi\} \ ,$$

por la observación anterior, el conjunto $\mathcal{R}_1 = \{r_\alpha : B_\alpha \in \tilde{\mathcal{B}}_1\}$ es acotado y por consiguiente podemos elegir una bola $B_1 = B(x_1, r_1) \in \tilde{\mathcal{B}}_1$ tal que $2\,r_1 > \sup \mathcal{R}_1$. Además si $B = B(x,r) \in \mathcal{B}_1$ y $B \cap B_1 \ne \phi$ entonces $B \subset B(x_1, C\, r_1)$ para una constante C que sólo depende de k . En efecto, supongamos que $r \le k(1+2k)\, r_1$. Si $z \in B$ y $u \in B \cap B_1$ se tiene que

$$d(z,x_1) \le k[d(z,x) + k(d(x,u) + d(u,x_1))] < k[r + k(r + r_1)] \le C\, r_1 \ ,$$

en consecuencia $B \subset B(x_1, C\, r_1)$. Este es siempre el caso puesto que la desigualdad $r > k(1+2k)\, r_1$ no es posible. Si así ocurriera, para $y \in B(x_1, 2k\, r_1) \cap B_{0,1}$ y $u \in B \cap B_1$ se tendría que

$$d(x,y) \le k[d(x,u) + k(d(u,x_1) + d(x_1,y))] < k[r + k(r_1 + 2k\, r_1)] < 2k\, r \ .$$

Por lo tanto $B = B(x,r) \in \tilde{\mathcal{B}}_1$ y $r \in \mathcal{R}_1$, pero

$$2\,r_1 > \sup \mathcal{R}_1 \geq r > k(1+2k)\,r_1 \geq 3\,r_1 \,,$$

lo que es absurdo.

Hipótesis inductiva: Para $i \geq 1$ han sido construidas $B_j = B(x_j, r_j)$ y $B_{0,j} = B(x_{0,j}, r_{0,j})$, $j = 1, 2, \ldots, i$ tales que

(1.6) $\quad B_{0,j} \in \mathcal{B}_j = \{B \in \mathcal{B} : B \cap [B_1 \cup \ldots \cup B_{j-1}] = \phi\}$,

(1.7) $\quad 2\mu(B_{0,j}) > \sup\,\{\mu(B) : B \in \mathcal{B}_j\}$,

(1.8) $\quad B_j \in \tilde{\mathcal{B}}_j = \{B_\alpha = B(x_\alpha, r_\alpha) \in \mathcal{B}_j : B(x_\alpha, 2k\,r_\alpha) \cap B_{0,j} \neq \phi\}$,

(1.9) $\quad 2\,r_j > \sup \mathcal{R}_j$, donde $\mathcal{R}_j = \{r_\alpha : B(x_\alpha, r_\alpha) \in \tilde{\mathcal{B}}_j\}$,

(1.10) $\quad$ si $B \in \mathcal{B}_j$ y $B \cap B_j \neq \phi$, se tiene que $B \subset B(x_j, C\,r_j)$, con C la misma constante que se obtuvo en el caso $j = 1$.

Tesis inductiva: Si para algún $\alpha \in \Gamma$ la bola B_α no está contenida en ninguna de las $B(x_j, C\,r_j)$, $j = 1, 2, \ldots, i$, entonces existen dos bolas $B_{i+1} = B(x_{i+1}, r_{i+1})$ y $B_{0,i+1}$ tales que satisfacen (1.6) a (1.10) con j reemplazado por $i+1$.

Demostración de la inducción: La familia $\mathcal{B}_{i+1}$ no es vacía, de lo contrario para cualquier bola B en $\mathcal{B}$ se tiene que

$$B \cap \bigcup_{j=1}^{i} B_j \neq \phi$$

si $h = \min\,\{j : B \cap B_j \neq \phi\}$, la bola B pertenece a la clase $\mathcal{B}_h$ y, por (1.10) de la hipótesis inductiva, $B \subset B(x_h, C\,r_h)$, en contradicción con lo supuesto. Por lo tanto existe $B_{0,i+1} \in \mathcal{B}_{i+1}$ tal que

$$2\mu(B_{0,i+1}) > \sup\,\{\mu(B) : B \in \mathcal{B}_{i+1}\} \,.$$

Por la observación preliminar el conjunto $\mathcal{R}_{i+1}$ es acotado y se puede elegir una bola $B_{i+1} \in \tilde{\mathcal{B}}_{i+1}$ con radio r_{i+1} tal que $2\,r_{i+1} > \sup \mathcal{R}_{i+1}$. Sea $B = B(x,r) \in \mathcal{B}_{i+1}$ tal que existe $u \in B \cap B_{i+1}$. Supongamos que $r \leq k(1+2k)\,r_{i+1}$, si $z \in B$ se tiene que

$$d(z,x_{i+1}) \leq k[d(z,x) + k(d(x,u) + d(u,x_{i+1}))]$$

$$< k[r + k(r + r_{i+1})] \leq C\,r_{i+1}$$

lo que implica que $B \subset B(x_{i+1}, C\,r_{i+1})$. Pero sólo este caso es posible, pues si fuera $r > k(1+2k)\,r_{i+1}$, para $y \in B(x_{i+1}, 2k\,r_{i+1}) \cap B_{0,i+1}$ se tendría que

$$d(x,y) \leq k[d(x,u) + k(d(u,x_{i+1}) + d(x_{i+1},y))]$$

$$< k[r + k(r_{i+1} + 2k\,r_{i+1})] < 2k\,r\ ,$$

lo que implicaría que $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{i+1}$ y en consecuencia $r \in \mathcal{R}_{i+1}$, por lo tanto

$$2\,r_{i+1} > \sup \mathcal{R}_{i+1} \geq r > k(1+2k)\,r_{i+1} \geq 3\,r_{i+1}$$

lo que es imposible. Esto prueba la tesis inductiva.

Si el proceso se interrumpe es porque, para algún i, toda bola $B \in \mathcal{B}$ queda incluida en alguna de las $B(x_j, C\,r_j)$; $j = 1, 2, \ldots, i$ y la sucesión finita $\{B_1, \ldots, B_i\}$ satisface la tesis del lema. Si este no es el caso se obtiene una sucesión infinita $\{B_i\}$ de bolas disjuntas. Resta demostrar que para toda bola B en $\mathcal{B}$ existe j tal que $B \subset B(x_j, C\,r_j)$. Supongamos que

$$B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \phi\ ,$$

entonces para todo $i \geq 1$, $B \in \mathcal{B}_i$. Como $B_{0,i} \in \tilde{\mathcal{B}}_i$, (1.9) implica que $2\,r_i > r_{0,i}$. Sea $y \in B(x_i, 2k\,r_i) \cap B_{0,i}$ y $z \in B_{0,i}$

$$d(z,x_i) \leq k[d(z,x_{0,i}) + k(d(x_{0,i},y) + d(y,x_i))] < 6\,k^3\,r_i$$

esto significa que $B_{0,i} \subset B(x_i, 6k^3 r_i)$. De estas observaciones y (1.7) se concluye que

$$0 < \mu(B) < 2\mu(B_{0,i}) \leq C\,.\,\mu(B_i)\ ,$$

pero las B_i son disjuntas y están contenidas en E , de modo que $\mu(E) = \infty$, contrariamente a lo supuesto. Por lo tanto

$$B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \neq \phi\ .$$

Si $j = \min\{i : B_i \cap B \neq \phi\}$, es claro que $B \in \mathcal{B}_j$ y que $B \cap B_j \neq \phi$; lo que, junto con (1.10) implica que $B \subset B(x_j, C\,r_j)$. C.Q.D.

En [CW] se prueba el tipo débil (1.1) del operador maximal de Hardy-Littlewood

$$M\,f(x) = \sup\ \mu(B)^{-1} \int_B |f|\,d\mu\ ,$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas que contienen al punto x . Haciendo uso de este resultado y del lema de cubrimiento (1.5), se obtienen los siguientes lemas tipo Calderón-Zygmund para espacios no necesariamente acotados. Denotemos por $m_B(f)$ el promedio de la función f sobre B , $m_B(f) = \mu(B)^{-1}\int_B f\,d\mu$.

(1.11) LEMA: Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo tal que las bolas son conjuntos abiertos en la topología generada por d . Sea f una función no negativa e integrable sobre X . Entonces para todo $\lambda \geq m_X(f)$ ($m_X(f) = 0$ si $\mu(X) = \infty$) , existe una sucesión $\{B_i\}$ de bolas disjuntas tales que, si $\tilde{B}_i$ denota la dilatación de B_i por la constante C del lema (1.5), se tiene que

(1.12) $\quad m_{\tilde{B}_i}(f) \le \lambda < m_{B_i}(f)$,

(1.13) $\quad$ para todo x en el complemento de $\cup \tilde{B}_i$ y toda bola B con centro en x , vale la desigualdad

$m_B(f) \le \lambda$.

Demostración: Sea $\Omega = \{x \in X : m_{B(x,r)}(f) > \lambda$ para algún $r > 0\}$. Si $\Omega = \phi$, en todo $x \in X$ vale (1.13). Sea entonces $x \in \Omega$, el conjunto $\{r > 0 : m_{B(x,r)}(f) > \lambda\}$ es distinto del vacío y acotado, pues o bien X es acotado, o bien tiene medida infinita y como $f \in L^1$, $m_{B(x,r)}(f)$ tiende a cero cuando r tiende a ∞ . Puesto que $m_X(f) \le \lambda$ y $C > 1$, es posible elegir $r(x)$ de modo que

(1.14) $\quad m_{B(x,r(x))}(f) > \lambda \ge m_{B(x,C\, r(x))}(f)$.

Consideremos la familia de bolas $\mathcal{B} = \{B(x,r(x)) : x \in \Omega\}$. El conjunto $E = \bigcup_{x \in \Omega} B(x,r(x))$ es abierto por la hipótesis sobre el espacio. Además

$$\mu(E) = \mu\{y \in X : y \in B \text{ para alguna bola } B \text{ tal que } m_B(f) > \lambda\}$$
$$= \mu\{y \in X : M\, f(y) > \lambda\} \le \frac{C}{\lambda} \int_X f \, d\mu < \infty .$$

Podemos aplicar el lema de cubrimiento para obtener una sucesión $\{B_i\} = \{B(x_i, r_i)\}$ de bolas disjuntas de $\mathcal{B}$ tal que $\Omega \subset E \subset \bigcup_i B(x_i , C\, r_i)$. Por definición de Ω y (1.14) es claro que valen (1.12) y (1.13) para esta sucesión. C.Q.D.

El hecho de tener el tipo débil (1.1) del operador maximal de Hardy-Littlewood, permite obtener la diferenciación de la integral de funciones localmente integrables, si las funciones continuas son densas en L^1 .

(1.15) LEMA: Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo tal que las bolas son conjuntos abiertos y las funciones continuas son densas en L^1. Sea $f \geq 0$, $f \in L^1$ y $\lambda \geq m_X(f)$. Entonces, si $\{B_n\}$ es la sucesión asociada a f y λ de acuerdo al lema (1.11), existen funciones h_n tales que los conjuntos $S_n = \{x : h_n(x) \neq 0\}$ son disjuntos y

(1.16) $$g = f - \sum_n h_n \in L^1 \cap L^\infty \quad y \quad \|g\|_\infty \leq C\,\lambda ,$$

(1.17) $$\int h_n \, d\mu = 0 ,$$

(1.18) $$S_n \subset \tilde{B}_n ,$$

(1.19) $$\sum_n \mu(\tilde{B}_n) \leq C\, \lambda^{-1} \|f\|_1 .$$

C depende sólo de las constantes del espacio.

Demostración: Podemos construir inductivamente una sucesión de conjuntos medibles disjuntos $\{V_n\}$ tal que

$$B_n \subset V_n \subset \tilde{B}_n$$

y

$$\bigcup_n V_n = \bigcup_n \tilde{B}_n$$

en efecto, sea

$$V_1 = \tilde{B}_1 - \bigcup_{n=2}^{\infty} B_n$$

$$V_k = \tilde{B}_k - [\bigcup_{n=1}^{k-1} V_n \cup \bigcup_{n=k+1}^{\infty} B_n] .$$

Definamos $h_n(x) = [f(x) - \mu(V_n)^{-1} \int_{V_n} f\, d\mu]\, \chi_{V_n}(x)$, χ_E denota la función característica del conjunto E, es claro que las propiedades (1.17) y (1.18) son satisfechas. Por otra parte, usando la propiedad de duplicación

(1.4), (1.12) y el hecho de que las bolas B_n son disjuntas, se sigue que

$$\sum_n \mu(\tilde{B}_n) \le C \sum_n \mu(B_n) < C\,\lambda^{-1} \sum_n \int_{B_n} f\, d\mu \le C\,\lambda^{-1} \|f\|_1 ,$$

lo que prueba (1.19). De la definición de las h_n se deduce que

$$g(x) = \begin{cases} \mu(V_n)^{-1} \int_{V_n} f\, d\mu , & \text{si } x \in V_n \\ f(x) , & \text{si } x \notin \bigcup_n V_n = \bigcup_n \tilde{B}_n \end{cases} .$$

Usando diferenciación y (1.13) se obtiene que

$$g(x) = f(x) \le \lambda, \text{ si } x \notin \bigcup_n \tilde{B}_n .$$

Por otra parte, si $x \in V_n$

$$g(x) = m_{V_n}(f) \le \frac{\mu(\tilde{B}_n)}{\mu(V_n)} \cdot m_{\tilde{B}_n}(f) ,$$

de donde, por la propiedad de duplicación y (1.12) se concluye que

$$g(x) \le C\,\lambda \qquad \text{si } x \in \bigcup_n \tilde{B}_n ,$$

lo que junto con (1.19) prueba (1.16). C.Q.D.

Los problemas a los que se aplicarán estos lemas son invariantes por cambio de casi-distancias equivalentes, entonces, usando los resultados de [MS1] se advierte que la hipótesis de que las bolas sean conjuntos abiertos no es restrictiva. Más precisamente, en ese trabajo se prueba el siguiente teorema.

TEOREMA: Sea d una casi-distancia sobre X. Entonces existe una casi-distancia d' equivalente a d, un número $\alpha \in (0,1)$ y una constante finita C tal que

(1.20) para toda terna x,y,z de elementos de X y para todo $r>0$ que satisfacen $d'(x,z)<r$ y $d'(y,z)<r$, vale la desigualdad

$$|d'(x,z)-d'(y,z)| \leq C\, r^{1-\alpha}\, d'(x,y)^{\alpha} .$$

Por consiguiente las bolas en la casi-distancia d' son conjuntos abiertos.

Cuando un espacio de tipo homogéneo está dotado de una casi-distancia con la propiedad (1.20), se dice que el espacio es de orden α. Incluiremos en esta definición el caso $\alpha=1$ que ocurre cuando d' es una métrica.

En un espacio métrico, es clara la siguiente propiedad: si $z \in B(y,r)$ entonces $B(z,r-d(z,y)) \subset B(y,r) \subset B(z,r+d(z,y))$. En los espacios de orden α es válido un resultado análogo que probaremos en el próximo lema y usaremos en los capítulos siguientes.

(1.21) LEMA: Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo de orden α. Sean k y C las constantes de (1.3) y (1.20) respectivamente. Entonces, dados dos puntos z e y en X y un número $r>0$ relacionados por la desigualdad

(1.22) $$d(z,y) < [C\,.\,(2k)^{1-\alpha}]^{-1/\alpha}\, r ,$$

se tiene que

$$\phi \neq B(z,\, r-\delta\, r^{1-\alpha}\, d(z,y)^{\alpha}) \subset B(y,r) \subset B(z\,,\, r+\delta\, r^{1-\alpha}\, d(z,y)^{\alpha}) ,$$

para todo δ tal que $C(2k)^{1-\alpha} \leq \delta < [r/d(z,y)]^{\alpha}$.

Demostración: Como

$$r-\delta\, r^{1-\alpha}\, d(z,y)^{\alpha} > r-[r/d(z,y)]^{\alpha}\, r^{1-\alpha}\, d(z,y)^{\alpha} = 0 ,$$

es claro que $B(z, r-\delta r^{1-\alpha} d(z,y)^{\alpha}) \neq \phi$. Tomando $z=x$ y $r=d(y,z)+\varepsilon$, para cualquier $\varepsilon > 0$, en (1.20), vemos que $C \geq 1$. Por lo tanto de (1.22) se deduce que $d(z,y) < r$. Sea $u \in B(z, r-\delta r^{1-\alpha} d(z,y)^{\alpha})$, entonces $d(u,z) < r$ y $d(u,y) \leq k[d(u,z)+d(z,y)] < 2k\, r$, usando la propiedad de orden α del espacio obtenemos

$$\begin{aligned} d(u,y) &\leq d(u,z) + C(2k)^{1-\alpha} r^{1-\alpha} d(y,z)^{\alpha} \\ &< r + [C(2k)^{1-\alpha} - \delta]\, r^{1-\alpha} d(y,z)^{\alpha} \leq r , \end{aligned}$$

lo que implica la primera inclusión en la tesis. Para verificar la segunda, tomemos un punto u en $B(y,r)$. Es claro que $d(u,y) < r$ y $d(u,z) < 2k\, r$, aplicando nuevamente la propiedad de orden α del espacio, se tiene que

$$d(u,z) \leq d(u,y) + C(2k)^{1-\alpha} r^{1-\alpha} d(y,z)^{\alpha} < r + \delta\, r^{1-\alpha} d(y,z)^{\alpha} ,$$

esto significa que $B(y,r) \subset B(z, r+\delta r^{1-\alpha} d(y,z)^{\alpha})$. C.Q.D.

El lema (1.5) puede ser usado también, para obtener cubrimientos de tipo Whitney de conjuntos no necesariamente acotados, como el siguiente lema que será de utilidad en el Capítulo IV.

(1.23) LEMA: Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo y sea U un abierto de medida finita estrictamente incluido en X . Entonces existe una sucesión de bolas $\{B(x_i, r_i)\} = \{B_i\}$ contenidas en U con las siguientes propiedades:

(1.24) $U = \bigcup_i B(x_i, r_i)$,

(1.25) existe $M \in \mathbb{N}$ tal que ningún punto de U está en más de M bolas de la sucesión $\{B_i\}$,

(1.26) existe $h > 1$ tal que, para cada i , la bola $B(x_i, h r_i)$ corta al complemento de U ,

(1.27) r_i es comparable con la distancia de $B(x_i, r_i)$ al complemento de U , en el sentido de que su cociente está entre dos constantes positivas y finitas,

(1.28) existe una constante finita D tal que para cada i se tiene la inclusión $B(x_i, 2k\, r_i) \subset B(y_i, D\, r_i)$, donde y_i es un punto en $B(x_i, h\, r_i)$ y fuera de U .

Los números M, h y D sólo dependen de las constantes del espacio.

La demostración es análoga a la del teorema (1.3) de [CW] excepto que al aplicar el lema (1.5) podemos prescindir de la hipótesis de acotación.

Interesa especialmente una clase de espacios de tipo homogéneo para los cuales la medida de una bola de radio r , es proporcional a r . Más precisamente, en [MS2] se da la siguiente definición.

Un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ) es normal, si existen cuatro constantes positivas y finitas A_1, A_2, K_1, K_2 , $K_2 \le 1 \le K_1$ tales que

(1.29) $A_1\, r \le \mu(B(x,r))$ si $r \le K_1\, \mu(X)$

(1.30) $B(x,r) = X$ si $r > K_1\, \mu(X)$

(1.31) $A_2\, r \ge \mu(B(x,r))$ si $r \ge K_2\, \mu(\{x\})$

(1.32) $B(x,r) = \{x\}$ si $r < K_2\, \mu(\{x\})$.

En [MS1] se demuestra que dado un espacio de tipo homogéneo tal que las bolas son conjuntos abiertos, si se toma como distancia entre dos puntos diferentes el ínfimo de las medidas de bolas que contienen a ambos y se conserva la propiedad $d(x,x) = 0$, se obtiene un espacio de tipo homogéneo normal con la misma medida y topología.

El próximo lema reúne algunas propiedades, que serán usadas con frecuencia, sobre la integrabilidad de potencias de la casi-distancia en espacios normales. Estos resultados extienden los correspondientes a $\mathbb{R}^n$ dotado de la casi-distancia normal $d(x,y) = |x-y|^n$.

<u>LEMA</u>: Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo normal. Sean $r>0$ y x un punto en X . Entonces

$$(1.33) \qquad \int_{d(x,y)<r} d(x,y)^{-1}\, d\mu(y) = \infty$$

$$(1.34) \qquad \int_{d(x,y)\geq r} d(x,y)^{-1}\, d\mu(y) = \infty \ , \ \text{si } \mu(X) = \infty \ .$$

Si la medida del conjunto que tiene como único elemento el punto x es cero, y si $\alpha > 0$, son válidas las desigualdades:

$$(1.35) \qquad \int_{d(x,y)\geq r} d(x,y)^{-1-\alpha}\, d\mu(y) \leq C\,.\, r^{-\alpha}$$

$$(1.36) \qquad \int_{d(x,y)<r} d(x,y)^{\alpha-1}\, d\mu(y) \leq C\,.\, r^{\alpha}$$

con C que sólo depende de las constantes del espacio.

<u>Demostración</u>: Para probar (1.33) consideremos dos casos según sea $\mu(\{x\})>0$ o $\mu(\{x\})=0$. Si $\mu(\{x\})>0$ la propiedad (1.33) es clara, pues la función integrando asume valor infinito sobre un conjunto de medida positiva. Supongamos que $\mu(\{x\})=0$, entonces la desigualdad (1.31) es válida para todo $r>0$. El número $C = 2\, A_2 / A_1$ es mayor que 1, por consiguiente existe un natural h tal que $C^{-h}\, r \leq K_1\, \mu(X)$, por lo tanto de (1.29) obtenemos que

$$A_1\, r\, C^{-j} \leq \mu(B(x\, ,\, r\, C^{-j}))\ ,$$

para todo $j \geq h$. De estas observaciones se deduce que

$$\int_{d(x,y)<r} d(x,y)^{-1} d\mu(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{r C^{-j-1} \leq d(x,y) < r C^{-j}} d(x,y)^{-1} d\mu(y)$$

$$\geq \sum_{j=0}^{\infty} C^{j} r^{-1} [\mu(B(x, r C^{-j})) - \mu(B(x, r C^{-j-1}))]$$

$$\geq \sum_{j=h}^{\infty} C^{j} r^{-1} [A_1 r C^{-j} - A_2 r C^{-j-1}]$$

$$= \sum_{j=h}^{\infty} (A_1 - A_2 / C) = \infty ,$$

lo que prueba (1.33). De un modo análogo puede probarse (1.34).

Como ya hemos observado, si $\mu(\{x\}) = 0$ se tiene que $\mu(B(x,r)) \leq A_2 r$ para todo $r > 0$. Este hecho es suficiente para obtener (1.35), en efecto:

$$\int_{d(x,y) \geq r} d(x,y)^{-1-\alpha} d\mu(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^j r \leq d(x,y) < 2^{j+1} r} d(x,y)^{-1-\alpha} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} (2^j r)^{-1-\alpha} \mu(B(x, 2^{j+1} r))$$

$$\leq 2 A_2 r^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} = C r^{-\alpha} .$$

La desigualdad (1.36) se prueba de la misma manera. C.Q.D.

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ dotado de la casi-distancia $d(x,y) = |x-y|^n$ y de la medida de Lebesgue m , es un espacio de tipo homogéneo normal y de orden $\alpha = 1/n$. En efecto: la bola con centro en x y radio

r en esta casi-métrica, coincide con la bola usual centrada en el mismo punto pero con radio $r^{1/n}$. Por consiguiente su medida es una constante veces r. Si x, y, z son puntos de $\mathbb{R}^n$ tales que $d(z,x) < r$ y $d(y,z) < r$, entonces, por el teorema del valor medio

$$|d(x,z) - d(y,z)| = ||x-z|^n - |y-z|^n| \leq n\, r^{(n-1)/n}\, |x-y|$$

$$= n\, r^{1-1/n}\, d(x,y)^{1/n} ,$$

que es (1.20) para $\alpha = 1/n$.

La propiedad de normalidad de un espacio de tipo homogéneo es invariante por cambio de casi-distancias equivalentes. No ocurre lo mismo con la propiedad de orden α, por tratarse de una condición de "suavidad" de la función distancia. Pueden darse ejemplos simples de este hecho: Si $X = \mathbb{R}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & , \text{ si } |x-y| < 1 \\ 2|x-y| & , \text{ si } |x-y| \geq 1 \end{cases}$$

y m es la medida de Lebesgue, la terna (X,d,m) es un espacio de tipo homogéneo. Además d es equivalente a la distancia usual en $\mathbb{R}$ que es de orden 1. Por otra parte, tomando $x = 1$ e $y_n = 1 - 1/n$ se tiene que $|d(x,0) - d(y_n,0)| = |2 - (1 - 1/n)|$ tiende a 1 cuando n tiende a infinito, pero para $n > 1$, $d(x,y_n) = 1/n$, lo que hace imposible la validez de (1.20).

En el caso de $\mathbb{R}^n$ con $d(x,y) = |x-y|^n$ es válida la siguiente propiedad geométrica más precisa que la normalidad: la medida de una corona es comparable a su amplitud. Esta propiedad puede interpretarse también como una condición de suavidad de $m(B(x,r))$ como función de r. El siguiente ejemplo muestra que es independiente de la propiedad de orden α.

(1.37) Ejemplo: Sea $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ la función definida por

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2|x| - 2^j & \text{si } 2^j \leq |x| < 3 \,.\, 2^{j-1} \\ 2^{j+1} & \text{si } 3 \,.\, 2^{j-1} \leq |x| < 2^{j+1} \end{cases}$$

es, claramente, una función Lipschitz. Sea $X = \mathbb{R}$, m la medida de Lebesgue y $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por $d(x,y) = \rho(x-y)$. Es claro que

$$|x-y| \leq d(x,y) \leq 2|x-y| \ ,$$

por lo tanto $(\mathbb{R},d,m)$ es un espacio de tipo homogéneo normal. Además, como ρ es Lipschitz, d es de orden 1. Sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$\begin{aligned} B(0,2+\varepsilon) - B(0,2) &= \{x : 2 \leq \rho(x) < 2 + \varepsilon\} \\ &\supset \{x : 3/2 \leq |x| < 2\} \ , \end{aligned}$$

por consiguiente $m[B(0,2+\varepsilon) - B(0,2)] > 1/2$ independientemente de ε . De modo que, en este espacio la medida de una corona no tiende a cero al tender a cero su amplitud.

Es preciso observar que si bien las funciones continuas y los espacios L^p son los mismos sobre $(\mathbb{R},d,m)$ que sobre $(\mathbb{R},|\cdot|,m)$ las propiedades de $(\mathbb{R},d,m)$ son insuficientes para la acotación de operadores integrales que quedan definidos de un modo natural en términos de la casi-distancia del espacio. En el Capítulo III se darán ejemplos de estos hechos.

Sin embargo, como veremos en los capítulos siguientes, la situación es diferente si se cuenta con la siguiente propiedad que en espacios de tipo homogéneo reemplaza a la relación que existe en $\mathbb{R}^n$ entre la medida de una corona y su amplitud:

(P) existe una constante finita C tal que

$$\mu(B(x, r+s)) - \mu(B(x, r)) \leq C\, s$$

para todo $x \in X$, r y $s \in \mathbb{R}^+$.

Lo mismo que la de orden α, la propiedad (P) tampoco subsiste por cambio de casi-métricas equivalentes, pero a diferencia de aquella, involucra las dos estructuras del espacio.

Veremos ahora algunos ejemplos en los que esta propiedad es válida.

(1.38) Ya hemos visto que el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ dotado de la casi-distancia $|\cdot|^n$ y de la medida de Lebesgue, satisface (P).

(1.39) En la sección 7 de [R], se asocia una métrica ρ invariante por traslaciones a cada familia continua de transformaciones de $\mathbb{R}^n$, $\{T_\lambda : \lambda > 0\}$, tal que, si I denota el operador identidad en $\mathbb{R}^n$

$$T_{\lambda\mu} = T_\lambda \cdot T_\mu ,$$

$$T_1 = I$$

y

$$\|T_\lambda\| \leq \lambda \qquad \text{si} \quad 0 < \lambda \leq 1 .$$

La distancia de x a cero es el número $\rho(x)$ definido implícitamente por

$$|T_{\rho^{-1}}(x)| = 1 .$$

La medida de Lebesgue de una bola de radio r en la métrica ρ es $C\, r^{trP}$, donde trP denota la traza de la matriz P que genera $\{T_\lambda\}$ en el siguiente sentido

$$T_\lambda = \exp(P \log \lambda) .$$

la función $d(x,y) = \rho(x-y)^{trP}$ es una casi-distancia de orden $\alpha = [tr\, P]^{-1}$

sobre $\mathbb{R}^n$ y además

$$m(B_d(x,r)) = m(B_\rho(x,r^{1/trP})) = C\,r\,,$$

de lo que se deduce que $(\mathbb{R}^n,d,m)$ es normal y cumple la propiedad (P).

(1.40) Sea $X=\mathbb{R}^2$ y m la medida de Lebesgue. Sea $\phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ una función continua y creciente tal que

$$\phi(2t) \leq C\,\phi(t)$$

y

$$\phi^{-1}(2t) \leq C\,\phi^{-1}(t)\,,$$

para alguna constante finita C y todo $t>0$. Si $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, la función

$$\rho(x) = \text{máx}\,\{|x_1|\,;\,\phi^{-1}(|x_2|)\}$$

define una casi-distancia invariante por traslaciones. La bola con centro en cero y radio t en esta casi-métrica es el rectángulo

$$R_t = (-t\,,\,t)\times(-\phi(t),\phi(t))\,.$$

Por la propiedad de duplicación de ϕ se tiene que

$$m(B_\rho(0,2t)) = m\,(R_{2t}) = 8t\,\phi\,(2t) \leq C\,t\,\phi\,(t) = C\,m\,(B_\rho(0,t))\,.$$

Por consiguiente $(\mathbb{R}^2,\rho,m)$ es un espacio de tipo homogéneo. Una normalización de esta estructura puede conseguirse definiendo

$$d(x,0) = \inf\{m\,(R_t):\,x\in R_t\}\,.$$

Es claro que

$$d(x,0) = \begin{cases} 4|x_1|\,\phi(|x_1|) & \text{si } |x_2| \leq \phi(|x_1|) \\ 4|x_2|\,\phi^{-1}(|x_2|) & \text{si } |x_2| > \phi(|x_1|)\,, \end{cases}$$

por lo tanto

$$B_d(0,r) = \{x : |x_2| \leq \phi(|x_1|) \text{ y } 4|x_1|\,\phi(|x_1|) < r\}$$

$$\cup \{x : |x_2| > \phi(|x_1|) \text{ y } 4|x_2|\,\phi^{-1}(|x_2|) < r\}.$$

Si $t_o > 0$ es tal que $4\,t_o\,\phi(t_o) = r$, la bola $B_d(0,r)$ es R_{t_o} y $m(R_{t_o}) = 4\,t_o\,\phi(t_o) = r$. En consecuencia $(\mathbb{R}^2,d,m)$ satisface la propiedad (P).

(1.41) Sea $\{U_t : t > 0\}$ una familia de Vitali regular en $\mathbb{R}^n$ o en cualquier grupo localmente compacto G dotado de la medida de Haar (ver [R]), tal que los conjuntos U_t son entornos simétricos de la identidad y $m(U_t)$ es una función continua y creciente sobre $\mathbb{R}^+$. Entonces

$$d(x,y) = \inf\{m(U_t) : x - y \in U_t\},$$

es una casi-distancia sobre G y $m(B_d(0,r)) = r$. Observemos que los ejemplos anteriores son casos particulares de (1.41).

En los casos precedentes, las estructuras homogéneas difieren sólo en las casi-distancias. Las funciones densidad (pesos) que satisfacen propiedades de duplicación, proveen ejemplos con medidas no invariantes por traslaciones.

(1.42) Sea $X = \mathbb{R}$, $|\cdot|$ la distancia usual en $\mathbb{R}$ y w una función localmente integrable sobre $\mathbb{R}$ tal que si E es un conjunto medible y

$$w(E) = \int_E w(x)\,dx,$$

se tiene que

$$w(B(x,2r)) \leq C\,w(B(x,r))$$

para alguna constante finita C. Esta condición es satisfecha si w está en la clase A_∞ de Muckenhoupt. La terna $(\mathbb{R},|\cdot|,w\,dx)$ es un espacio de tipo homogéneo cuya normalización por el método de Macías-Segovia conduce a la casi-distancia

$$d(x,y) = \inf \{w(B) : x \in B ,\ y \in B\}$$

$$= w\left(B\left(\frac{x+y}{2} , \frac{|x-y|}{2}\right)\right)$$

$$= \left| \int_x^y w(z)\, dz \right| .$$

Si $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, $B_d(x,r) = \{y : |\int_x^y w(z)\, dz| < r\}$ por lo tanto, haciendo el cambio de variables $y \to u = \int_x^y w(z)\, dz$ es claro que

$$w(B_d(x,r)) = \int_{\{y : |\int_x^y w(z)\, dz| < r\}} w(y)\, dy = m(-r,r) = 2r .$$

Lo que significa que $(\mathbb{R},d,wdx)$ es un espacio normal con la propiedad (P).

(1.43) En algunos problemas, por ejemplo los estudiados en el capítulo III (ver la observación (3.31)), la propiedad de simetría (1.2) de la casi-distancia d puede debilitarse exigiendo en su lugar que para algún par de constantes finitas C_1 y C_2 se verifique la desigualdad

(1.2') $\quad C_1\, d(x,y) \leq d(y,x) \leq C_2\, d(x,y)$.

Si $B_d(x,r) = \{y : d(x,y) < r\}$ y (1.4) es satisfecha, se tiene que

$$\rho(x,y) = d(x,y) + d(y,x)$$

es una casi-distancia equivalente a d con la cual el espacio resulta de tipo homogéneo. En ciertos casos, la ventaja de considerar la función d en lugar de la casi-métrica ρ reside en que $\mu(B_d(x,r))$ puede tener la suavidad necesaria como función de r, mientras $\mu(B_\rho(x,r))$ carece de ella.

Sea w una función no negativa y localmente integrable definida sobre $\mathbb{R}^n$ con una propiedad de duplicación que hace de $(\mathbb{R}^n, |\cdot|, wdx)$ un espacio de tipo homogéneo. Si x e y son puntos de $\mathbb{R}^n$ definimos

$$d(x,y) = w(B(x, |x-y|)) ,$$

que para un peso general no es simétrica. Por la propiedad de duplicación es claro que d satisface (1.2') y (1.3). Además

$$B_d(x,r) = \{y : d(x,y) < r\} = B(x,t)$$

para un $t > 0$ tal que $w(B(x,t)) = r$. En el capítulo III se requerirá también que d cumpla una propiedad de suavidad del tipo (1.20) en la segunda variable. Esto es:

(1.20') existen $\alpha \leq 1$ y $C < \infty$ tales que

$$|d(z,y) - d(z,x)| \leq C r^{1-\alpha} d(y,x)^{\alpha} ,$$

si $d(z,y) \leq r$ y $d(z,x) \leq r$. En [GGW] se obtiene la siguiente desigualdad para pesos w como el que estamos considerando

$$w(B(x, |x-x_0| + s) - B(x, |x-x_0|)) \leq C w(B(x_0, s))^{1-\beta} w(B(x, |x-x_0|))^{\beta},$$

para algún $\beta \in [0,1)$ y todos los puntos $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $s > 0$ tales que $|x-x_0| \geq s$. Sea $r > 0$, $d(z,y) \leq r$ y $d(z,x) \leq r$. Supongamos que $d(z,y) \geq d(z,x)$, si $|x-y| \leq |x-z|$ de la desigualdad de Gatto, Gutiérrez y Wheeden sigue que:

$$\begin{aligned} |d(z,y) - d(z,x)| &= w(B(z, |y-z|)) - w(B(z, |x-z|)) \\ &\leq w(B(z, |x-z| + |x-y|)) - w(B(z, |x-z|)) \\ &\leq C w(B(x, |x-y|))^{1-\beta} w(B(z, |x-z|))^{\beta} \\ &\leq C r^{\beta} d(x,y)^{1-\beta} . \end{aligned}$$

Si $|x-z| < |x-y|$, es claro que $B(z,|x-z|) \subset B(x,2|x-y|)$ y $B(z,|z-y|) \subset B(x,3|x-y|)$, por lo tanto

$$|d(z,y) - d(z,x)| \leq C\, d(x,y) \leq C\, r^{\beta}\, d(x,y)^{1-\beta} .$$

Lo que implica (1.20') con $\alpha = 1-\beta \leq 1$.

CAPITULO II

INTEGRALES SINGULARES

En este capítulo (X,d,μ) es un espacio de tipo homogéneo normal y k es la constante de la desigualdad triangular (1.3).

Un núcleo de Calderón-Zygmund en $\mathbb{R}^n$ acotado sobre la esfera unitaria, escrito en términos de la distancia normalizada de ese espacio, es el modelo para los núcleos singulares que se considerarán aquí. Supondremos en general que $K : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función medible que satisface la siguiente mayoración

(2.1) existe $C > 0$ tal que $|K(x,y)| \leq C\, d(x,y)^{-1}$ para $x \neq y$.

Menos uniformes serán las condiciones de suavidad en el núcleo, en algunos casos (tipo (2,2) y acotación en L^p con pesos) se requerirá una estimación puntual del tipo considerado en [MS3] en la primera o en la segunda variable de K

(2.2) existe $\alpha \in (0,1)$ y $C > 0$ tales que si $d(x,y) > 2\, d(y,z)$ se tiene que

a) $|K(y,x) - K(z,x)| \leq C\, d(y,z)^{\alpha}\, d(x,y)^{-1-\alpha}$

b) $|K(x,y) - K(x,z)| \leq C\, d(y,z)^{\alpha}\, d(x,y)^{-1-\alpha}$,

o bien, más generalmente

(2.2') existe $C > 0$ y una función creciente $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\int_0^1 \psi(t)\, t^{-1}\, dt < \infty$ y si $d(x,y) > 2\, d(y,z)$ se tiene que

a) $|K(y,x) - K(z,x)| \leq C\, d(x,y)^{-1}\, \psi[d(y,z)\, d(x,y)^{-1}]$

b) $|K(x,y) - K(x,z)| \leq C\, d(x,y)^{-1}\, \psi[d(y,z)\, d(x,y)^{-1}]$,

en otros casos será suficiente la más débil

(2.2") existe $C > 0$ tal que

a) $$\int_{d(x,y) > 2d(y,z)} |K(y,x) - K(z,x)|\, d\mu(x) \leq C$$

b) $$\int_{d(x,y) > 2d(y,z)} |K(x,y) - K(x,z)|\, d\mu(x) \leq C \ .$$

En lo que respecta a las propiedades de cancelación del núcleo, se considerarán dos tipos

(2.3) para todo par de números $R > r > 0$, se tiene que

a) $$\int_{r \leq d(x,y) < R} K(x,y)\, d\mu(y) = 0 \ , \quad \text{para todo} \quad x \in X$$

b) $$\int_{r \leq d(x,y) < R} K(x,y)\, d\mu(x) = 0 \ , \quad \text{para todo} \quad y \in X \ ,$$

o las más débiles análogas a las de [BCP] y [R]

(2.3') para todo par de números $R > r > 0$, se tiene que

a) $\left|\int_{r \leq d(x,y) < R} K(x,y)\, d\mu(y)\right|$ es acotada uniformemente en x, r y R , además $\int_{r \leq d(x,y) < 1} K(x,y)\, d\mu(y)$ converge uniformemente en x cuando r tiende a cero ,

b) $\left|\int_{r \leq d(x,y) < R} K(x,y)\, d\mu(x)\right|$ es acotada uniformemente en y, r y R , además $\int_{r \leq d(x,y) < 1} K(x,y)\, d\mu(x)$ converge uniformemente en y cuando r tiende a cero.

En este capítulo se estudiarán los problemas de acotación en L^p

y tipo débil (1,1) para el operador con núcleo K truncado en coronas

(2.4) $$K_{R,r}\, f(x) = \int_{r \le d(x,y) < R} K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y) \ ,$$

el operador límite puntual y en L^p , Kf y el operador maximal asociado $K^* f$.

§.1 ACOTACION EN L^2

En [CW] se obtiene el tipo fuerte (p,p) y débil (1,1) de un operador integral que es acotado en L^2 y que satisface la condición (2.2".b), para demostrar este resultado se hace uso de un lema tipo Calderón-Zygmund. En el caso clásico la acotación en L^2 se obtiene recurriendo a la transformada de Fourier en la que está involucrada la estructura algebraica del espacio. Existe otra técnica para obtener el tipo (2,2) con un núcleo de Calderón-Zygmund, es debida a Cotlar (ver [Co]) y se basa en el siguiente lema general sobre operadores en espacios de Hilbert.

LEMA DE COTLAR: Sea H un espacio de Hilbert y $T_1, T_2, \dots, T_N$ una sucesión finita de operadores lineales y continuos de H en H . Sea $c : \mathbb{Z} \longrightarrow [0,\infty)$ tal que $\sum_{-\infty}^{\infty} c(\ell)^{1/2} = A < \infty$. Si T_i^* es el adjunto de T_i y si $\|T_i^* T_j\| \le c(i-j)$ y $\|T_i T_j^*\| \le c(i-j)$, entonces

$$\Big\| \sum_{i=1}^{N} T_i \Big\| \le A \ .$$

Esta versión del lema y una demostración pueden hallarse en [G].

Para el caso de un operador integral singular en un espacio de tipo homogéneo puede aplicarse este lema prescindiendo de la estructura algebraica, pero exigiendo una propiedad geométrica adicional al espacio: la propiedad (P) presentada en el capítulo I. Esta propiedad se requiere para obtener el próximo lema.

Para cada número entero i, χ_i denotará la función característica del conjunto

$$\{(x,y) \in X \times X : (2k)^i \leq d(x,y) < (2k)^{i+1}\}$$

y K_i la truncación $K\chi_i$ del núcleo K.

(2.5) <u>LEMA</u>: Supongamos que (X,d,μ) tiene las propiedades (P) y de orden α. Sea K un núcleo singular que satisface (2.1) y (2.2.a), entonces existe una constante finita C tal que

(2.6) $$\int_X |K_i(y,x) - K_i(z,x)| \, d\mu(x) \leq C(2k)^{-\alpha i} \, d(y,z)^\alpha$$

<u>Demostración</u>: Observemos en primer lugar que, salvo un caso trivial, la propiedad (P) asegura que no puede haber puntos cuya medida sea positiva, entonces por la normalidad, la medida de una bola de radio r está acotada por una constante veces r.

Sean $y,z \in X$ e i un entero y sea C la constante de la desigualdad (1.20) que por hipótesis es satisfecha por la casi-distancia d. Consideremos dos casos según el orden entre $(2k)^{\alpha i} d(y,z)^{-\alpha}$ y $4C(2k)^{1-\alpha}$.

(2.7) Supongamos que $(2k)^{\alpha i} d(y,z)^{-\alpha} \leq 4C(2k)^{1-\alpha}$. En este caso la estimación (2.6) es consecuencia de (2.1), en efecto

$$\begin{aligned}\int_X |K_i(y,x)-K_i(z,x)| \, d\mu(x) &\leq \int_X |K_i(y,x)| \, d\mu(x) + \int_X |K_i(z,x)| \, d\mu(x) \\ &\leq C \int_{(2k)^i \leq d(x,y)<(2k)^{i+1}} d(y,x)^{-1} \, d\mu(x) \\ &+ C \int_{(2k)^i \leq d(x,z)<(2k)^{i+1}} d(z,x)^{-1} \, d\mu(x)\end{aligned}$$

$$\leq C\ (2k)^{-i}\ \mu[B(y,(2k)^{i+1})]$$

$$+\ C\ (2k)^{-i}\ \mu[B(z,(2k)^{i+1})],$$

el último término está acotado uniformemente en y,z e i con una cota que sólo depende de las constantes del espacio, y de la constante de (2.1), entonces de (2.7) se deduce (2.6).

(2.8) Supongamos que $(2k)^{\alpha i}\, d(y,z)^{-\alpha} > 4C(2k)^{1-\alpha}$. El miembro izquierdo de (2.6) está mayorado por una suma de dos integrales, una de las cuales contiene la información sobre la suavidad del núcleo, la otra involucra la geometría del espacio,

$$\int_X |K_i(y,x)-K_i(z,x)|\ d\mu(x) = \int_X |[K(y,x) - K(z,x)]\ \chi_i(y,x)$$

$$+ K(z,x)\ [\chi_i(y,x) - \chi_i(z,x)]|\ d\mu(x)$$

$$\leq \int_{(2k)^i \leq d(x,y) < (2k)^{i+1}} |K(y,x)-K(z,x)|\ d\mu(x)$$

$$+ \int_X |K(z,x)|\ |\chi_i(y,x) - \chi_i(z,x)|\ d\mu(x)$$

$$= (I) + (II)\ .$$

Para acotar (I), observemos que si x es un punto del dominio de integración, entonces

$$d(x,y) \geq (2k)^i > d(y,z)\ [4C(2k)^{1-\alpha}]^{1/\alpha} > 2d(y,z)\ ,$$

por consiguiente puede aplicarse la hipótesis (2.2.a) sobre el núcleo para obtener

$$(I) \leq C\, d(y,z)^{\alpha} \int_{(2k)^i \leq d(x,y) < (2k)^{i+1}} d(x,y)^{-1-\alpha}\, d\mu(x)$$

$$\leq C\, d(y,z)^{\alpha}\, (2k)^{-i(1+\alpha)}\, (2k)^{i+1} = C(2k)^{-\alpha i}\, d(y,z)^{\alpha} ,$$

que es el tipo de estimación necesaria. Por otra parte, es claro que

$$(II) = \int_{\Delta_i(y,z)} |K(z,x)|\, d\mu(x) ,$$

donde $\Delta_i(y,z) = [B(y,(2k)^{i+1}) - B(y,(2k)^i)]\ \Delta [B(z,(2k)^{i+1}) - B(z,(2k)^i)]$ y Δ denota la diferencia simétrica. Usaremos el lema (1.21) para incluir $\Delta_i(y,z)$ en una unión de dos coronas centradas en z. Sean $r_1 = (2k)^i$ y $r_2 = (2k)^{i+1}$ entonces, por la hipótesis presente sobre la relación entre y,z, e i, se tiene que

$$d(z,y) \leq [4C(2k)^{1-\alpha}]^{-1/\alpha}\, (2k)^i < [C(2k)^{1-\alpha}]^{-1/\alpha}\, r_1$$

$$< [C(2k)^{1-\alpha}]^{-1/\alpha}\, r_2 ,$$

esto significa que, tanto r_1 como r_2 están en la hipótesis (1.22) del lema (1.21) respecto del par $z,y \in X$. Si elegimos $\delta = 2C(2k)^{1-\alpha}$, tenemos que

$$C(2k)^{1-\alpha} < \delta < r_1^{\alpha}\, d(z,y)^{-\alpha} < r_2^{\alpha}\, d(z,y)^{-\alpha} ,$$

por lo tanto, si

$$a_i = (2k)^i - \delta(2k)^{i(1-\alpha)}\, d(z,y)^{\alpha}$$

$$b_i = (2k)^i + \delta(2k)^{i(1-\alpha)}\, d(z,y)^{\alpha}$$

son válidas las inclusiones

(2.9) $\qquad B(z,a_i) \subset B(y,(2k)^i) \subset B(z,b_i)$

$$(2.10)\qquad B(z,a_{i+1}) \subset B(y,(2k)^{i+1}) \subset B(z,b_{i+1}) .$$

Por otra parte, es claro que

$$(2.11)\qquad B(z,a_i) \subset B(z,(2k)^i) \subset B(z,b_i)$$

$$(2.12)\qquad B(z,a_{i+1}) \subset B(z,(2k)^{i+1}) \subset B(z,b_{i+1}) .$$

Observemos además que

$$(2.13)\qquad B(z,(2k)^i) \subset B(y,(2k)^{i+1})$$

$$(2.14)\qquad B(y,(2k)^i) \subset B(z,(2k)^{i+1}) ,$$

en efecto, si $u \in B(z,(2k)^i)$, usando nuevamente (2.8) se tiene que $d(u,y) \leq k[d(u,z) + d(z,y)] < k[(2k)^i + (2k)^i] = (2k)^{i+1}$, lo que prueba (2.13). De las inclusiones (2.13) y (2.14) sigue que

$$\Delta_i(y,z) = [B(y,(2k)^{i+1})\ \Delta B(z,(2k)^{i+1})] \cup [B(y,(2k)^i)\ \Delta B(z,(2k)^i)] ,$$

que, por (2.9) a (2.12) resulta contenido en

$$[B(z,b_{i+1}) - B(z,a_{i+1})] \cup [B(z,b_i) - B(z,a_i)] .$$

Entonces, por (2.1) la integral (II) está acotada por

$$C \int_{a_{i+1} \leq d(x,z) < b_{i+1}} d(x,z)^{-1}\, d\mu(x) + C \int_{a_i \leq d(x,z) < b_i} d(x,z)^{-1}\, d\mu(x)$$

$$\leq C\, a_{i+1}^{-1} [\mu(B(z,b_{i+1})) - \mu(B(z,a_{i+1}))] + C\, a_i^{-1} [\mu(B(z,b_i)) - \mu(B(z,a_i))] ,$$

el miembro derecho de esta desigualdad puede mayorarse usando la propiedad (P), las definiciones de a_i y b_i, la elección δ y (2.8), con lo que se obtiene

$$(II) \leq C[a_{i+1}^{-1}(b_{i+1} - a_{i+1}) + a_i^{-1}(b_i - a_i)]$$

$$= C\left[\frac{2\delta(2k)^{(i+1)(1-\alpha)}\ d(z,y)^{\alpha}}{(2k)^{i+1} - \delta(2k)^{(i+1)(1-\alpha)}\ d(z,y)^{\alpha}} + \frac{2\delta(2k)^{i(1-\alpha)}\ d(z,y)^{\alpha}}{(2k)^{i} - \delta(2k)^{i(1-\alpha)}\ d(z,y)^{\alpha}}\right]$$

$$\leq C\,(2k)^{-\alpha i}\ d(z,y)^{\alpha}\ \ [1 - \delta(2k)^{-\alpha i}\ d(z,y)^{\alpha}]^{-1}$$

$$\leq C\,(2k)^{-\alpha i}\ d(z,y)^{\alpha}\ .$$

C.Q.D.

Observemos que si en lugar de la condición (2.2.a), el núcleo satisface (2.2.b) se obtiene una desigualdad análoga a (2.6) salvo que la integral se efectúa respecto de la primera variable de K .

En el siguiente teorema se demuestra la acotación uniforme en L^2 del operador $K_{R,r}$ definido por (2.4).

(2.15) TEOREMA: Sea (X,d,μ) como en el lema (2.5) y K un núcleo singular que satisface (2.1), (2.2) y (2.3). Entonces $K_{R,r}$ es acotado como operador en L^2 con norma independiente de R y r .

Demostración: Notemos en primer término, que todo espacio de tipo homogéneo es σ-finito en el sentido de la medida y por consiguiente podemos aplicar los teoremas de Fubini y Tonelli. Para $f \in L^2$ y $x \in X$, la función $K_j(x,y)\ f(y)$ es absolutamente integrable en la variable y . Entonces $\int K_j(x,y)\ f(y)\ d\mu(y)$ define una función de x que denotamos $T_j\ f(x)$. El operador T_j es lineal y continuo como operador en L^2 , en efecto, por la desigualdad de Schwartz y (2.1) son válidas las siguientes mayoraciones

$$|T_j\ f(x)|^2 \leq \{\int_X |K_j(x,y)|^{1/2}\ |f(y)|\ |K_j(x,y)|^{1/2}\ d\mu(y)\}^2$$

$$\leq \{\int_X |K_j(x,y)|\,|f(y)|^2\ d\mu(y)\}\cdot\{\int_X |K_j(x,y)|\ d\mu(y)\}$$

$$\leq C\int_X |K_j(x,y)|\,|f(y)|^2\ d\mu(y)\ ,$$

integrando en la variable x , invirtiendo el orden de integración y usando nuevamente (2.1), obtenemos

$$\|T_j f\|_2^2 \le C\int_X |f(y)|^2 \{\int_X |K_j(x,y)|\, d\mu(x)\} d\mu(y) \le C \|f\|_2^2 .$$

El adjunto de T_j es el operador integral con núcleo $\tilde{K}_j(x,y) = K_j(y,x)$, es decir

$$T_j^* g(x) = \int_X K_j(y,x)\ g(y)\ d\mu(y) ,$$

con $g \in L^2$. Para aplicar el lema de Cotlar, es necesario acotar las normas de los operadores $T_i^* T_j$ y $T_i T_j^*$. El teorema de Fubini permite escribir $T_i^* T_j$ como operador integral con núcleo

$$\int_X K_i(y,x)\ K_j(y,z)\ d\mu(y) ,$$

en efecto, si f es una función de L^2 se tiene que

$$T_i^* T_j f(x) = \int_X K_i(y,x)\ T_j f(y)\ d\mu(y)$$

$$= \int_X K_i(y,x)\ \{\int_X K_j(y,z)\ f(z)\ d\mu(z)\}\ d\mu(y)$$

$$= \int_X \{\int_X K_i(y,x)\ K_j(y,z)\ d\mu(y)\}\ f(z)\ d\mu(z) .$$

En consecuencia, es claro por la desigualdad de Schwartz que $|T_i^* T_j f(x)|^2$ está mayorada por

$$(2.16) \qquad \{\int_X |\int_X K_i(y,x)\ K_j(y,z)\ d\mu(y)|\ |f(z)|^2\ d\mu(z)\}$$

$$\cdot \{\int_X |\int_X K_i(y,x)\ K_j(y,z)\ d\mu(y)|\ d\mu(z)\}$$

necesitamos estimar la integral de esta función de la variable x , con este fin consideraremos dos casos según sea $i \geq j$ o $j > i$.

a) $i \geq j$. El segundo factor de (2.16) está acotado de manera uniforme en i,j y x en virtud de la propiedad (2.1) del núcleo. Por lo tanto, usando la hipótesis de cancelación (2.3), el lema (2.5) y nuevamente (2.1), tenemos que

$$\|T_i^* T_j f\|_2^2 \leq C \int \{ \int | \int K_i(y,x)\, K_j(y,z)\, d\mu(y) \, | \, |f(z)|^2 \, d\mu(z)\} \, d\mu(x)$$

$$= C \int \{ \int | \int [K_i(y,x) - K_i(z,x)]\, K_j(y,z)\, d\mu(y)| \, |f(z)|^2 \, d\mu(z)\} \, d\mu(x)$$

$$\leq C \int |f(z)|^2 \int |K_j(y,z)| \int |K_i(y,x) - K_i(z,x)| \, d\mu(x)\, d\mu(y)\, d\mu(z)$$

$$\leq C \int |f(z)|^2 \int_{(2k)^j \leq d(y,z) < (2k)^{j+1}} d(y,z)^{\alpha-1} (2k)^{-\alpha i} \, d\mu(y)\, d\mu(z)$$

$$\leq C(2k)^{-\alpha i} \, (2k)^{(\alpha-1)j} \, (2k)^{j+1} \, \|f\|_2^2$$

$$= C(2k)^{-\alpha|i-j|} \, \|f\|_2^2 \; .$$

Como la desigualdad obtenida es válida para toda f en L^2 concluimos que $\| T_i^* T_j \| \leq C(2k)^{-\alpha|i-j|/2}$.

b) $i < j$. En este caso estimemos mejor el segundo factor de (2.16). Para ello procedamos con él como se hizo con el primero en el caso a). Esto es, aplicando (2.3), (2.5) y (2.1) se tiene que

$$\int | \int K_i(y,x)\, K_j(y,z)\, d\mu(y)| \, d\mu(z) = \int | \int K_i(y,x) [K_j(y,z) - K_j(x,z)] \, d\mu(y)| \, d\mu(z)$$

$$\leq \int |K_i(y,x)| \int |K_j(y,z) - K_j(x,z)| \, d\mu(z)\, d\mu(y)$$

$$\leq C \int_{(2k)^i \leq d(x,y) < (2k)^{i+1}} d(x,y)^{\alpha-1} (2k)^{-\alpha j} \, d\mu(y)$$

$$\leq C \, (2k)^{-\alpha|i-j|} \quad .$$

Entonces, por la estimación (2.16), es claro que

$$\| T_i^* T_j f \|_2^2 \leq C \, (2k)^{-\alpha|i-j|} \int |f(z)|^2 \int |K_j(y,z)| \int |K_i(y,x)| \, d\mu(x) \, d\mu(y) \, d\mu(z)$$

$$\leq C \, (2k)^{-\alpha|i-j|} \, \| f \|_2^2 \quad ,$$

de modo que también en este caso obtenemos

$$\| T_i^* T_j \| \leq C \, (2k)^{-\alpha|i-j|/2} \quad .$$

Por la simetría en las hipótesis sobre el núcleo es válida la misma acotación para $\| T_i T_j^* \|$.

Si ℓ es un número entero y $c(\ell) = C \, (2k)^{-\alpha|\ell|/2}$, se verifica que $\Sigma \, c(\ell)^{1/2} = A < \infty$, por consiguiente para $i < j$ el lema de Cotlar permite concluir que

$$\| \sum_{\ell=i}^{j} T_\ell \| \leq A \quad .$$

Sean r y R tales que $0 < r < R < \infty$, existen enteros i y j de modo que $(2k)^i \leq r < (2k)^{i+1}$ y $(2k)^j \leq R < (2k)^{j+1}$, entonces

$$K_{R,r} \, f(x) = \int_{(2k)^j \leq d(x,y) < R} K(x,y) \, f(y) \, d\mu(y) + \sum_{\ell=i+1}^{j-1} T_\ell \, f(x)$$

$$+ \int_{r \leq d(x,y) < (2k)^{i+1}} K(x,y) \, f(y) \, d\mu(y) \quad .$$

Por lo tanto, para obtener la tesis será suficiente que los operadores definidos por el primero y tercer términos en la igualdad anterior, sean acotados en L^2 uniformemente en R y r . Esto ocurre, pues ambos están dominados superiormente por la función maximal de Hardy-Littlewood de f . Veamos por ejemplo el primero de ellos

$$\left| \int_{(2k)^j \le d(x,y) < R} K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y) \right|$$

$$\le C \int_{(2k)^j \le d(x,y) < (2k)^{j+1}} d(x,y)^{-1}\, |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\le C(2k)^{-j} \int_{B(x,(2k)^{j+1})} |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\le C \,.\, M f(x)$$

C sólo depende de las constantes del espacio y de la constante de (2.1) C.Q.D.

El hecho de que el orden del espacio y el exponente en la condición (2.2) coincidan no es restrictivo. En el caso de ser diferentes, ambas propiedades se verifican para el mínimo de estos dos números.

Es claro que el mismo resultado del teorema es válido para el operador adjunto

$$(2.17) \qquad \tilde{K}_{R,r} f(x) = \int_{r \le d(x,y) < R} K(y,x)\, f(y)\, d\mu(y)$$

§.2 ACOTACION Y CONVERGENCIA EN L^p . TIPO DEBIL (1,1)

Como se mencionó en §.1 , para obtener los tipos fuerte (p,p) y débil $(1,1)$ de un operador integral que es acotado en L^2 , es suficiente que el núcleo satisfaga una propiedad del tipo (2.2".b) . Además las normas en L^p y en L^1 débil del operador dependen sólo de la norma en L^2 y de la constante de (2.2")(ver (2.4) en el Cap.III de [CW]). Como corolario de este teorema de Coifman y de Guzmán se obtiene el siguiente resultado relativo al operador truncado $K_{R,r}$.

(2.18) TEOREMA: Sea (X,d,μ) tal que para cada $x \in X$ la medida del conjunto $\{x\}$ es cero. Sea K un núcleo singular que satisface (2.1) y (2.2".b) tal que $K_{R,r}$ es acotado en L^2 uniformemente en R y r . Entonces, si $1 < p \leq 2$ y $f \in L^p$ se tiene que

$$\| K_{R,r} f \|_p \leq C_p \| f \|_p \quad .$$

Si $f \in L^1$

$$\mu \{x \in X : |K_{R,r} f(x)| > \lambda\} \leq C_1 \lambda^{-1} \| f \|_1$$

con C_p y C_1 independientes de R , r y f .

Demostración: Por la observación precedente, el teorema estará probado si se demuestra que el núcleo $K_{R,r}(x,y) = K(x,y) \cdot \chi_{R,r}(x,y)$ satisface (2.2".b) con constante independiente de R y r , $\chi_{R,r}(x,y)$ denota la función característica del conjunto

$$\{(x,y) \in X \times X : r \leq d(x,y) < R\}$$

Procediendo como en la demostración del lema (2.5), obtenemos

$$\int_{d(x,y)>2d(y,z)} |K_{R,r}(x,z) - K_{R,r}(x,y)| \, d\mu(x)$$

$$\leq \int_{d(x,y)>2d(y,z)} \chi_{R,r}(x,z) \, |K(x,z) - K(x,y)| \, d\mu(x)$$

$$+ \int_{d(x,y)>2d(y,z)} |K(x,y)| \; |\chi_{R,r}(x,z) - \chi_{R,r}(x,y)| \, d\mu(x) \quad ,$$

la primera integral está uniformemente acotada, pues K satisface (2.2".b). Para estimar la segunda integral, observemos que su dominio de integración está contenido en $[B(y,R) \Delta B(z,R)] \cup [B(y,r) \Delta B(z,r)]$, entonces por (2.1) queda mayorada por

$$C \int_{\substack{B(y,R)\Delta B(z,R) \\ d(x,y)>2d(y,z)}} d(x,y)^{-1}\, d\mu(x) + C \int_{\substack{B(y,r)\Delta B(z,r) \\ d(x,y)>2d(y,z)}} d(x,z)^{-1}\, d\mu(x) .$$

Para acotar una de estas integrales, por ejemplo la primera, supondremos dos casos según el orden entre R y $2k\, d(y,z)$:

a) $R \leq 2k\, d(y,z)$. Es claro que

$$\int_{\substack{B(y,R)\Delta B(z,R) \\ d(x,y)>2d(y,z)}} d(x,y)^{-1}\, d\mu(x) \leq d(y,z)^{-1}\, \mu[B(y,R) \Delta B(z,R)] \quad , \tag{2.19}$$

si $x \in B(z,R)$ se tiene que

$$d(x,y) \leq k[d(x,z) + d(z,y)] < 3k^2\, d(y,z) \quad ,$$

lo que significa que $B(y,R) \Delta B\,(z,R)$ está contenido en $B(y,3k^2 d(y,z))$. Este hecho junto con la normalidad del espacio y la hipótesis sobre la medida de los conjuntos unitarios permite acotar uniformemente el miembro derecho de (2.19).

b) $R > 2k\, d(y,z)$. En este caso son válidas las inclusiones

$$B(y,R/2k) \subset B(z,R) \subset B(y,2k\,R)$$

por consiguiente $B(y,R) \Delta B(z,R)$ está contenida en $B(y,2k\,R) - B(y,R/2k)$ y la integral a estimar está mayorada por

$$\int_{B(y,2k\,R)\, -\, B(y,R/2k)} d(x,y)^{-1}\, d\mu(x)$$

que resulta acotada uniformemente. C.Q.D.

Observemos que si el núcleo K satisface la hipótesis (2.2".a) en lugar de (2.2".b), el teorema (2.18) puede aplicarse al núcleo adjunto $\tilde{K}(x,y) = K(y,x)$ y por dualidad se obtiene el tipo fuerte (p,p) para $2 < p < \infty$ del operador $K_{R,r}$.

Como en el caso clásico, para obtener resultados de convergencia de los operadores truncados $K_{R,r}$ cuando r tiende a cero y R a infinito, es útil saber que un espacio de funciones suaves es denso en L^p. En el contexto de espacios de tipo homogéneo están bien definidas las clases de funciones Lipschitz, este tipo de suavidad es suficiente para nuestros propósitos. Si la medida es regular, la densidad en L^p de una de tales clases es consecuencia de la propiedad (1.20) de Macías-Segovia.

(2.20) LEMA: Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo que es regular en el sentido de la medida. Entonces existe $\beta \in (0,1)$ tal que las funciones de clase Lipschitz β con soporte acotado son densas en L^p , $1 \leq p < \infty$.

Demostración: Si $f \in L^p$ y $f \geq 0$, entonces, como X es unión numerable de bolas concéntricas, existe una sucesión $\{f_m\}$ de funciones simples con soporte acotado, $0 \leq f_1 \leq \ldots \leq f_m \leq \ldots \leq f$ tal que $\lim f_m(x)=f(x)$. Esto reduce el problema a aproximar funciones características de conjuntos medibles acotados por funciones de clase Lipschitz con soporte acotado. Como se mencionó en el Capítulo I, para algún $\beta \in (0,1)$ existe una casi-distancia ρ de orden β equivalente a d . Sea E un conjunto medible y acotado en X y $\varepsilon > 0$. Por la hipótesis de regularidad de la medida respecto de la topología del espacio, existen K y G un compacto y un abierto respectivamente tales que $K \subset E \subset G$ y $\mu(G - K) < \varepsilon$. Es claro que G puede elegirse acotado. Si G' denota el complemento de G y $\rho(x,A) = \inf \{\rho(x,y) : y \in A\}$, la función

$$g(x) = \rho(x,G')[\rho(x,G') + \rho(x,K)]^{-1}$$

vale uno sobre K , cero fuera de G , toma valores entre cero y uno y es de clase Lipschitz β . Entonces

$$\| \chi_E - g \|_p^p = \int |\chi_E(x) - g(x)|^p \, d\mu(x) \leq 2^p \int_{G-K} d\mu(x) < 2^p \varepsilon \quad .$$

C.Q.D.

(2.21) <u>TEOREMA</u>: Sea (X,d,μ) regular en medida y tal que para cada $x \in X$ la medida del conjunto $\{x\}$ es cero. Sea K un núcleo singular que satisface (2.1), (2.2".b) y (2.3'.a) tal que $K_{R,r}$ es acotado en L^2 uniformemente en R y r . Entonces si $1 < p \leq 2$ y $f \in L^p$, existe el límite en norma L^p de $K_{R,r} f$ cuando $r \to 0$ y $R \to \infty$. Si se denota por Kf este límite, se tiene que

$$\| Kf \|_p \leq C_p \| f \|_p \quad .$$

<u>Demostración</u>: Si $R_2 > R_1 > 1 > r_1 > r_2 > 0$, $f \in L^p$ y g es una función de clase Lipschitz β con soporte acotado, aplicando el teorema (2.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \| K_{R_2,r_2} f - K_{R_1,r_1} f \|_p &= \| K_{r_1,r_2} f + K_{R_2,R_1} f \|_p \\ &\leq \| K_{r_1,r_2}(f-g) \|_p + \| K_{R_2,R_1}(f-g) \|_p \\ &\quad + \| K_{r_1,r_2} g \|_p + \| K_{R_2,R_1} g \|_p \\ &\leq 2 C_p \| f - g \|_p + \| K_{r_1,r_2} g \|_p \\ &\quad + \| K_{R_2,R_1} g \|_p \quad . \end{aligned}$$

Por el lema (2.20) puede elegirse g de clase Lipschitz β con soporte acotado de modo que $\| f - g \|_p$ sea arbitrariamente pequeño. Por otra parte la desigualdad integral de Minkowski y el lema (1.35) permiten obtener la siguiente mayoración

$$\| K_{R_2,R_1} g \|_p = \{ \int_X | \int_{R_1 \le d(x,y) < R_2} K(x,y)\, g(y)\, d\mu(y) |^p \, d\mu(x) \}^{1/p}$$

$$\le C \int_X |g(y)| \{ \int_{R_1 \le d(x,y) < R_2} d(x,y)^{-p} \, d\mu(x) \}^{1/p} \, d\mu(y)$$

$$\le C\, R_1^{(1-p)/p} \, \| g \|_1 \quad ,$$

como $p > 1$ es claro que $\| K_{R_2,R_1} g \|_p$ tiende a cero cuando R_1 crece a infinito. Finalmente, haciendo uso de la propiedad de cancelación (2.3'.a) de K y de la suavidad de g es posible estimar $\| K_{r_1,r_2} g \|_p$, en efecto

$$K_{r_1,r_2} g\,(x) = \int_{r_2 \le d(x,y) < r_1} K(x,y)\ [g(y) - g(x)]\ d\mu(y)$$

$$+ g\,(x) \int_{r_2 \le d(x,y) < r_1} K(x,y)\ d\mu(y) \quad ,$$

por consiguiente, en virtud de (2.1) y del lema (1.36), es válida la desigualdad

$$|K_{r_1,r_2} g\,(x)| \le C \int_{r_2 \le d(x,y) < r_1} d(x,y)^{\beta-1} \, d\mu(y)$$

$$+ C\, | \int_{r_2 \le d(x,y) < r_1} K(x,y)\ d\mu(y) |$$

$$\le C\, r_1^{\beta} + C\, | \int_{r_2 \le d(x,y) < r_1} K(x,y)\ d\mu(y) | \quad .$$

Por lo tanto $|K_{r_1,r_2} g\,(x)|$ es acotado y convergente a cero uniformemente cuando r_1 tiende a cero. Sean $x_o \in X$ y $R > 0$ tales que $\operatorname{sop} g \subset B(x_o, R)$, como $r_1 < 1$ se tiene que

$$\| K_{r_1,r_2} g \|_p^p = \int_{B(x_o, 2kR)} |K_{r_1,r_2} g(x)|^p \, d\mu(x) \quad .$$

Entonces $\| K_{r_1,r_2} g \|_p$ tiende a cero cuando r_1 tiende a cero. La desigualdad de la tesis es consecuencia del teorema (2.18). C.Q.D.

Observemos que si además de las hipótesis del teorema (2.21), K satisface (2.2''.a), se obtiene el resultado para $2 < p < \infty$. Si K también verifica (2.3'.b), existe $\tilde{K}$ límite en L^p de los operadores $\tilde{K}_{R,r}$ y vale la desigualdad $\| \tilde{K} f \|_p \leq C_p \| f \|_p$.

§.3 EL OPERADOR MAXIMAL DE LAS TRUNCACIONES Y LA CONVERGENCIA PUNTUAL

Si el núcleo singular K satisface la condición (2.1) y f es una función de L^p para algún p finito y mayor o igual que uno, la integral

$$\int_{d(x,y) \geq 1} K(x,y) \, f(y) \, d\mu(y)$$

es absolutamente convergente. Para este tipo de núcleos es, entonces, suficiente estudiar la convergencia puntual de los operadores

$$K_\varepsilon f(x) = \int_{\varepsilon \leq d(x,y)} K(x,y) \, f(y) \, d\mu(y) \quad ,$$

este problema está estrechamente vinculado al de determinación del tipo del operador maximal asociado

$$K^* f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |K_\varepsilon f(x)| \quad .$$

En esta sección se obtendrán los resultados de acotación en L^p y tipo débil (1,1) para el operador K^* .

Observemos en primer lugar que para $f \in L^p$ con $1 \leq p < \infty$, y $x \in X$, $K_\varepsilon f(x)$ es continua por la izquierda como función de $\varepsilon > 0$. Por lo tanto si Q^+ denota el conjunto de los racionales positivos,

$$\sup_{\varepsilon>0} |K_\varepsilon f(x)| = \sup \{ | K_\varepsilon f(x) | : \varepsilon \in Q^+ \} ,$$

y por consiguiente $K^* f(x)$ es una función medible.

Para obtener el tipo débil (1,1) del operador K^* por medio de un lema de tipo Calderón-Zygmund, probaremos que si $1 < p < \infty$ entonces K^* es acotado en L^p. Este resultado es consecuencia de una mayoración puntual por una suma de operadores conocidos. Una estimación de este tipo se consigue con el método que en [R] se aplica a integrales singulares en $\mathbb{R}^n$ y en [D] a integrales de Cauchy sobre curvas Lipschitz. Si x_0 es un punto de X y $\varepsilon > 0$, $K_\varepsilon f(x_0)$ es igual a

$$\int_{d(x_0,y)\geq\varepsilon} [K(x_0,y) - K(x,y)] f(y)\, d\mu(y) + Kf(x) - K(\chi_{B(x_0,\varepsilon)} f)(x) , \tag{2.22}$$

con $x \in B(x_0,\varepsilon/2k)$ y $f \in L^p$ $(1 < p < \infty)$. Si el núcleo K satisface una condición de suavidad del tipo (2.2'.a), el valor absoluto del primer término de (2.22) se acota por una constante veces la maximal de Hardy-Littlewood de f en x_0. Por consiguiente

$$|K_\varepsilon f(x_0)| \leq CMf(x_0) + |Kf(x)| + |K(\chi_{B(x_0,\varepsilon)} f)(x)| , \tag{2.23}$$

para todo $x \in B(x_0,\varepsilon/2k)$. Tomando promedios sobre $B(x_0,\varepsilon/2k)$ en ambos miembros de (2.23), aplicando luego la desigualdad de Hölder y el teorema (2.21) se tiene que

$$|K_\varepsilon f(x_0)| \leq CMf(x_0) + M(Kf)(x_0)$$
$$+ \mu(B(x_0,\varepsilon/2k))^{-1} \int_{B(x_0,\varepsilon/2k)} |K(\chi_{B(x_0,\varepsilon)} f)(x)|\, d\mu(x)$$

$$\leq C M f(x_o) + M(Kf)(x_o)$$

$$+ \mu(B(x_o,\varepsilon/2k))^{-1/r} [\int_X |K(\chi_{B(x_o,\varepsilon)} f)(x)|^r d\mu(x)]^{1/r}$$

$$\leq C M f(x_o) + M(Kf)(x_o) + [M(|f|^r)(x_o)]^{1/r} \quad .$$

Si $1 < r < p$ todos los operadores mayorantes son acotados en L^p y por lo tanto también lo es K^*.

Para el tipo de núcleos que estamos considerando se puede obtener una estimación mejor de K^*, análoga a la que se prueba en [S] en el caso euclídeo, usando el teorema de Calderón-Zygmund sobre aproximaciones de la identidad. El resultado es el siguiente.

(2.24) TEOREMA: Sea (X,d,μ) regular en medida y tal que para cada $x \in X$ la medida del conjunto $\{x\}$ es cero. Sea K un núcleo singular que satisface (2.1), (2.2'.a) y (2.3') tal que $K_{R,r}$ es acotado en L^2 uniformemente en R y r. Entonces existe una constante finita C tal que para toda $f \in L^p$ con $1 < p < \infty$, es válida la desigualdad

$$K^* f(x) \leq C M[Kf](x) + C M f(x) \quad ,$$

M es el operador maximal de Hardy-Littlewood y K el operador límite en L^p del teorema (2.21).

Demostración: Sean $\alpha \in (0,1)$ y ρ una casi-métrica de orden α equivalente a d, a_1 y a_2 constantes tales que $a_1 \rho \leq d \leq a_2 \rho$. Si A_1, A_2 y K_1 son las constantes de normalidad de ρ ((1.29) a (1.32)) y si el espacio X tiene medida finita, es válida la siguiente desigualdad

$$K^* f(x) \leq \sup\{ |K_\varepsilon f(x)| : 0 < \varepsilon < 2 A_2 K_1 A_1^{-1} \mu(X) \} \tag{2.25}$$

$$+ \sup\{ |K_\varepsilon f(x)| : 2 A_2 K_1 A_1^{-1} \mu(X) \leq \varepsilon \} \quad .$$

El segundo sumando en el miembro derecho de (2.25) está mayorado por una constante veces $Mf(x)$. En efecto, por (2.1) y por ser X una bola de medida acotada por una constante veces ε, se tiene que

$$|K_\varepsilon f(x)| \le C \int_{d(x,y)\ge\varepsilon} d(x,y)^{-1} |f(y)| \, d\mu(y)$$

$$\le C\,\varepsilon^{-1} \int_X |f(y)| \, d\mu(y) \le C\,Mf(x) \quad .$$

Por lo tanto será suficiente obtener la estimación de la tesis para el operador definido por el primer sumando del miembro derecho de (2.25). Sea $\phi:[0,\infty) \to [0,\infty)$ una función de clase C^∞ , decreciente, con soporte en $[0,1)$ y tal que $\int_0^\infty \phi(t)\,dt = 1$. Si $\varepsilon > 0$ denotamos con $\phi_\varepsilon(x,z)$ a la función $\varepsilon^{-1}\phi(\rho(x,z)\,\varepsilon^{-1})$ y definimos un núcleo sobre $X\times X$ de la siguiente manera

$$(2.26) \qquad H_\varepsilon(x,y) = [\tilde{K}\,\phi_\varepsilon(x,\cdot)](y) = \lim_{\delta\to 0} \int_{d(z,y)\ge\delta} K(z,y)\,\phi_\varepsilon(x,z)\,d\mu(z) \quad .$$

Sabemos que este límite existe en el sentido de L^p , pues para x fijo $\phi_\varepsilon(x,z)$ está en L^p como función de z . Las propiedades de ϕ y de la casi-distancia ρ aseguran que también existe límite puntual, en efecto: fijados $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, la función $\phi_\varepsilon(x,\cdot)$ tiene soporte acotado, es acotada y por la propiedad de orden α de ρ se tiene que

$$(2.27) \qquad |\phi_\varepsilon(x,z) - \phi_\varepsilon(x,u)| \le C\,\varepsilon^{-2}\,|\rho(x,z) - \rho(x,u)|$$

$$\le C\,\varepsilon^{-2}\,[\rho(x,z) + \rho(x,u)]^{1-\alpha}\,\rho(u,z)^\alpha$$

$$\le C\,\varepsilon^{-1-\alpha}\,\rho(u,z)^\alpha \quad ,$$

si $\rho(x,z) < 2k\varepsilon$ y $\rho(x,u) < 2k\varepsilon$. Si $\rho(x,z) < \varepsilon$ y $\rho(x,u) \ge 2k\varepsilon$ entonces $\phi_\varepsilon(x,u) = 0$ y $\rho(u,z) > \varepsilon$, por lo tanto

$$|\phi_\varepsilon(x,z) - \phi_\varepsilon(x,u)| \le C\,\varepsilon^{-1} \le C_\varepsilon\,\rho(u,z)^\alpha \quad .$$

Por consiguiente $\phi_\varepsilon(x,\cdot)$ es Lipschitz α. Como el núcleo K satisface la propiedad de cancelación (2.3'.b) es válido el argumento que hemos usado en la demostración del teorema (2.21), para probar la buena definición puntual de $H_\varepsilon(x,y)$.

Para $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ definimos $g_\varepsilon(x) = \int_X \phi_\varepsilon(x,z)\, d\mu(z)$. Demostraremos ahora que, para $0 < \varepsilon < 2A_2 K_1 A_1^{-1} \mu(X)$ existen constantes finitas C_1 y C_2 tales que

(2.28) $\quad C_1 \leq g_\varepsilon(x) \leq C_2 \quad$ para $\quad \varepsilon > 0 \quad$ y $\quad x \in X$.

Sea $a = 2A_2 A_1^{-1} > 1$, por (1.29), (1.31) y la hipótesis sobre la medida de los conjuntos unitarios se tiene que

$$\mu(B_\rho(x,ar)) - \mu(B_\rho(x,r)) \geq 2A_2 r - A_2 r = A_2 r \quad ,$$

para todo r tal que $ar \leq K_1 \mu(X)$. Por las propiedades de ϕ y la desigualdad anterior observando que la restricción en ε puede escribirse $\varepsilon a^{-1} < K_1 \mu(X)$, obtenemos (2.28) del siguiente modo

$$1 = \int_0^1 \phi(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a^{-k-1}}^{a^{-k}} \phi(t)\, dt$$

$$\leq C\, \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \phi(a^{-k-1})\, A_2\, \varepsilon\, a^{-k-2}$$

$$\leq C\, \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \phi(a^{-k-1})\, [\mu(B_\rho(x,\varepsilon\, a^{-k-1})) - \mu(B_\rho(x,\varepsilon\, a^{-k-2}))]$$

$$\leq C\, g_\varepsilon(x)$$

$$= C\, \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\varepsilon\, 2^{-k-1} \leq \rho(x,z) < \varepsilon\, 2^{-k}} \phi(\rho(x,z)\, \varepsilon^{-1})\, d\mu(z)$$

$$\leq C \int_0^1 \phi(t)\ dt = C \quad .$$

Consideremos el siguiente núcleo sobre $X \times X$

(2.29) $$\Phi_\varepsilon(x,y) = H_\varepsilon(x,y) - K_\varepsilon(x,y)\ g_\varepsilon(x) \quad ,$$

para $\varepsilon < 2A_2 K_1 A_1^{-1} \mu(X)$, $K_\varepsilon(x,y)$ es la función que vale $K(x,y)$ si $d(x,y) \geq \varepsilon$ y cero en caso contrario. Probaremos en lo que sigue que $\{\Phi_\varepsilon\}$ es una aproximación de la identidad, más precisamente

(2.30) $$|\Phi_\varepsilon(x,y)| \leq \varepsilon^{-1}\ \zeta(\rho(x,y)\ \varepsilon^{-1}) \quad ,$$

para alguna función ζ decreciente e integrable sobre $\mathbb{R}^+$.

i) Supongamos que $\rho(x,y) < 2a_2 a_1^{-1} \varepsilon$. Queremos definir ζ en el intervalo $[0, 2a_2 a_1^{-1})$. El valor absoluto del sustraendo de (2.29) se acota por $C\varepsilon^{-1}$ en virtud de (2.1) y (2.28). Para estimar el minuendo de (2.29), notemos que en las integrales que definen $H_\varepsilon(x,y)$ en (2.26), sólo contribuyen aquellos puntos z para los cuales $\rho(x,z) < \varepsilon$. Por la hipótesis presente sobre la relación entre ε , x e y , la equivalencia de las casi-distancias d y ρ muestra que cada integral en (2.26) puede tomarse sobre una corona $\{z : \delta \leq d(z,y) < C\varepsilon\}$. Es posible, por consiguiente, aplicar la propiedad (2.3') de K y la desigualdad (2.27) para obtener

$$|H_\varepsilon(x,y)| \leq \lim_{\delta\to 0} \int_{\delta\leq d(z,y)<C\varepsilon} |K(z,y)|\,|\phi_\varepsilon(x,z) - \phi_\varepsilon(x,y)|\ d\mu(z)$$

$$+ \lim_{\delta\to 0} \left| \int_{\delta\leq d(z,y)<C\varepsilon} K(z,y)\ d\mu(z) \right| |\phi_\varepsilon(x,y)|$$

$$\leq C\,\varepsilon^{-1-\alpha} \int_{\rho(z,y)<C\,\varepsilon} \rho(z,y)^{\alpha-1}\, d\mu(z) + C\,\varepsilon^{-1}$$

$$\leq C\,\varepsilon^{-1} \quad .$$

Resumiendo $|\Phi_\varepsilon(x,y)| \leq C\,\varepsilon^{-1}$ si $\rho(x,y) < 2\,a_2\,a_1^{-1}$, esto permite tomar ζ constante en el intervalo $[0, 2\,a_2\,a_1^{-1})$.

ii) Supongamos que $\rho(x,y) \geq 2\,a_2\,a_1^{-1}\,\varepsilon$. Se pretende definir ζ en $[2\,a_2\,a_1^{-1}, \infty)$. Observemos que $\Phi_\varepsilon(x,y)$ es igual a

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{d(z,y)\geq\delta} [K(z,y) - K(x,y)]\; \phi_\varepsilon(x,z)\; d\mu(z) \quad ,$$

y que a estas integrales contribuyen sólo los z tales que $\rho(x,z) < \varepsilon$, para tales z se tiene que

$$d(x,y) \geq a_1\,\rho(x,y) \geq 2\,a_2\,\varepsilon > 2\,a_2\,\rho(x,z) \geq 2\,d(x,z) \quad .$$

En consecuencia podemos aplicar (2.2'.a) para mayorar $|\Phi_\varepsilon(x,y)|$ de la siguiente manera

$$|\Phi_\varepsilon(x,y)| \leq C\,d(x,y)^{-1} \int_X \Psi[d(z,x)\,d(x,y)^{-1}]\; \phi_\varepsilon(x,z)\; d\mu(z)$$

$$\leq C\,d(x,y)^{-1}\, \Psi[a_2\,\varepsilon\, d(x,y)^{-1}] \int_X \phi_\varepsilon(x,z)\; d\mu(z)$$

$$\leq C\,a_1^{-1}\,\rho(x,y)^{-1}\; \Psi[a_2\,a_1^{-1}\,\varepsilon\,\rho(x,y)^{-1}] \quad ,$$

notemos que si $\zeta(t) = C\,t^{-1}\,\Psi(a_2\,a_1^{-1}\,t^{-1})$, el último miembro en la desigualdad anterior es $\varepsilon^{-1}\;\zeta[\rho(x,y)\;\varepsilon^{-1}]$.

Las propiedades de Ψ implican que ζ es decreciente e integrable. Por consiguiente (2.30) está probada y entonces

$$(2.31) \qquad \left|\int_X \Phi_\varepsilon(x,y)\; f(y)\; d\mu(y)\right| \le C\, M f(x) \qquad ,$$

que se obtiene, como en el caso euclídeo, descomponiendo la integral en coronas diádicas centradas en x y aplicando las propiedades de ζ.

Sea $1<p<\infty$ y q el conjugado de Hölder de $p: p^{-1}+q^{-1}=1$. Si f está en L^p, como $H_\varepsilon(x,y)$ está en L^q de la variable y para x fijo, la integral $\int_X H_\varepsilon(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)$ es absolutamente convergente. Además, $H_\varepsilon(x,y)$ es límite en L^q de la variable y de $\int_{d(z,y)\ge\delta} K(z,y)\, \phi_\varepsilon(x,z)\, d\mu(z)$ para δ que tiende a cero. Por otra parte, por el teorema (2.21), $K_\delta f$ converge a Kf en L^p. Con estas observaciones son claras las siguientes igualdades

$$(2.32) \qquad \int_X H_\varepsilon(x,y)\, f(y)\, d\mu(y) = \lim_{\delta\to 0}\int_X f(y)\left[\int_{d(z,y)\ge\delta} K(z,y)\,\phi_\varepsilon(x,z)\, d\mu(z)\right] d\mu(y)$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int_X \phi_\varepsilon(x,z)\left[\int_{d(z,y)\ge\delta} f(y)\, K(z,y)\, d\mu(y)\right] d\mu(z)$$

$$= \int_X \phi_\varepsilon(x,z)\, K f(z)\, d\mu(z) \qquad .$$

De (2.29) y (2.32) sigue que

$$g_\varepsilon(x)\int_X K_\varepsilon(x,y)\, f(y)\, d\mu(y) = \int_X H_\varepsilon(x,y)\, f(y)\, d\mu(y) - \int_X \Phi_\varepsilon(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)$$

$$= \int_X \phi_\varepsilon(x,y)\, K f(y)\, d\mu(y) - \int_X \Phi_\varepsilon(x,y)\, f(y)\, d\mu(y) \; .$$

Finalmente de (2.28) y (2.31) obtenemos

$$\left|\int_X K_\varepsilon(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)\right| \le C\, |g_\varepsilon(x)\int_X K_\varepsilon(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)|$$

$$\le C\, M\,[K f]\,(x) + C\, M\, f(x) \qquad ,$$

para $0 < \varepsilon < 2A_1 K_1 A_1^{-1}\, \mu(X)$. C.Q.D.

El resultado sobre tipo débil (1,1) es el siguiente.

(2.33) TEOREMA: Sea (X,d,μ) regular en medida y tal que para cada $x \in X$ la medida del conjunto $\{x\}$ es cero. Sea K un núcleo singular que satisface (2.1), (2.2".b) y tal que el operador maximal K^* es acotado en L^2 . Entonces K^* es de tipo débil (1,1).

Demostración: Podemos suponer que las bolas son conjuntos abiertos en la topología del espacio, pués si ρ es una casi-distancia equivalente a d y

$$K_\rho^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \left|\int_{\rho(x,y)\ge\varepsilon} K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)\right|$$

por la propiedad (2.1) del núcleo, se tiene que

$$K^* f(x) \le K_\rho^* f(x) + C\, M\, f(x)$$

y

$$K_\rho^* f(x) \le K^* f(x) + C\, M\, f(x) \qquad .$$

En consecuencia, por las propiedades de M , tanto las hipótesis como la tesis del teorema subsisten por cambio de casi-métricas equivalentes y podemos tomar como ρ la de orden α asociada a d . Sea $f \ge 0$, $f \in L^1$, como K^* es positivamente homogéneo es suficiente demostrar que

(2.34) $\quad \mu\,\{x \in X : K^* f(x) > 1\} \le C\, \| f \|_1 \quad .$

Observemos que si $m_X(f) > 1$ entonces $\mu(X) \le \| f \|_1$ con lo que (2.34) es válida. Si $m_X(f) \le 1$, la función f y el número $\lambda = 1$ están en la relación de la hipótesis del lema (1.15), por lo que f puede descomponerse como suma de una función acotada más una serie de funciones con soportes disjuntos y promedios nulos. En lo que sigue se usará la notación de aquel lema. Por la subaditividad de K^*, es claro que

$$\mu\{x\in X: K^*f(x)>1\}\le \mu\{x\in X: K^*g(x)>1/2\}+\mu\{x\in X: K^*h(x)>1/2\}. \tag{2.35}$$

El primer sumando en el miembro derecho de (2.35) puede mayorarse usando la hipótesis de acotación en L^2 de K^*, (1.16), (1.18) y (1.19):

$$\begin{aligned}\mu\{x\in X: K^*g(x)>1/2\} &\le 4\int_X [K^*g(x)]^2\,d\mu(x)\\ &\le C\int_X |g(x)|^2\,d\mu(x)\\ &\le C\int_{\cup\tilde{B}_n} |g(x)|^2\,d\mu(x)+C\int_{X-\cup\tilde{B}_n}|g(x)|^2\,d\mu(x)\\ &\le C\,\mu(\cup\tilde{B}_n)+C\int_X |f(x)|\,d\mu(x)\\ &\le C\,\|f\|_1 .\end{aligned}$$

Para estimar el segundo sumando en el miembro derecho de (2.35) notemos, aplicando nuevamente (1.19), que, si C_1 es la constante del lema (1.5), es suficiente obtener una acotación por $\|f\|_1$ de

$$\mu\{x\in X-\cup B(x_n,2kC_1r_n): K^*h(x)>1/2\} . \tag{2.36}$$

Con este fin tomemos un punto x fuera de $\cup B(x_n,2kC_1r_n)$ y un número $\varepsilon>0$ que define una truncación arbitraria de la integral singular alrededor de x. Consideremos la siguiente partición del conjunto de los números naturales

$$\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} : S_n \subset B(x,\varepsilon)\} \quad ,$$

$$\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} : S_n \subset X - B(x,\varepsilon)\} \quad ,$$

$$\mathbb{N}_3 = \{n \in \mathbb{N} : \text{existen } y_1 \text{ e } y_2 \text{ en } S_n \text{ tales que } d(x,y_1) \geq \varepsilon \text{ y } d(x,y_2) < \varepsilon\} \ .$$

Es claro, entonces, que a la integral $K_\varepsilon h(x) = \sum K_\varepsilon h_n(x)$ contribuyen sólo los $n \in \mathbb{N}_2 \cup \mathbb{N}_3$. Si $n \in \mathbb{N}_2$, por (1.17) se tiene que

$$(2.37) \qquad K_\varepsilon h_n(x) = \int_{d(x,y) \geq \varepsilon} [K(x,y) - K(x,x_n)]\, h_n(y)\, d\mu(y) \ .$$

Para $n \in \mathbb{N}_3$, la condición (2.1) en el núcleo implica que

$$|K_\varepsilon h_n(x)| \leq C\, \varepsilon^{-1} \int_X |h_n(y)|\, d\mu(y) \quad .$$

Notemos que, en este caso, $C_1 r_n \leq \varepsilon$, pues de ocurrir la desigualdad contraria tendríamos

$$d(x,x_n) \leq k[d(x,y_2) + d(y_2,x_n)] < 2\,k\,C_1\, r_n \quad ,$$

que está en contradicción con la elección de x . Es ahora claro que

$$B(x_n, C_1 r_n) \subset B(x, 3k^2 \varepsilon) \quad ,$$

en efecto:

$$d(x,u) \leq k[k(d(x,y_2) + d(y_2,x_n)) + d(x_n,u)] < 3k^2\, \varepsilon$$

para todo u en $B(x_n, C_1 r_n)$. Por consiguiente

$$(2.38) \qquad |K_\varepsilon h_n(x)| \leq C\, \varepsilon^{-1} \int_{B(x,3k^2\varepsilon)} |h_n(y)|\, d\mu(y) \quad .$$

De (2.37) y (2.38) sigue que

$$K^* h(x) \leq \sum_n \int_X |h_n(y)|\,|K(x,y) - K(x,x_n)|\, d\mu(y) + C\,Mh(x) \quad ,$$

como el operador maximal de Hardy-Littlewood es de tipo débil (1,1), para estimar (2.36), basta acotar la medida del conjunto

$$\{x \in X - \cup B(x_n, 2kC_1 r_n) : \sum_j \int |h_j(y)|\,|K(x,y) - K(x,x_n)|\,d\mu(y) > 1/4\} \quad .$$

Esto es simple, pues por la propiedad (2.2".b) se tiene que

$$\int_{X - \cup B(x_n, 2kC_1 r_n)} \left[\sum_j \int_X |h_j(y)|\,|K(x,y) - K(x,x_j)|\, d\mu(y) \right] d\mu(x)$$

$$\leq \sum_j \int_X |h_j(y)| \left[\int_{X - B(x_j, 2kC_1 r_j)} |K(x,y) - K(x,x_j)|\,d\mu(x) \right] d\mu(y)$$

$$\leq C \, \| h \|_1 \leq C \, \| f \|_1 \quad .$$

C.Q.D.

De este teorema de tipo débil y de la densidad en L^1 de una clase de funciones Lipschitz con soporte acotado, el resultado de convergencia puntual de las truncaciones se deduce como en el caso euclídeo.

CAPITULO III

APROXIMACIONES DE LA IDENTIDAD

Vimos en el teorema (2.24) del capítulo II, que en espacios de tipo homogéneo normal, es válido un resultado análogo al de Calderón-Zygmund sobre aproximaciones de la identidad con núcleos radiales decrecientes. En $\mathbb{R}^n$ existe un teorema debido a Zó (ver [Z]), que extiende el de Calderón-Zygmund al caso en que el núcleo de convolución K está dominado por una función no negativa, integrable y perteneciente a $C^1(\mathbb{R}^n-\{0\})$ cuyo gradiente es menor o igual que $C|x|^{-n-1}$. La demostración se basa en un resultado general sobre tipo débil (1,1) de un operador sublineal, acotado en algún L^p y que actúa de un modo adecuado sobre funciones con promedio nulo y soporte acotado. La primera parte de este capítulo tiene por objeto extender al contexto de espacios de tipo homogéneo generales este teorema. En la segunda se obtiene una aplicación al caso de espacios normales. Esta aplicación parte de la siguiente observación.

(3.1) Observación: Si $\ell(x)$ es una función definida sobre $\mathbb{R}^n$ con valores reales, son equivalentes los siguientes hechos:

a) $\ell(x)$ es radial, no negativa, integrable, pertenece a la clase $C^1(\mathbb{R}^n-\{0\})$ y

(3.2) $$|\nabla\ell(x)| \le C\ |x|^{-n-1}$$

para alguna constante finita C.

b) Existe una función $\phi \ge 0$ definida sobre $\mathbb{R}^+$ tal que

(3.3) $$\ell(x) = \phi(|x|^n)\ |x|^{-n}\ ,$$

(3.4) $$\phi \in C^1(\mathbb{R}^+)\ ,$$

(3.5) $$\phi \text{ es acotada}\ ,$$

(3.6) $\quad |\phi'(t)| \leq C\,t^{-1}$,

(3.7) $\quad \displaystyle\int_0^{\infty} \phi(t)\, t^{-1}\, dt < \infty$.

<u>Demostración</u>: Sea $\tilde{\ell}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ la función de $C^1(\mathbb{R}^+)$ que representa a ℓ sobre cada rayo, esto es decir que $\ell(x) = \tilde{\ell}(|x|)$. Definamos $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ por $\phi(\rho) = \rho\, \tilde{\ell}(\rho^{1/n})$, es claro que $\phi \in C^1(\mathbb{R}^+)$. Para probar que ϕ es acotada, tomemos $\rho > 0$ y elijamos $R(\rho) > \rho^{1/n}$ tal que $\tilde{\ell}(R(\rho)) < \rho^{-1}$, tal elección es posible porque $\ell \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La derivada de $\tilde{\ell}$ en el punto s es la derivada direccional de ℓ en la dirección $x_o|x_o|^{-1}$ en el punto x_o, para cualquier x_o tal que $|x_o| = s$, en consecuencia $\tilde{\ell}'(s) = |x_o|^{-1} x_o \cdot \nabla \ell(x_o)$ y por (3.2) se tiene que

$$\tilde{\ell}(\rho^{1/n}) \leq \tilde{\ell}(R(\rho)) + \int_{\rho^{1/n}}^{R(\rho)} |\tilde{\ell}'(s)|\, ds$$

$$\leq \rho^{-1} + C \int_{\rho^{1/n}}^{\infty} s^{-n-1}\, ds$$

$$\leq C\,.\,\rho^{-1} \quad ,$$

lo que prueba (3.5). Por otra parte

$$|\phi'(\rho)| = |n^{-1}\, \tilde{\ell}'(\rho^{1/n})\, \rho^{1/n} + \tilde{\ell}(\rho^{1/n})|$$

$$\leq C\, \rho^{(-n-1)/n}\, \rho^{1/n} + C\, \rho^{-1}$$

$$= C\, \rho^{-1} \quad ,$$

que es la desigualdad (3.6). Para probar (3.7) observemos que $\int \ell(x)dx$ en coordenadas polares es $C \int_0^{\infty} \phi(\rho^n)\, \rho^{-1}\, d\rho$, y esta última es la integral a estimar como puede verse haciendo el cambio de variables $\rho^n = t$.

Recíprocamente, si $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ satisface (3.4) a (3.7), la función ℓ definida por (3.3) es integrable, pertenece a $C^1(\mathbb{R}^n - \{0\})$, y además, si $1 \leq i \leq n$ se tiene que

$$\frac{\partial \ell}{\partial x_i}(x) = [\phi'(|x|^n)\, n|x|^{n-2} x_i |x|^n - \phi(|x|^n)\, n|x|^{n-2} x_i]\, |x|^{-2n}$$

$$= n\, \phi'(|x|^n)\, x_i\, |x|^{-2} - n\,\phi(|x|^n)|x|^{-n-2} x_i \; .$$

De esta expresión para una derivada parcial, (3.5) y (3.6), la desigualdad (3.2) resulta clara. C.Q.D.

De la observación (3.1) se deduce que el estudio de la aproximación de la identidad definida por un núcleo radial en $\mathbb{R}^n$, que cumple las condiciones del teorema de Zó, es equivalente al estudio de la aproximación correspondiente a un núcleo de tipo (3.3), con ϕ que satisface (3.4) a (3.7). La ventaja del segundo enfoque radica en que $\ell(x-y)$, definido por (3.3), solo depende de $|x-y|^n$ que es la casi-distancia normalizada de $\mathbb{R}^n$ entre x e y. Además las propiedades (3.4) a (3.7) son independientes del espacio y sólo se refieren al comportamiento de ϕ como función real. Si para $\delta > 0$, $\ell_\delta(x) = \delta^{-n}\ell(\delta^{-1}x)$ y ℓ está definida por (3.3), tenemos que

$$\ell_\delta(x) = \phi(\delta^{-n}|x|^n)\; |x|^{-n} \; .$$

Estos hechos sugieren estudiar el problema del tipo débil (1,1) del operador maximal cuando los núcleos son de la forma

$$K_\varepsilon(x,y) = \phi(\varepsilon^{-1}\, d(x,y))\; d(x,y)^{-1} \; ,$$

(X,d,μ) es un espacio de tipo homogéneo normal, y ϕ es una función que cumple las propiedades (3.4) a (3.7).

§.1 EL TEOREMA DE ZO

(3.8) TEOREMA: Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo con la propiedad de que las funciones continuas son densas en L^1. Sea T un operador definido sobre L^1+L^∞ con valores en el espacio de las funciones μ-medibles sobre X, numerablemente subaditivo y positivamente homogéneo, tal que para algún par de constantes positivas M y C_0 ocurre que

(3.9) $\|Tg\|_\infty \le C_0 \|g\|_\infty$.

(3.10) Si $h\in L^1$, $\{x:h(x)\neq 0\}\subset B(x_0,r)$ y $\int h\,d\mu=0$, se tiene que

$$\int_{X-B(x_0,Mr)} |T h(x)|\,d\mu(x) \le \int_X |h(x)|\,d\mu(x) .$$

Entonces T es un operador de tipo débil (1,1) y acotado en L^p para $1<p\le\infty$.

Demostración: Sea ρ una casi-distancia equivalente a d tal que las bolas son conjuntos abiertos en la topología del espacio. Sean C_1 y C_2 constantes tales que

$$C_1\,\rho(x,y) \le d(x,y) \le C_2\,\rho(x,y)$$

para todo par de puntos x,y en X. Sea $f\ge 0$ una función de L^1, podemos suponer que $m_X(f)\le 1$. En virtud del lema (1.15) aplicado a f como función en el espacio (X,ρ,μ) con $\lambda=1$, obtenemos una descomposición de f como suma de una g tal que $\|g\|_\infty\le D$ más una serie de funciones con soportes contenidos en bolas e integrales nulas. Como el operador T es subaditivo y positivamente homogéneo, es suficiente demostrar que

(3.11) $\mu\{x \in X : |T f(x)| > 2(C_o D + 1)\} \leq C \|f\|_1$,

para toda función f no negativa de L^1. En lo que sigue usaremos la notación del lema (1.15). Observemos que, por la sublinealidad de T y (3.9), es suficiente estimar la medida del conjunto $\{x \in X : |T(\Sigma h_n)(x)| > C_o D + 1\}$. Sea C la constante del lema (1.5). El miembro izquierdo de (3.11) se acota por

(3.12) $\mu\{x \notin \bigcup_n B_d(x_n, MCC_2 r_n) : |T(\Sigma h_i)(x)| > C_o D + 1\} + \mu[\bigcup_n B_d(x_n, MCC_2 r_n)]$.

Para mayorar el segundo sumando de (3.12), notemos que $B_d(x_n, MCC_2 r_n) \subset B_\rho(x_n, MCC_2 C_1^{-1} r_n)$. La medida de esta última bola es menor o igual que una constante veces $\mu(B_\rho(x_n, C r_n))$, entonces por (1.19), se tiene que $\mu[\cup B_d(x_n, MCC_2 r_n)] \leq C \|f\|_1$. Por otra parte, por (1.18) $S_n = \{x : h_n(x) \neq 0\} \subset B_\rho(x_n, C r_n) \subset B_d(x_n, CC_2 r_n)$ y en consecuencia cada h_n está en las condiciones de (3.10), esto permite estimar el primer sumando de (3.12) por

$$C \int_{X - \cup B(x_n, MCC_2 r_n)} |T(\Sigma h_i)(x)| \, d\mu(x)$$

$$\leq C \sum_i \int_{X - B(x_i, MCC_2 r_i)} |T h_i(x)| \, d\mu(x)$$

$$\leq C \sum_i \int_X |h_i(x)| \, d\mu(x)$$

$$= C \|h\|_1 \leq C \|f\|_1 .$$

Lo que prueba (3.11). La acotación en L^p es consecuencia del teorema de interpolación de Marcinkiewicz. C.Q.D.

Este teorema puede aplicarse al caso de operadores maximales de integrales para obtener el siguiente resultado.

(3.13) COROLARIO: Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo tal que las funciones continuas son densas en L^1. Sea $\{K_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de funciones medibles en $X \times X$ tal que, para $f \in L^1 + L^\infty$

$$T f(x) = \sup_{\alpha\in\Gamma} \left| \int_X K_\alpha (x,y)\, f(y)\, d\mu(y) \right|$$

define una función μ-medible sobre X. Además:

(3.14) existe C independiente de x y de α tal que

$$\int_X |K_\alpha(x,y)|\, d\mu(y) \leq C ,$$

(3.15) existen dos constantes positivas M y C tales que

$$\int_{d(z,y)\geq Md(x,y)} \sup_{\alpha\in\Gamma} |K_\alpha(z,y) - K_\alpha(z,x)|\, d\mu(z) \leq C .$$

Entonces el operador T es de tipo débil $(1,1)$ y acotado en L^p, $1 < p \leq \infty$.

Demostración: De la propiedad (3.14) de la familia $\{K_\alpha\}$ sigue inmediatamente que T es acotado en L^∞, que es la hipótesis (3.9) del teorema. Para verificar (3.10) tomemos una función h en L^1 tal que $\{x : h(x) \neq 0\} \subset B(x_o,r)$ y $\int h\, d\mu = 0$, entonces por (3.15) el miembro izquierdo de (3.10) está mayorado por

$$\int_{X-B(x_o,Mr)} \sup_{\alpha\in\Gamma} \left| \int_{B(x_o,r)} [K_\alpha(z,y) - K_\alpha(z,x_o)]\, h(y)\, d\mu(y) \right| d\mu(z)$$

$$\leq \int_{B(x_o,r)} |h(y)| \int_{X-B(x_o,Mr)} \sup_{\alpha\in\Gamma} |K_\alpha(z,y)-K_\alpha(z,x_o)| \, d\mu(z)\, d\mu(y)$$

$$\leq C \, \|h\|_1 \, .$$

En consecuencia, del teorema (3.8) obtenemos el resultado. C.Q.D.

§.2 APLICACION A UNA CLASE DE APROXIMACIONES DE LA IDENTIDAD EN ESPACIOS NORMALES.

En esta sección (X,d,μ) denotará un espacio de tipo homogéneo normal tal que las funciones continuas son densas en L^1.

Sea ϕ una función definida sobre $\mathbb{R}^+$ con valores en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que satisface las propiedades (3.4) a (3.7). La condición (3.4) puede debilitarse, es suficiente que ϕ sea Lipschitz 1 en cada intervalo (t,∞), con constante de Lipschitz menor o igual que Ct^{-1}.

Sea $0<\varepsilon<1$ y definamos $K_\varepsilon(x,y): X\times X \to \mathbb{R}^+\cup\{0\}$ por

(3.16) $$K_\varepsilon(x,y) = \phi(\varepsilon^{-1} d(x,y))\, d(x,y)^{-1} \, .$$

En el próximo lema se prueba que, si el espacio tiene la propiedad (P), la familia $\{K_\varepsilon(x,y) : 0<\varepsilon<1\}$ verifica (3.14). Veremos luego ejemplos de espacios sin la propiedad (P) para los cuales (3.14) no es válida.

(3.17) <u>LEMA</u>: Sea (X,d,μ) un espacio con la propiedad (P). Entonces existe una constante C tal que

(3.18) $$\int_{d(x,y)<a} K_\varepsilon(x,y)\, d\mu(y) \leq C \int_0^{a/\varepsilon} \phi(t)\, t^{-1}\, dt,$$

para todo $\varepsilon\in(0,1)$, $x\in X$ y $a>0$. Por consiguiente

$$(3.19) \qquad \int_X K_\varepsilon(x,y)\, d\mu(y) \le C \int_0^\infty \phi(t)\, t^{-1}\, dt \ .$$

Demostración: Sea x un punto fijo en X. $K_\varepsilon(x,y)$, como función de (ε,y) definida sobre $(0,1)\times X$, es medible. Como (X,μ) es σ-finito se tiene que

$$(3.20) \qquad \int_0^1 \{\int_X K_\varepsilon(x,y)\, d\mu(y)\}\, d\varepsilon = \int_X d(x,y)^{-1} \{\int_0^1 \phi(\varepsilon^{-1} d(x,y))\, d\varepsilon\}\, d\mu(y) \ .$$

Luego del cambio de variables $\varepsilon \to t = \varepsilon^{-1} d(x,y)$, el segundo miembro de (3.20) se escribe

$$\int_X \{\int_{d(x,y)}^\infty \phi(t)\, t^{-2}\, dt\}\, d\mu(y) \ .$$

Invirtiendo nuevamente el orden de integración, aplicando la propiedad de normalidad del espacio y teniendo en cuenta que, por la propiedad (P), los conjuntos unitarios tienen medida nula, obtenemos

$$\int_0^1 \{\int_X K_\varepsilon(x,y)\, d\mu(y)\}\, d\varepsilon = \int_0^\infty \phi(t)\, t^{-2} \{\int_{d(x,y)<t} d\mu(y)\}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \phi(t)\, t^{-2}\, \mu(B(x,t))\, dt$$

$$\le C \int_0^\infty \phi(t)\, t^{-1}\, dt \ .$$

Por consiguiente de (3.7) sigue que $\int_X K_\varepsilon(x,y)\, d\mu(y)$ está en $L^1(0,1)$, entonces es finita para casi todo $\varepsilon \in (0,1)$. Pero, en principio, el conjunto de los ε para los cuales dicha integral diverge podría depender de x, la propiedad (P) es suficiente para que esto no ocurra. Aplican do el teorema de Lebesgue de derivación de la integral a la función $\int_{B(x,a)} K_\varepsilon(x,y)d\mu(y)$, en la variable ε para x fijo, se tiene que

$$(3.21)\quad \int_{B(x,a)} K_{\varepsilon_o}(x,y)\, d\mu(y) = \lim_{h\to 0} h^{-1}\int_{\varepsilon_o}^{\varepsilon_o+h} \{\int_{B(x,a)} K_\varepsilon(x,y)\, d\mu(y)\}\, d\varepsilon$$

para casi todo $\varepsilon_o \in (0,1)$. Estimemos ahora, un promedio cualquiera en el miembro derecho de (3.21). Para ello procedamos como antes, invirtiendo el orden de integración, efectuando el cambio de variables $\varepsilon \to t = \varepsilon^{-1} d(x,y)$, cambiando nuevamente el orden de integración y, finalmente, aplicando la propiedad (P):

$$(3.22)\quad h^{-1}\int_{\varepsilon_o}^{\varepsilon_o+h} \{\int_{d(x,y)<a} K_\varepsilon(x,y)\, d\mu(y)\}\, d\varepsilon$$

$$= h^{-1}\int_{d(x,y)<a} d(x,y)^{-1}\{\int_{\varepsilon_o}^{\varepsilon_o+h} \phi(\varepsilon^{-1} d(x,y))\, d\varepsilon\}\, d\mu(y)$$

$$= h^{-1}\int_{d(x,y)<a} \{\int_{d(x,y)/(\varepsilon_o+h)}^{d(x,y)/\varepsilon_o} \phi(t)\, t^{-2}\, dt\}\, d\mu(y)$$

$$= h^{-1}\int_{a/(\varepsilon_o+h)}^{a/\varepsilon_o} \phi(t)\, t^{-2}\{\int_{t\varepsilon_o\le d(x,y)<a} d\mu(y)\}\, dt$$

$$+ h^{-1}\int_{0}^{a/(\varepsilon_o+h)} \phi(t)\, t^{-2}\{\int_{t\varepsilon_o\le d(x,y)<t(\varepsilon_o+h)} d\mu(y)\}\, dt$$

$$\le C\int_0^{a/\varepsilon_o} \phi(t)\, t^{-1}\, dt \quad .$$

Por consiguiente (3.18) es válida para casi todo ε entre 0 y 1. Sea $\varepsilon_o \in (0,1)$, $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > \varepsilon_o$ tal que la acotación (3.18) es válida para ε, por (3.4) y (3.6) se tiene que

$$\int_{N^{-1} \le d(x,y) < a} K_{\varepsilon_o}(x,y)\, d\mu(y)$$

$$\le \int_{N^{-1} \le d(x,y) < a} d(x,y)^{-1} |\phi(\varepsilon_o^{-1} d(x,y)) - \phi(\varepsilon^{-1} d(x,y))|\, d\mu(y)$$

$$+ \int_{N^{-1} \le d(x,y) < a} d(x,y)^{-1} \phi(\varepsilon^{-1} d(x,y))\, d\mu(y)$$

$$\le C a N \varepsilon \frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\varepsilon \varepsilon_o} + C \int_0^{a/\varepsilon_o} \phi(t)\, t^{-1}\, dt,$$

como un número ε en estas condiciones puede elegirse arbitrariamente próximo a ε_o, es claro que

$$\int_{N^{-1} \le d(x,y) < a} K_{\varepsilon_o}(x,y)\, d\mu(y) \le C \int_0^{a/\varepsilon_o} \phi(t)\, t^{-1}\, dt ,$$

uniformemente en N, de modo que (3.18) es válida en todo el intervalo $(0,1)$. C.Q.D.

(3.23) Observación: Si el espacio (X,d,μ) tiene la propiedad de que la medida de cualquier corona está acotada inferiormente por la amplitud, como ocurre en los ejemplos presentados en el capítulo I, entonces por las igualdades en (3.22) es claro que

$$\int_X K_\varepsilon(x,y)\, d\mu(y) \ge C \int_0^\infty \phi(t)\, t^{-1}\, dt,$$

para todo ε en $(0,1)$ y $x \in X$.

(3.24) TEOREMA: Sea (X,d,μ) un espacio de orden α que satisface la propiedad (P). Sea K_ε definido por (3.16) para $0<\varepsilon<1$. Entonces el operador

$$T f(x) = \sup_{0<\varepsilon<1} \left| \int_X K_\varepsilon(x,y)\, f(y)\, d\mu(y) \right|$$

es de tipo débil (1,1) y acotado en $L^p\,(1<p\leq\infty)$.

Demostración: En el lema (3.17) hemos demostrado que la familia de núcleos $\{K_\varepsilon\}$ satisface la hipótesis (3.14) del corolario (3.13). Veamos que también (3.15) es satisfecha. Es claro que $\sup_{0<\varepsilon<1} |K_\varepsilon(z,y)-K_\varepsilon(z,x)|$ es medible como función de z para cualquier par de puntos x,y en X. Por las propiedades (3.4) y (3.5) de ϕ tenemos que

$$(3.25) \qquad |K_\varepsilon(z,y)-K_\varepsilon(z,x)| = |\phi(\varepsilon^{-1}d(z,y))d(z,y)^{-1} - \phi(\varepsilon^{-1}d(z,x))d(z,x)^{-1}|$$

$$\leq d(z,y)^{-1}|\phi(\varepsilon^{-1}d(z,y)) - \phi(\varepsilon^{-1}d(z,x))|$$

$$+ |\phi(\varepsilon^{-1}d(z,x))|\ |d(z,y)^{-1} - d(z,x)^{-1}|$$

$$\leq |\phi'(\xi)|\ |d(z,y) - d(z,x)|\, \varepsilon^{-1}\, d(z,y)^{-1}$$

$$+ C\,|d(z,y) - d(z,x)|\, d(z,y)^{-1}\, d(z,x)^{-1} ,$$

ξ es un número entre $d(z,y)\varepsilon^{-1}$ y $d(z,x)\varepsilon^{-1}$. Si tomamos $2k$ como constante M en (3.15), sólo nos interesará estimar el miembro izquierdo de (3.25) para $d(z,x)\geq 2kd(x,y)$. En este caso

$$d(z,x) \leq k\,[d(z,y) + d(y,x)] \leq k\, d(z,y) + d(z,x)/2$$

por lo tanto $d(z,x) \leq 2\,k\,d(z,y)$, por consiguiente $\xi \geq C\, d(x,z)\varepsilon^{-1}$.

Entonces, de (3.6) y (3.25) sigue que

$$|K_\varepsilon(z,y) - K_\varepsilon(z,x)| \leq C|d(z,y) - d(z,x)|d(z,y)^{-1}\, d(z,x)^{-1}$$

$$\leq C|d(z,y) - d(z,x)|\, d(z,x)^{-2} \;.$$

Notemos además que, como

$$d(z,y) \leq k[d(z,x) + d(x,y)] \leq C\,d(z,x) \;,$$

la propiedad de orden α de d aplicada al último miembro de la desigualdad anterior permite obtener

$$(3.26) \qquad |K_\varepsilon(z,y) - K_\varepsilon(z,x)| \leq C\,d(z,x)^{1-\alpha}\, d(x,y)^\alpha\, d(z,x)^{-2}$$

$$= C\,d(x,y)^\alpha\, d(z,x)^{-1-\alpha} \;,$$

para $d(z,x) \geq 2k\,d(x,y)$ y cualquier $\varepsilon > 0$. La acotación (3.15) se consigue por integración del miembro derecho de (3.26), aplicando (1.35).

Para que el corolario (3.13) sea aplicable, resta aún probar que el operador T está bien definido, en el sentido de que $T\,f(x)$ es una función medible. Demostraremos que si f es acotada e integrable, $T\,f(x)$ es una función semi-continua inferiormente, este hecho será de utilidad en el capítulo IV. Más precisamente, para cada $\lambda > 0$

(3.27) $\quad U_\lambda = \{x \in X : T\,f(x) > \lambda\}$ es abierto.

En efecto: sea $x_o \in U_\lambda$ entonces existe $\varepsilon \in (0,1)$ tal que $|\int K_\varepsilon(x_o,z)f(z)\, d\mu(z)| > \lambda$. Sea x un punto tal que $2kd(x,x_o)<1$, aplicando el lema (3.17) y (3.26), las siguientes desigualdades son válidas

$$|\int_X [K_\varepsilon(x_o,z) - K_\varepsilon(x,z)]\, f(z)\, d\mu(z)|$$

$$\leq \int_{d(z,x_o)\geq[2kd(x,x_o)]^{1/2}} |K_\varepsilon(x_o,z) - K_\varepsilon(x,z)| \; |f(z)| d\mu(z)$$

$$+ \int_{d(z,x_o)<[2kd(x,x_o)]^{1/2}} K_\varepsilon(x_o,z) \; |f(z)| \; d\mu(z)$$

$$+ \int_{d(z,x_o)<[2kd(x,x_o)]^{1/2}} K_\varepsilon(x,z) \, |f(z)| \; d\mu(z)$$

$$\leq C\, d(x,x_o)^{\alpha} \|f\|_\infty \int_{d(z,x_o)\geq[2kd(x,x_o)]^{1/2}} d(z,x_o)^{-1-\alpha} \, d\mu(z)$$

$$+ C\|f\|_\infty \int_{0<t<k[(2kd(x,x_o))^{1/2}+d(x,x_o)]\varepsilon^{-1}} \phi(t)\, t^{-1}\, dt$$

$$\leq C\|f\|_\infty \, d(x,x_o)^{\alpha/2}$$

$$+ C\|f\|_\infty \int_{0<t<C\varepsilon^{-1}d(x,x_o)^{1/2}} \phi(t)\, t^{-1}\, dt.$$

El último miembro tiende a cero cuando x tiende a x_o y por consiguiente $|\int K_\varepsilon(x,z)\, f(z)\, d\mu(z)| > \lambda$ en todo un entorno de x_o. C.Q.D.

(3.28) Observación: Si (X,d,μ) es un espacio de orden α que satisface la propiedad (P), entonces el resultado de Calderón-Zygmund para núcleos radiales y decrecientes puede obtenerse aplicando el teorema (3.24). En efecto: sea $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una función decreciente e integrable y

$$K_\varepsilon(x,y) = \varepsilon^{-1}\, \psi\, (\varepsilon^{-1}\, d(x,y)) \, .$$

Si $\phi(t) = \int_{t/2}^{t} \psi(s)\,ds$, por la monotonía de ψ es claro que

$$t^{-1}\,\phi(t) = t^{-1}\int_{t/2}^{t} \psi(s)\,ds \geq \psi(t)/2 \;,$$

por consiguiente

$$K_\varepsilon(x,y) = \varepsilon^{-1}\,\psi(\varepsilon^{-1}\,d(x,y)) \leq 2\,\phi(\varepsilon^{-1}\,d(x,y))\,d(x,y)^{-1}\,.$$

Esto muestra que es suficiente probar que la función ϕ tiene las propiedades requeridas por el teorema (3.24). Sea $t>0$ y $t_1 \geq t_2 \geq t$. Supongamos primero que $t_2 \geq t_1/2$, en este caso tenemos que

$$\begin{aligned}
t\,|\phi(t_1) - \phi(t_2)| &= t\,\Big|\int_{t_1/2}^{t_1} \psi(s)\,ds - \int_{t_2/2}^{t_2} \psi(s)\,ds\Big| \\
&\leq t\int_{t_2}^{t_1} \psi(s)\,ds + t\int_{t_2/2}^{t_1/2} \psi(s)\,ds \\
&\leq t_2\,\psi(t_2)\,(t_1-t_2) + t_2\,\psi(t_2/2)\,(t_1-t_2)/2 \\
&\leq 2\Big(\int_0^\infty \psi(s)\,ds\Big)\,|t_1-t_2|\;.
\end{aligned}$$

Si $t_2 < t_1/2$, obtenemos

$$\begin{aligned}
t\,|\phi(t_1) - \phi(t_2)| &\leq t\int_{t_1/2}^{t_1} \psi(s)\,ds + t\int_{t_2/2}^{t_2} \psi(s)\,ds \\
&\leq \frac{t_1}{2}\,\psi\Big(\frac{t_1}{2}\Big)\,\frac{t_1}{2} + t_2\,\psi\Big(\frac{t_2}{2}\Big)\,\frac{t_1}{2} \\
&\leq C\Big(\int_0^\infty \psi(s)\,ds\Big)\,|t_1 - t_2|\;.
\end{aligned}$$

Estas acotaciones prueban que la función ϕ es de clase Lipschitz 1 en el intervalo (t,∞) con norma menor o igual que Ct^{-1}. Es claro que ϕ es acotada por la norma L^1 de ψ. Finalmente, por una aplicación del teorema de Tonelli, se tiene que

$$\int_0^\infty t^{-1}\phi(t)\,dt = \int_0^\infty t^{-1}\left\{\int_{t/2}^t \psi(s)\,ds\right\}dt$$

$$= \int_0^\infty \psi(s)\left\{\int_s^{2s} t^{-1}\,dt\right\}ds$$

$$= \log 2\left(\int_0^\infty \psi(s)\,ds\right). \qquad \text{C.Q.D.}$$

Construiremos a continuación, ejemplos de espacios normales de orden α que carecen de la propiedad (P) y funciones ϕ tales que satisfacen todas las condiciones de (3.24), pero la acotación (3.14) no es válida.

Ejemplo 1: Sea $(\mathbb{R},d,m)$ el espacio de tipo homogéneo del ejemplo (1.37). Hemos visto que este espacio es normal y de orden α, pero no tiene la propiedad (P). Los intervalos

$$(2^i(1-1/i)\,,\,2^i(1+1/i))$$

son disjuntos dos a dos si $i \geq 4$. Sea $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida de la siguiente manera:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 12 \\ 2^{-i}t + i^{-1} - 1 & \text{si } t \in (2^i(1-1/i), 2^i)\ ,\ i \geq 4 \\ -2^{-i}t + i^{-1} + 1 & \text{si } t \in (2^i\,,\,2^i(1+1/i)) \\ 0 & \text{si } t \in (2^i(1+1/i)\,,\,2^{i+1}(1-1/(i+1))) \end{cases}.$$

Es claro que ϕ es acotada y que $|\phi'(t)| \leq C\,t^{-1}$. Además,

$$\int_0^\infty t^{-1}\,\phi(t)\,dt = \sum_{i=4}^{\infty}\left\{\int_{2^i(1-1/i)}^{2^i} [2^{-i} + (i^{-1} - 1)\,t^{-1}]\,dt\right.$$

$$\left. + \int_{2^i}^{2^i(1+1/i)} [-2^{-i} + (i^{-1} + 1)\,t^{-1}]\,dt\right\}$$

$$= \sum_{i=4}^{\infty}\left\{ i^{-1}\log[(1+1/i)/(1-1/i)] + \log[1-(1/i)^2]\right\}$$

$$\leq C \sum_{i=4}^{\infty} i^{-2} < \infty \quad .$$

Sin embargo, si $\{\varepsilon_j\}$ es la sucesión $\{2^{-j}\}$ y

$$K_{\varepsilon_j}(0,y) = d(0,y)^{-1}\,\phi[\varepsilon_j^{-1}\,d(0,y)] \quad ,$$

se tiene que

$$\int_X K_{\varepsilon_j}(0,y)\,d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} K_{\varepsilon_j}(0,y)\,dy$$

$$\geq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{\{y:d(0,y)=2^i\}} 2^{-i}\,\phi[2^{j+i}]\,dy$$

$$= C \sum_{i\geq 4-j} (i+j)^{-1} = \infty \quad .$$

En el ejemplo precedente tanto la casi-distancia como la medida son invariantes por traslaciones de $\mathbb{R}$, por lo tanto el conjunto de los valores de ε para los cuales la integral $\int K_\varepsilon(x,y)\,dy$ es convergente , es independiente de x . El siguiente ejemplo muestra que esto no ocurre en general, más aún, que puede ser vacío el conjunto de los $\varepsilon \in (0,1)$ tales que dichas integrales son finitas para todo x. Necesitaremos la siguiente observación.

(3.29) LEMA: Sean f y g funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}$ tales que f es Lipschitz 1, g es Lipschitz 1, acotada e idénticamente 1 fuera de un compacto. Entonces fg es Lipschitz 1.

Demostración: Sea B una bola que contiene al soporte de $g-1$ y M una cota superior de $|f|$ sobre B. Si x_1 y x_2 son puntos de $\mathbb{R}^n$, supondremos tres casos según su posición respecto de B.

i) Si $x_1, x_2 \in B$, se tiene que

$$|f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)| \le |f(x_1)-f(x_2)|\,|g(x_1)|+|f(x_2)|\,|g(x_2)-g(x_1)|$$

$$\le (\|f\|_{Lip(1)}\|g\|_\infty + M\|g\|_{Lip(1)})|x_1-x_2| \; .$$

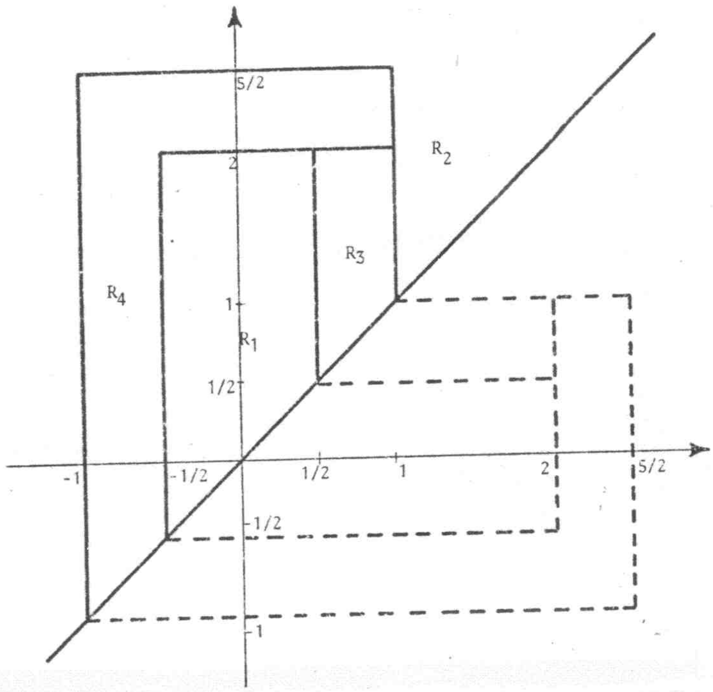
ii) Si tanto x_1 como x_2 están en el complemento de B la acotación necesaria se consigue con constante $\|f\|_{Lip(1)}$.

iii) Supongamos que $x_1 \in B$ y $x_2 \notin B$. Si x_3 es un punto en el borde de B que además está en el segmento de recta que une x_1 con x_2, obtenemos

$$\begin{aligned}
|f(x_1)\,g(x_1) - f(x_2)\,g(x_2)| &= |f(x_1)\,g(x_1) - f(x_2)| \\
&\le |f(x_1) - f(x_3)|\;|g(x_1)| \\
&\quad + |f(x_3)|\;|g(x_1) - g(x_3)| \\
&\quad + |f(x_3) - f(x_2)| \\
&\le (\|f\|_{Lip(1)}\|g\|_\infty + M\|g\|_{Lip(1)})|x_1-x_3| \\
&\quad + \|f\|_{Lip(1)}\;|x_3 - x_2| \\
&\le C(f,g)\;|x_1 - x_2| \; .
\end{aligned}$$

C.Q.D.

Ejemplo 2: Sea $X = \mathbb{R}$, m la medida de Lebesgue y ρ la función considerada en el ejemplo (1.37). Con el fin de definir la casi-distancia d sobre X, comenzaremos construyendo una función auxiliar ψ sobre $\mathbb{R}^2$. Sean $R_i (i=1,2,3,4)$ las regiones planas esquematizadas en el siguiente gráfico



Sea $\psi: \mathbb{R}^2 \to [1/2,1]$ una función simétrica de clase Lipschitz 1 que vale idénticamente 1/2 sobre R_1, 1 sobre R_2 y si $(x,y) \in R_3$, $\psi(x,y) = x$. La casi-distancia

$$d(x,y) = \rho(x-y)\,\psi(x,y)$$

sobre $\mathbb{R}$, es equivalente a la métrica usual y por lo tanto es normal. Por otra parte del lema (3.29) y las propiedades de ρ y Ψ resulta claro que d es de clase Lipschitz 1 como función sobre $\mathbb{R}^2$, por consiguiente

$$|d(x,y) - d(z,y)| \leq C\,|(x,y) - (z,y)| = C|x-z| \leq C\,d(x,z),$$

lo que significa que el espacio es de orden 1. Para construir la función

ϕ notemos que si $i \geq 3$, los intervalos

$$(2^{-i}(1-1/i),\ 2^{-i}(1+1/i))$$

son disjuntos. Definamos ϕ de la siguiente manera

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 1/6 \\ 2^{i}t + i^{-1} - 1 & \text{en } (2^{-i}(1-1/i),\ 2^{-i}),\ i \geq 3 \\ -2^{i}t + i^{-1} + 1 & \text{en } (2^{-i},\ 2^{-i}(1+1/i)), \\ 0 & \text{en } (2^{-(i+1)}(1+1/(i+1)),\ 2^{-i}(1-1/i)). \end{cases}$$

Como en el ejemplo 1 se prueba que ϕ tiene todas las propiedades del teo̲rema (3.24). Cualquier ε en el intervalo $(0,1)$ puede escribirse como pro̲ducto de un número x en $[1/2,1)$ por 2^{-j} con $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Con esta re̲lación entre ε y x, $\int K_\varepsilon(x,y)\,dy$ puede acotarse inferiormente así:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} K_\varepsilon(x,y)\,dy &\geq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \int_{\{y:d(x,y)=\varepsilon 2^{-i}\}} K_\varepsilon(x,y)\,dy \\ &\geq \sum_{i\geq 3} i^{-1}\, 2^{i}\, \varepsilon^{-1}\, m\{y: \rho(x-y)\psi(x,y) = x\, 2^{-i-j}\} \\ &\geq \sum_{i\geq 3} i^{-1}\, 2^{i+j}\, m\,\{y: 2 > y > x \ \text{ y } \ \rho(y-x) = 2^{-i-j}\} \\ &\geq \sum_{i\geq 3} i^{-1}\, 2^{i+j}\, m\,\{y: 1 > y-x > 0 \ \text{ y } \ \rho(y-x) = 2^{-i-j}\} \\ &\geq C \sum_{i\geq 3} i^{-1} = \infty . \end{aligned}$$

Esto prueba que si

$$E_x = \{\, \varepsilon \in (0,1) : \int_{\mathbb{R}} K_\varepsilon(x,y)\,dy < \infty \,\},$$

entonces $\bigcap_x E_x = \emptyset$.

(3.30) Observación: Si $\int K_\varepsilon(x,y)\, d\mu(y)$ es acotada inferiormente de manera uniforme, como ocurre en los casos considerados en (3.23) o cuando ϕ es mayor que un número positivo en un intervalo suficientemente grande dependiente de las constantes de normalidad del espacio, y si

$$\tilde{K}_\varepsilon(x,y) = K_\varepsilon(x,y)\left(\int K_\varepsilon(x,z)\, d\mu(z)\right)^{-1},$$

el operador maximal de las aproximaciones con núcleo $\tilde{K}_\varepsilon$ está acotado por una constante veces el correspondiente a K_ε. Usando las propiedades de ϕ puede obtenerse la convergencia puntual de $\int \tilde{K}_\varepsilon(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)$ hacia $f(x)$, cuando f es una función de clase Lipschitz α con soporte acotado. Para $f \in L^1$ se procede del modo usual aplicando el tipo débil (1,1) del operador maximal asociado a los núcleos $\tilde{K}_\varepsilon$.

(3.31) Observación: Si d es una función no negativa definida sobre $X \times X$ que satisface (1.1), (1.3) y una propiedad de simetría como aquella que hemos numerado (1.2') en el ejemplo (1.43), las demostraciones de (3.17) y (3.24) subsisten si además d cumple una propiedad de orden α con respecto a la segunda variable (ver (1.20')), y si para $B(x,r) = \{y : d(x,y) < r\}$ se verifica (P).

CAPITULO IV

ACOTACION EN ESPACIOS L^p CON PESOS DE OPERADORES MAXIMALES

En este capítulo se estudia el problema de la acotación en espacios L^p con pesos de los operadores maximales considerados en los capítulos II y III. Más precisamente, se trata la cuestión de la suficiencia de la condición A_p de Muckenhoupt sobre un peso w, para obtener acotación en $L^p(X,w\,d\mu)$ de aquellos operadores.

Este problema, planteado para el operador maximal de Hardy-Littlewood en espacios de tipo homogéneo tales que para cada x fijo en X, $\mu(B(x,r))$ es una función continua de r, fue resuelto por A. P. Calderón en [C]. El caso general fue obtenido por Macías y Segovia (ver [MS4]), recuperando la técnica de [CF], luego de la construcción de una casi-distancia adecuada equivalente a la original del espacio.

El método de Coifman y Fefferman para integrales singulares en $\mathbb{R}^n$ puede adaptarse al caso de espacios de tipo homogéneo, no sólo para los operadores del Capítulo II, sino también para el operador maximal de aproximaciones de la identidad considerado en el Capítulo III. Este método conduce a una acotación de la norma p del operador que se estudia por la norma p del maximal de Hardy-Littlewood.

La validez de estos resultados requiere condiciones del tipo (2.1) y (2.2') sobre el núcleo, es sabido (ver [KW]) que aún en $\mathbb{R}^n$ y para núcleos de Calderón-Zygmund las propiedades de suavidad de K no pueden debilitarse hasta (2.2") sin que las clases A_p de Muckenhoupt dejen de ser adecuadas para la acotación en $L^p(X,w\,d\mu)$. Se obtienen, en este sentido, condiciones intermedias sobre K tales que una clase de Muckenhoupt, A_q, es suficiente para la acotación en L^p con pesos del operador maximal de las integrales singulares, q depende de p y de la propiedad de suavidad de K .

En este Capítulo (X,d,μ) será un espacio de tipo homogéneo tal que las funciones continuas de soporte acotado son densas en L^1 .

DEFINICION DE LAS CLASES A_p

a) Sea $1 < p < \infty$, una función w no negativa y localmente integrable sobre X pertenece a la clase A_p si y sólo si existe una constante finita C tal que para toda bola B es válida la acotación

$$(4.1) \qquad (\mu(B)^{-1}\int_B w\,d\mu)(\mu(B)^{-1}\int_B w^{-1/(p-1)}\,d\mu)^{p-1} \le C \quad .$$

b) Se dice que $w \in A_\infty$ si y sólo si existen constantes C y $\delta > 0$ tales que para toda bola B y todo subconjunto medible E de B se tiene la desigualdad

$$(4.2) \qquad w(E)\,w(B)^{-1} \le C\,\mu(E)^{\delta}\,\mu(B)^{-\delta} \quad ,$$

donde

$$w(E) = \int_E w\,d\mu \quad .$$

Si $1 < p < q < \infty$, por la desigualdad de Hölder se obtiene que $A_p \subset A_q$. La inclusión $A_p \subset A_\infty$ para $1 < p < \infty$ también es válida y se basa en una desigualdad de sentido opuesto a la de Hölder que, en espacios de tipo homogéneo es el siguiente teorema de [MS3].

TEOREMA: Si $w \in A_p$, entonces existen $\delta > 0$ y $C < \infty$ tales que

$$(4.3) \qquad (\mu(B)^{-1}\int_B w^{1+\delta}\,d\mu)^{1/(1+\delta)} \le C\,\mu(B)^{-1}\int_B w\,d\mu)$$

para toda bola B .

De este resultado se obtiene, como en el caso enclídeo que, si $w \in A_p$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\varepsilon}$. Este hecho es suficiente para demostrar la acotación en espacios L^p con pesos de A_p del operador maximal de Hardy-Littlewood, esto es:

$$(4.4) \qquad \int_X (Mf(x))^p\, w(x)\, d\mu(x) \le C \int_X |f(x)|^p\, w(x)\, d\mu(x) \quad ,$$

para toda $f \in L^p(X, w\, d\mu)$.

(4.5) LEMA: Si (X,d,μ) es normal, $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$ entonces, para cualquier punto $x_o \in X$, la integral

$$\int_X w(y)\, [1+d(x_o,y)]^{-p}\, d\mu(y)$$

es finita.

Demostración: Si el espacio X tiene medida finita el resultado es claro, pues w es localmente integrable y $X = B(x_o,R)$ para R suficientemente grande. Supongamos que $\mu(X) = \infty$, sean A_1 , A_2 y K_2 las constantes de normalidad del espacio con la notación de (1.29) a (1.32) . Si $K_2\, \mu(\{x_o\}) > 2$, denotemos por k_o el número natural tal que $2^{k_o} < K_2\, \mu(\{x_o\}) \le 2^{k_o+1}$, en el caso contrario tomemos $k_o = 0$. La integral a estimar puede descomponerse de la siguiente manera

$$(4.6) \qquad \int_X w(y)\, [1 + d(x_o,y)]^{-p}\, d\mu(y) = \sum_{k=k_o}^{\infty} \int_{2^k \le d(x_o,y) < 2^{k+1}} w(y)\, [1+d(x_o,y)]^{-p} d\mu(y)$$

$$+ \int_{B(x_o,2^{k_o})} w(y)\, [1+d(x_o,y)]^{-p}\, d\mu(y) \quad ,$$

el segundo sumando del miembro derecho de (4.6) es finito. Por (1.31) y la elección de k_o, la serie en el primer sumando está acotada por

$$(4.7) \qquad C \sum_{k=k_o}^{\infty} 2^{(1-p)k} \left[\mu(B(x_o,2^{k+1}))^{-1} \int_{B(x_o,2^{k+1})} w(y)\, d\mu(y) \right] .$$

Como $w \in A_p$, existe un $r<p$ tal que $w \in A_r$, aplicando la condición A_r y (1.29) junto con el supuesto que $\mu(X)=\infty$, (4.7) queda mayorado por

$$C \sum_{k=k_o}^{\infty} 2^{(1-p)k} \left[\mu(B(x_o,2^{k+1}))^{-1} \int_{B(x_o,2^{k+1})} w(y)^{-1/(r-1)}\, d\mu(y) \right]^{1-r}$$

$$\leq C \sum_{k=k_o}^{\infty} 2^{(1-p)k}\, 2^{(r-1)k} \left[\int_{B(x_o,2^{k+1})} w(y)^{-1/(r-1)}\, d\mu(y) \right]^{1-r}$$

$$\leq C \left[\int_{B(x_o,2^{k_o+1})} w(y)^{-1/(r-1)}\, d\mu(y) \right]^{1-r} \left\{ \sum_{k=k_o}^{\infty} 2^{(r-p)k} \right\} < \infty .$$

C.Q.D.

En lo que sigue T^*f denotará el operador maximal asociado a las truncaciones de integrales singulares del tipo estudiado en el capítulo II, o bien el correspondiente a una aproximación de la identidad como las del capítulo III. Más precisamente consideraremos, por la analogía en su tratamiento, los dos casos siguientes simultáneamente:

(A) (X,d,μ) es un espacio normal de orden α tal que para cada $x_o \in X$, $\mu(B(x_o,r))$ es una función continua de r. K es un núcleo singular que satisface (2.1), (2.2'.a), (2.3'.a) y el operador maximal T^* es del tipo débil (1,1).

(B) (X,d,μ) es un espacio normal de orden α que cumple la propiedad

(P) ; $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es una función que satisface (3.4) a (3.7) y T^* es el operador maximal asociado a la familia de núcleos $K_\varepsilon(x,y)$ definidos por (3.16).

(4.8) LEMA: Si T^* cumple las hipótesis de (A) o de (B) y f es una función de clase Lipschitz α con soporte acotado, entonces el conjunto

$$U_\lambda = \{x \in X : T^* f(x) > \lambda\}$$

es abierto.

Demostración: Para el caso (B) este resultado ha sido probado en (3.27). Supongamos que valen las hipótesis del caso (A). Sea $x_0 \in U_\lambda$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$\left| \int_{d(x_0,y)\geq\varepsilon} K(x_0,y)\, f(y)\, d\mu(y) \right| > \lambda \quad .$$

Sea $x \in X$ un punto tal que $d(x,x_0) < \varepsilon[2C(2k)^{1-\alpha}]^{-1/\alpha}$, donde C es la constante de la propiedad de orden α del espacio, por consiguiente de (2.2'.a) sigue que

$$(4.9) \qquad \left| \int_{d(x,y)\geq\varepsilon} K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y) - \int_{d(x_0,y)\geq\varepsilon} K(x_0,y)\, f(y)\, d\mu(y) \right| \leq \int_{d(x,y)\geq\varepsilon} |K(x,y)-K(x_0,y)|\,|f(y)|\, d\mu(y)$$

$$+ \int_{B(x,\varepsilon)\Delta B(x_0,\varepsilon)} |K(x_0,y)|\,|f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\leq C \int_{d(x,y)\geq\varepsilon} d(x,y)^{-1}\, \Psi[d(x,x_0)/d(x,y)]\, |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$+C \int_{B(x,\varepsilon)\Delta B(x_0,\varepsilon)} d(x_0,y)^{-1}\, |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\leq C\varepsilon^{-1}\, \Psi[d(x,x_0)\varepsilon^{-1}]\, \|f\|_1$$

$$+C \int_{B(x,\varepsilon)\Delta B(x_0,\varepsilon)} d(x_0,y)^{-1}\, |f(y)|\, d\mu(y) \ .$$

Por las propiedades de Ψ , es claro que el primer término en el último miembro de la desigualdad (4.9) tiende a cero cuando x tiende a x_0 . Observemos que la relación entre $d(x,x_0)$ y ε permite aplicar el lema (1.21), en consecuencia

$$B(x_0,\varepsilon-C(2k\varepsilon)^{1-\alpha} d(x,x_0)^{\alpha}) \subset B(x,\varepsilon) \subset B(x_0,\varepsilon+C(2k\varepsilon)^{1-\alpha} d(x,x_0)^{\alpha}) \ ,$$

por lo tanto, la diferencia simétrica que es dominio en la integral del segundo sumando de (4.9) está contenida en

$$B(x_0,\varepsilon+C(2k\varepsilon)^{1-\alpha} d(x,x_0)^{\alpha}) - B(x_0,\varepsilon-C(2k\varepsilon)^{1-\alpha} d(x,x_0)^{\alpha}) \ .$$

Con esto, es claro que aquella integral se acota por

$$C\varepsilon^{-1} \int_{B(x_0,\varepsilon+C(2k\varepsilon)^{1-\alpha}d(x,x_0)^{\alpha})-B(x_0,\varepsilon-C(2k\varepsilon)^{1-\alpha}d(x,x_0)^{\alpha})} |f(y)|\, d\mu(y)$$

que tiende a cero cuando $x\to x_0$, en virtud de la continuidad de la medida de las bolas como función del radio. Por consiguiente, todo un entorno del punto x_0 está contenido en U_λ . C.Q.D.

(4.10) <u>LEMA</u>: Si T^* satisface las hipótesis de (A) o de (B) y f es una función no nula de la clase Lipschitz α con soporte acotado, entonces T^*f es una función acotada y, si el espacio tiene medida infinita existen $x_0 \in X$ y $C_1 < \infty$ que depende de f tal que

(4.11) $$T^*f(x) \le C_1\, d(x,x_0)^{-1} \quad .$$

Además existe C_2 que depende de f tal que

(4.12) $$Mf(x) \ge C_2\, d(x,x_0)^{-1} \quad ,$$

para x en el complemento de una bola con centro en x_0 .

<u>Demostración</u>: Sean $x_0 \in X$ y $R > 0$ tal que sop $f \subset B(x_0,R)$. Observemos que si $x \notin B(x_0,2kR)$ se tiene que

(4.13) $$B(x_0,R) \subset B(x,2k\,d(x,x_0)) - B(x,d(x,x_0)/2k) \quad .$$

(A) Si $x \in B(x_0,2kR)$ y $\varepsilon > 0$, de la suavidad de f y la propiedad de cancelación (2.3'.a) sigue que

$$\Big|\int_{d(x,y)\ge\varepsilon} K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)\Big| \le \int_{3k^2R>d(x,y)\ge\varepsilon} |K(x,y)|\,|f(y)-f(x)|\,d\mu(y)$$

$$+\,|f(x)|\,\Big|\int_{3k^2R>d(x,y)\ge\varepsilon} K(x,y)\, d\mu(y)\Big|$$

$$\le C\int_{d(x,y)<3k^2R} d(x,y)^{\alpha-1}\, d\mu(y)$$

$$+C\|\, f\,\|_\infty$$

lo que prueba que T^*f es acotada en $B(x_0,2kR)$. Si $x \notin B(x_0,2kR)$, entonces por (4.13) y (2.1)

$$\left|\int_{d(x,y)\geq\varepsilon} K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)\right| \leq \int_{(2K)^{-1}\leq\frac{d(y,x)}{d(x,x_o)}<2k} |K(x,y)||f(y)||d\mu(y)$$

$$\leq C\, \| f \|_1\, d(x,x_o)^{-1} .$$

(B) Si $x\in B(x_o,2kR)$ y $\varepsilon>0$, por (3.5) y (3.19) tenemos que

$$\left|\int K_\varepsilon(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)\right| \leq \int_{B(x_o,R)} K_\varepsilon(x,y)\, |f(y)-f(x)|\, d\mu(y)$$

$$+ |f(x)| \int K_\varepsilon(x,y)\, d\mu(y)$$

$$\leq C \int_{d(x,y)<3k^2R} d(x,y)^{\alpha-1}\, d\mu(y)$$

$$+ C\, \|f\|_\infty \int_0^\infty \phi(t)\, t^{-1}\, dt .$$

Si $x\notin B(x_o,2kR)$ se procede como en el caso (A) aplicando (3.5) . La desigualdad (4.12) se deduce de (4.13) y la normalidad del espacio pues, para $x\notin B(x_o,2kR)$ se tiene que

$$Mf(x) \geq \mu(B(x,2k\,d(x,x_o)))^{-1} \int_{B(x,2kd(x,x_o))} |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\geq C\, d(x,x_o)^{-1}\, \|f\|_1 .$$

C. Q. D.

Observemos que si f es de clase Lipschitz α con soporte acota_do y $w\in A_p$, $1<p<\infty$, de los lemas (4.10) y (4.5) sigue que $\int_X [T^* f(x)]^p\, w(x)\, d\mu(x)$ es convergente.

(4.14) <u>TEOREMA</u>: Si T^* satisface las hipótesis de (A) o de (B) y w es un peso de la clase A_∞, entonces existe una constante finita C tal que

$$\int_X [T^* f(x)]^p\, w(x)\, d\mu(x) \leq C \int_X [M f(x)]^p\, w(x)\, d\mu(x)$$

para toda f de clase Lipschitz α con soporte acotado.

Demostración: Probaremos en primer lugar, que para todo $\lambda > 0$ y para $\gamma > 0$ suficientemente pequeño es válida la desigualdad

$$(4.15) \qquad w\{x: T^* f(x) > 2\lambda \ \text{ y } \ M f(x) \leq \gamma\lambda\} \leq C\gamma^\delta\, w\{x: T^* f(x) > \lambda\} \;,$$

donde δ es el exponente en (4.2) y f es una función no negativa de clase Lipschitz α con soporte acotado. Como T^* es de tipo débil (1,1) el conjunto

$$U_\lambda = \{x \in X : T^* f(x) > \lambda\}$$

tiene medida finita. Si el espacio X tiene medida finita y existe un punto x tal que $M f(x) \leq \gamma\lambda$, como X es una bola que contiene a x, es claro que $\mu(X)^{-1} \int_X |f|\, d\mu \leq \gamma\lambda$. Por consiguiente

$$\mu\{x: T^* f(x) > 2\lambda \ \text{ y } \ M f(x) \leq \gamma\lambda\} \leq \mu\{x: T^* f(x) > 2\lambda\}$$

$$\leq C\lambda^{-1} \int_X |f|\, d\mu \leq C\gamma\mu(X) \;.$$

De esta desigualdad y A_∞ se obtiene

$$w\{x: T^* f(x) > 2\lambda \ \text{ y } \ M f(x) \leq \gamma\lambda\} \leq C\gamma^\delta\, w(X) \;,$$

lo que prueba que si $U_\lambda = X$ la desigualdad (4.15) es válida. Podemos suponer, en consecuencia, que $U_\lambda \neq X$. Por el lema (4.8) el conjunto U_λ es abierto, el lema (1.23) provee un cubrimiento por bolas de U_λ que satisface las propiedades (1.24) a (1.28), en lo que sigue se usará la notación de aquel lema. Para probar (4.15), comenzaremos por demostrar que para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene la desigualdad

$$(4.16) \qquad \mu\{x \in B(x_i,r_i) : T^* f(x) > 2\lambda \text{ y } Mf(x) \leq \gamma\lambda\} \leq C\gamma\mu(B(x_i,r_i)) \; .$$

Sea ξ_i un punto de $B(x_i,r_i)$ tal que $Mf(\xi_i) \leq \gamma\lambda$, si $f_1 = f\chi_{B(y_i,Ar_i)}$ y $f_2 = f\chi_{X-B(y_i,Ar_i)}$ con $A = D6k^3h$, como $\xi_i \in B(y_i,Ar_i)$ se tiene que

$$\mu(B(y_i,Ar_i))^{-1} \int_X f_1 \, d\mu = \mu(B(y_i,Ar_i))^{-1} \int_{B(y_i,Ar_i)} f \, d\mu \leq Mf(\xi_i) \leq \gamma\lambda \; ,$$

de donde se deduce que

$$\lambda^{-1} \int_X f_1 \, d\mu \leq \gamma\mu(B(y_i,Ar_i)) \leq C\gamma\mu(B(x_i,r_i)) ,$$

finalmente, por el tipo débil (1,1) del operador T^* tenemos

$$(4.17) \qquad \mu\{x \in X : T^* f_1(x) > \lambda/2\} \leq C\lambda^{-1} \int_X f_1 \, d\mu \leq C\gamma\mu(B(x_i,r_i)) \; .$$

Estimemos $T^* f_2(x)$ para puntos x en $B(x_i,r_i)$. Si $r > 0$, $K_r(x,y)$ denotará la truncación del núcleo singular por la bola $B(x,r)$ en el caso (A) y el núcleo definido por (3.16) en el caso (B). En cualquiera de las dos situaciones vale la desigualdad

$$\begin{aligned}
(4.18) \qquad \left| \int K_r(x,y) f_2(y) \, d\mu(y) \right| &\leq \left| \int K_r(y_i,y) f_2(y) \, d\mu(y) \right| \\
&+ \int |K_r(x,y) - K_r(y_i,y)| \, f_2(y) \, d\mu(y) \\
&\leq T^* f(y_i) \\
&+ \int_{X-B(y_i,Ar_i)} |K_r(x,y) - K_r(y_i,y)| \, f(y) \, d\mu(y) \; .
\end{aligned}$$

Por definición de U_λ y la elección de y_i en (1.28), $T^* f(y_i) \le \lambda$. En el caso (A), el segundo sumando en el último miembro de (4.18) puede acotarse usando (2.2'.a) y teniendo presente que si y es un punto en el dominio de esa integral,

$$2\,k\,d(x,y_i) \le 2\,k^2\,[d(x,x_i) + d(x_i,y_i)]$$

$$< 2\,k^2\,(h+1)\,r_i \le A\,r_i \le d(y,y_i)\ .$$

En el caso (B) se aplica (3.26) y la misma observación con respecto al orden entre $2\,k\,d(x,y_i)$ y $d(y,y_i)$. Entonces, para ambos problemas existe una función Ψ con las propiedades de (2.2') tal que

$$(4.19)\qquad \left|\int K_r(x,y)\,f_2(y)\,d\mu(y)\right| \le \lambda + C\int_{d(y,y_i)\ge A\,r_i} d(y,y_i)^{-1}\,\psi\left[\frac{d(x,y_i)}{d(y,y_i)}\right]f(y)\,d\mu(y)$$

$$+\,C\int_{[B(x,r)\Delta B(y_i,r)]-B(y_i,Ar_i)} d(x,y)^{-1} f(y)\,d\mu(y)$$

$$= \lambda + (I) + (II)\ .$$

Como ψ es monótona no decreciente y $\int_0^1 \psi(t)\,t^{-1}dt < \infty$, la integral (I) está acotada por una constante veces $Mf(\xi_i)$, en efecto:

$$(I) = C\sum_{j=0}^{\infty}\int_{A\,r_i 2^j \le d(y,y_i) < A\,r_i 2^{j+1}} d(y,y_i)^{-1}\psi[d(x,y_i)/d(y,y_i)]\,f(y)\,d\mu(y)$$

$$\le C\sum_{j=0}^{\infty}\psi(2^{-j})\,\mu(B(y_i,A\,r_i 2^{j+1}))^{-1}\int_{B(y_i,A\,r_i 2^{j+1})} f(y)\,d\mu(y)$$

$$\le C\left(\int_0^2 \psi(t)\,t^{-1}\,dt\right)\,M f(\xi_i) \le C\,\gamma\,\lambda\ .$$

Para estimar (II), notemos que si $r < 4k^2 h r_i$ el dominio de esa integral es vacío, pues por una parte

$$B(y_i, r) \subset B(y_i, 4k^2 h r_i) \subset B(y_i, A r_i) ,$$

y por otra, si $z \in B(x,r)$

$$d(z, y_i) \leq k[d(z,x) + k(d(x,x_i) + d(x_i, y_i))]$$

$$< k[r + k(r_i + h r_i)] < 6k^3 h r_i < A r_i ,$$

lo que implica que $B(x,r) \subset B(y_i, A r_i)$. Por consiguiente solo debe considerarse el caso $r \geq 4k^2 h r_i$, de esta relación sigue inmediatamente que

$$B(x, r/2k) \subset B(y_i, r) \subset B(x, A r) ,$$

por lo tanto

$$(II) \leq C \int_{B(x,Ar)-B(x,r/2k)} d(x,y)^{-1} f(y)\, d\mu(y)$$

$$\leq C M f(\xi_i) \leq C \gamma \lambda \quad .$$

De estas estimaciones y (4.19) se deduce que para todo x en $B(x_i, r_i)$, $T^* f_2(x) \leq \lambda + C\gamma\lambda$. Si γ es cualquier número positivo menor que $(2C)^{-1}$ se tiene que $T^* f_2(x) < 3\lambda/2$ sobre la bola $B(x_i, r_i)$. En consecuencia, por la subaditividad de T^* y (4.17), para cada índice i tal que el conjunto $\{x \in B(x_i, r_i) : T^* f(x) > 2\lambda \text{ y } Mf(x) \leq \gamma\lambda\}$ es distinto del vacío ocurre que

$$\mu\{x \in B(x_i, r_i) : T^* f(x) > 2\lambda \text{ y } Mf(x) \leq \gamma\lambda\} \leq \mu\{x \in B(x_i, r_i) : T^* f(x) > 2\lambda\}$$

$$\leq \mu\{x \in B(x_i, r_i) : T^* f_1(x) > \lambda/2\} + \mu\{x \in B(x_i, r_i) : T^* f_2(x) > 3\lambda/2\}$$

$$\leq C\gamma\mu(B(x_i, r_i)) \quad ,$$

si $0<\gamma<\gamma_o$; γ_o depende de las constantes del espacio y del núcleo. Esto prueba (4.16). De esta desigualdad y la propiedad A_∞ del peso w se obtiene que

$$w\{x\in B(x_i,r_i):T^* f(x)>2\lambda \text{ y } Mf(x)\le\gamma\lambda\}\le C\gamma^\delta w(B(x_i,r_i)) \quad .$$

Entonces, de (1.25) y (1.24) se deduce (4.15) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} w\{x:T^*f(x)>2\lambda \text{ y } Mf(x)\le\gamma\lambda\} &\le \sum_i w\{x\in B(x_i,r_i):T^*f(x)>2\lambda \text{ y } Mf(x)\le\gamma\lambda\} \\ &\le C\gamma^\delta \sum_i w(B(x_i,r_i)) \\ &= C\gamma^\delta \int \{\sum_i \chi_{B(x_i,r_i)}(y)\}\, w(y)\, d\mu(y) \\ &\le MC\gamma^\delta w\{x : T^* f(x)>\lambda\} \quad . \end{aligned}$$

La norma p con peso w de $T^* f$ puede estimarse calculando la integral en términos de su función distribución y aplicando luego (4.15):

$$\begin{aligned} (4.20) \qquad \int [T^* f(x)]^p w(x)\, d\mu(x) &= C\int_o^\infty \lambda^{p-1} w\{x:T^* f(x)>2\lambda\}\, d\lambda \\ &\le C\int_o^\infty \lambda^{p-1} w\{x:T^* f(x)>2\lambda \text{ y } Mf(x)\le\gamma\lambda\}\, d\lambda \\ &+ C\int_o^\infty \lambda^{p-1} w\{x:Mf(x)>\gamma\lambda\}\, d\lambda \\ &\le C\gamma^\delta \int [T^* f(x)]^p w(x)\, d\mu(x) \\ &+ C\gamma^{-p} \int [Mf(x)]^p w(x)\, d\mu(x) \quad , \end{aligned}$$

para todo $\gamma<\gamma_o$. Si $\int[T^* f(x)]^p w(x)\, d\mu(x)=\infty$, por (4.11) y (4.12) también es infinita la integral $\int[Mf(x)]^p w(x)\, d\mu(x)$ y por consiguiente la desigualdad en (4.14) se verifica trivialmente. Si $\int[T^* f(x)]^p w(x)\, d\mu(x)$ es finita (por la observación que sigue al lema (4.10), este es siempre el caso si el peso w pertenece a la clase A_p), tomando $\gamma\le(2C)^{-1/\delta}$ en

(4.20) obtenemos la tesis. C.Q.D.

(4.21) TEOREMA: Sea $1<p<\infty$, $w\in A_p$ y T^* un operador maximal en las condiciones (A) o (B), entonces existe una constante finita C tal que

(4.22) $$\int_X [T^* f(x)]^p w(x)\, d\mu(x) \leq C \int_X |f(x)|^p\, w(x)\, d\mu(x) \quad .$$

Demostración: Si f es una función de clase Lipschitz α con soporte acotado, la inclusión $A_p \subset A_\infty$, el teorema (4.14) y la desigualdad (4.4) prueban la acotación de la tesis para este tipo de funciones. Si $f\in L^p(X,w\,d\mu)$, $f\geq 0$ y T^* es el operador del problema (B), debido a que los núcleos K_ε son positivos, es suficiente aproximar f por una sucesión creciente de funciones Lipschitz de soporte acotado para obtener (4.22). Sea T^* un operador maximal de truncaciones de una integral singular en las condiciones de (A) y $f\in L^P(X,w\,d\mu)$. Por la definición de las clases de Muckenhoupt, (4.1), el peso $v=w^{-1/(p-1)}$ pertenece a A_q si q es el conjugado de Hölder de p . En virtud de esta observación y del lema (4.5), la integral que define $K_\varepsilon f(x)$ es absolutamente convergente, en efecto:

(4.23) $$\int_{d(x,y)\geq\varepsilon} |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y)\leq C\int_{d(x,y)\geq\varepsilon} \frac{w(y)^{-1/p}}{d(x,y)}\, f(y)\, w(y)^{1/p}\, d\mu(y)$$

$$\leq C\left\{\int_{d(x,y)\geq\varepsilon} d(x,y)^{-q}\, w(y)^{-q/p}\, d\mu(y)\right\}^{1/q}$$

$$\cdot\left\{\int_X |f(y)|^p\, w(y)\, d\mu(y)\right\}^{1/p}$$

$$\leq C\left\{\int_{d(x,y)\geq\varepsilon} d(x,y)^{-q}\, v(y)\, d\mu(y)\right\}^{1/q} .$$

$$\cdot\|f\|_{L^p(X,w\,d\mu)} < \infty \ .$$

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones Lipschitz α con soporte acotado que converge a f en la norma de $L^p(X, w\,d\mu)$. Por la sublinealidad de T^* se tiene que

$$|T^* f_n(x) - T^* f_m(x)| \le T^*(f_n - f_m)(x) ,$$

en consecuencia, como (4.22) es válida para funciones suaves, la sucesión $\{T^* f_n\}$ es de Cauchy en $L^p(X, w\,d\mu)$. Continuamos denotando con $\{f_n\}$ a una subsucesión tal que $\{T^* f_n\}$ converge puntualmente y en norma p con peso w hacia una función G. Por otra parte, acotando como en (4.23), se deduce que para cada $\varepsilon > 0$ la sucesión $\{K_\varepsilon f_n\}$ converge puntualmente a $K_\varepsilon f$. Por consiguiente, para cada $\varepsilon > 0$

$$|K_\varepsilon f(x)| = \lim_n |K_\varepsilon f_n(x)| \le \lim_n T^* f_n(x) = G(x) ,$$

lo que prueba que $T^* f(x) \le G(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int [T^* f(x)]^p w(x)\, d\mu(x) &\le \int G(x)^p w(x)\, d\mu(x) \\
&= \lim_n \int [T^* f_n(x)]^p w(x)\, d\mu(x) \\
&\le C \lim_n \int |f_n(x)|^p w(x)\, d\mu(x) \\
&= \int |f(x)|^p w(x)\, d\mu(x) .
\end{aligned}$$

C.Q.D.

En el resto del capítulo consideraremos sólo operadores maximales de integrales singulares.

Es sabido que en $\mathbb{R}^n$, el rango de los exponentes α tales que $w(x) = |x|^\alpha$ pertenece a la clase A_p, es aquél para el cual w y $w^{-1/(p-1)}$

son localmente integrables simultáneamente, o sea $-n<\alpha<n(p-1)$. Kurtz y Wheeden construyeron, en [KW], un núcleo de Calderón-Zygmund en $\mathbb{R}^n$ que satisface una condición de Dini en L^r sobre la esfera unitaria, tal que la acotación en L^p no es válida con el peso $w(x)=|x|^\alpha$ si $\alpha>p-1+(n-1)p/r'$ o $\alpha<-1-(n-1)p/r'$. Sin embargo, para algunos valores de α en estas condiciones, $|x|^\alpha$ pertenece a la clase A_p. Consideraremos la siguiente situación:

(A') (X,d,μ) es un espacio normal de orden α tal que para cada $x_o\in X$, $\mu(B(x_o,r))$ es una función continua de $r\geq 0$. K es un núcleo singular que satisface (2.1), (2.3'.a), el operador maximal T^* es de tipo débil (1.1) y además existe $r\in(1,\infty)$ tal que la serie

$$(4.24)\qquad \sum_{j=1}^{\infty}[d(x,z)2^j]^{1/r'}\{\int_{2^j d(x,z)\leq d(y,z)<2^{j+1}d(x,z)}|K(x,y)-K(z,y)|^r d\mu(y)\}^{1/r}$$

es uniformemente acotada y converge uniformemente en x,z. El número r' es el conjugado de Hölder de r.

(4.25) <u>LEMA</u>: Si T^* verifica las hipótesis de (A') y f es una función de clase Lipschitz α con soporte acotado, entonces el conjunto

$$U_\lambda=\{x\in X: T^*f(x)>\lambda\}$$

es abierto.

<u>Demostración</u>: La única diferencia con la demostración del lema (4.8) reside en la estimación del primer término en el segundo miembro de la desigualdad (4.9):

$$I=\int_{d(x,y)\geq\varepsilon}|K(x,y)-K(x_o,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y)\,.$$

El punto x_o pertenece a U_λ y $\varepsilon>0$. El punto x se elige de modo que

$d(x,x_o) < \varepsilon[2\,C(2k)^{1-\alpha}]^{-1/\alpha}$, donde C es la constante de orden α del espacio y k la de la desigualdad triangular. Sea j_o un número natural tal que $2^{j_o}\,d(x,x_o) \le \varepsilon < 2^{j_o+1}\,d(x,x_o)$ y observemos que j_o tiende a infinito cuando x tiende a x_o. Entonces

$$I \le \sum_{j=j_o}^{\infty} \int_{2^j d(x,x_o) \le d(x,y) < 2^{j+1} d(x,x_o)} |K(x,y)-K(x_o,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y)$$

$$\le C\,\|f\|_\infty \sum_{j=j_o}^{\infty} [d(x,x_o)\,2^j]^{1/r'}$$

$$\cdot\Big[\int_{2^j \le \frac{d(x,y)}{d(x,x_o)} < 2^{j+1}} |K(x,y)-K(x_o,y)|^r\,d\mu(y)\Big]^{1/r}$$

el último miembro es una cola de la serie (4.24), que puede hacerse uniformemente pequeña tomando j_o grande, para lo que es suficiente que x esté próximo a x_o. C.Q.D.

Observemos que en el lema (4.10) sólo se hace uso de las propiedades de acotación (2.1) y de cancelación (2.3'.a) del núcleo singular, por lo tanto sus resultados siguen siendo válidos en el contexto (A'). Para $1 \le s < \infty$, $M_s f$ denota el operador $[M(|f|^s)]^{1/s}$.

(4.26) <u>TEOREMA</u>: Si T^* satisface las hipótesis de (A') y w es un peso de la clase A_∞, entonces existe una constante C tal que

$$\int_X [T^* f(x)]^p\, w(x)\, d\mu(x) \le C \int_X [M_{r'} f(x)]^p\, w(x)\, d\mu(x)\ ,$$

para toda f de clase Lipschitz α con soporte acotado.

<u>Demostración</u>: La prueba sigue la misma línea que la del teorema (4.14). Se trata, en primer lugar, de establecer una desigualdad del tipo

$$(4.27)\qquad w\{x\colon T^* f(x) > 2\lambda \ \text{ y } \ M_{r'} f(x) \le \gamma\lambda\} \le C\gamma^{\delta}\, w\{x\colon T^* f(x) > \lambda\}\ ,$$

para $\lambda > 0$ y γ suficientemente pequeño. Como $M f(x) \le M_{r'} f(x)$, es válido el mismo argumento que en (4.14) para descartar el caso $U_\lambda = X$ y aplicar los lemas (4.25) y (1.23). De esta desigualdad resulta claro también que

$$(4.28)\qquad \mu\{x \in X\colon T^* f_1(x) > \lambda/2\} \le C\gamma\,\mu(B(x_i,r_i))\ ,$$

para cada índice i tal que el conjunto $\{x \in B(x_i,r_i)\colon T^* f(x) > 2\lambda$ y $M_{r'} f(x) \le \gamma\lambda\}$ es distinto del vacío, f_1 es $f\chi_{B(y_i, A r_i)}$. Si $f_2 = f - f_1$, en la estimación de $T^* f_2(x)$ para puntos x en $B(x_i,r_i)$ sólo debe acotarse de un modo diferente la integral

$$I = \int_{d(y,y_i) \ge A r_i} |K(x,y) - K(y_i,y)|\, f(y)\, d\mu(y)\ ,$$

ya que la expresión (II) en (4.19) es menor o igual que $M f(\xi_i) \le M_{r'} f(\xi_i)$ y ξ_i es un punto de $B(x_i,r_i)$ tal que $M_{r'} f(\xi_i) \le \gamma\lambda$. I puede mayorarse aplicando la desigualdad de Hölder y la acotación uniforme de (4.24):

$$\begin{aligned} I &\le \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^j d(x,y_i) \le d(y,y_i) < 2^{j+1} d(x,y_i)} |K(x,y) - K(y_i,y)|\, f(y)\, d\mu(y) \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_{2^j d(x,y_i) \le d(y,y_i) < 2^{j+1} d(x,y_i)} |K(x,y) - K(y_i,y)|^{r}\, d\mu(y) \right\}^{1/r} \\ &\qquad \cdot \left\{ \int_{B(y_i,\, 2^{j+1} d(x,y_i))} [f(y)]^{r'}\, d\mu(y) \right\}^{1/r'} \\ &\le C\, M_{r'} f(\xi_i) \end{aligned}$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{\infty} [d(x,y_i)2^j]^{1/r'} \cdot [\int_{2^j \le \frac{d(y,y_i)}{d(x,y_i)} < 2^{j+1}} |K(x,y) - K(y_i,y)|^r d\mu(y)]^{1/r}$$

$$\le C\gamma\lambda \ .$$

Por consiguiente

$$(4.29) \qquad \mu\{x \in B(x_i,r_i) : T^* f(x) > 2\lambda \ \ y \ \ M_{r'} f(x) \le \gamma\lambda\} \le C\gamma\mu(B(x_i, r_i))$$

para γ suficientemente pequeño. La condición A_∞ sobre w, (4.29) y las propiedades del cubrimiento de U_λ prueban (4.27). Calculando las integrales en términos de las funciones distribución se tiene que

$$(4.30) \qquad \int [T^* f(x)]^p w(x)\, d\mu(x) \le C\gamma^\delta \int [T^* f(x)]^p w(x)\, d\mu(x)$$

$$+ C\gamma^{-p} \int [M_{r'} f(x)]^p w(x)\, d\mu(x) \ ,$$

para todo $\gamma < \gamma_o$. Si $\int [T^*f(x)]^p w(x)\, d\mu(x) = \infty$, también es infinita la in<u>tegral</u> $\int [Mf(x)]^p w(x)\, d\mu(x)$ que es menor o igual que $\int [M_{r'} f(x)]^p w(x)\, d\mu(x)$, por lo tanto la desigualdad en (4.26) es inmediata. Si $\int [T^*f(x)]^p w(x)\, d\mu(x)$ es finita, tomando γ suficientemente chico en (4.30) se obtiene la tesis. C.Q.D.

Si $1 \le s < \infty$, $s < p < \infty$ y $w \in A_{p/s}$, por la desigualdad (4.4) aplicada con exponente p/s, es claro que

$$\int [M_s f]^p\, w\, d\mu = \int [M(|f|^s)]^{p/s} w\, d\mu \le C \int |f|^p\, w\, d\mu \ ,$$

para toda f en $L^p(X, w\, d\mu)$. Como $A_{p/s} \subset A_p$ el argumento del teorema (4.21) puede repetirse para obtener el siguiente resultado como corolario de (4.26).

(4.31) TEOREMA: Sea T^* un operador maximal en las condiciones de (A'). Si $r' < p < \infty$ y $w \in A_{p/r'}$, entonces existe una constante finita C tal que

$$\int_X [T^* f(x)]^p \, w(x)\, d\mu(x) \le C \int_X |f(x)|^p w(x)\, d\mu(x)$$

para toda $f \in L^p(X, w\, d\mu)$.

Aplicaremos este resultado a núcleos de Calderón-Zygmund en $\mathbb{R}^n$ tales que la restricción a la esfera unitaria, Ω, es acotada, tiene promedio cero y satisface una condición de Dini en norma $L^r (1<r<\infty)$ del tipo

$$(4.32) \qquad \int_0^1 \omega_r(\delta)\, \delta^{-1}\, d\delta < \infty,$$

donde

$$\omega_r(\delta) = \sup_{|h| \le \delta} \left\{ \int_\Sigma |\Omega(x'+h) - \Omega(x')|^r\, dx' \right\}^{1/r},$$

y Ω ha sido extendida a $\mathbb{R}^n$ como función homogénea de grado cero. Para Ω con estas propiedades, el operador maximal de la integral singular con núcleo $K(x) = \Omega(x)|x|^{-n}$ es de tipo débil (1,1) ya que, por la desigualdad de Hölder, $\omega_1(\delta) \le C\, \omega_r(\delta)$ y por lo tanto son aplicables los resultados de [CWZ]. Veamos que, si $\mathbb{R}^n$ tiene la estructura de espacio normal dada por la casi-distancia $d(x,y) = |x-y|^n$, (4.32) implica la acotación y convergencia uniformes de (4.24). Un término genérico de la suma en (4.24) es de la forma

$$[|z|^n 2^j]^{1/r'} \left\{ \int_{2^j |z|^n \le |y|^n < 2^{j+1} |z|^n} |K(y) - K(y-z)|^r\, dy \right\}^{1/r},$$

por la desigualdad de Minkowski está acotado por la suma de las siguientes funciones

$$I=[|z|^n 2^j]^{1/r'}\left\{\int_{2^j\le \frac{|y|^n}{|z|^n}<2^{j+1}} |\Omega(y-z)|^r \left||y|^{-n}-|y-z|^{-n}\right|^r dy\right\}^{1/r},$$

$$II=[|z|^n 2^j]^{1/r'}\left\{\int_{2^j|z|^n\le|y|^n<2^{j+1}|z|^n} |y|^{-nr}|\Omega(y)-\Omega(y-z)|^r dy\right\}^{1/r}.$$

La integral de I puede mayorarse de la manera habitual, que es lo mismo que aplicar la propiedad de orden $\alpha=1/n$ de la casi-distancia $|\cdot|^n$. El resultado es que $I\le C\,2^{-j/n}$ uniformemente en z. La integral de II escrita en coordenadas polares puede acotarse por el módulo de continuidad de Ω de la siguiente manera.

$$\left\{\int_{2^{j/n}|z|}^{2^{(j+1)/n}|z|} \rho^{n(1-r)}\int_\Sigma |\Omega(\rho y')-\Omega(\rho(y'-\rho^{-1}z))|^r dy'\,\rho^{-1}\,d\rho\right\}^{1/r}$$

$$\le\left\{\int_{2^{j/n}|z|}^{2^{(j+1)/n}|z|} \rho^{n(1-r)}\,\omega_r^r(|z|/\rho)\rho^{-1}\,d\rho\right\}^{1/r}.$$

Efectuando el cambio de variables $\rho\to t=|z|/\rho$ y usando luego el hecho de que ω es monótona no decreciente, sigue que

$$II\le[|z|^n 2^j]^{1/r'}\left\{\int_{2^{-(j+1)/n}}^{2^{-j/n}} (t/|z|)^{n(r-1)}\,\omega_r^r(t)t^{-1}\,dt\right\}^{1/r}$$

$$\le\left\{\int_{2^{-(j+1)/n}}^{2^{-j/n}} \omega_r^r(t)\,t^{-1}\,dt\right\}^{1/r}$$

$$\leq C\, \omega_r(2^{-j/n}) ,$$

uniformemente en z. La serie $\sum_{j=1}^{\infty} \omega_r(2^{-j/n})$ es sumable, pues está dominada por una constante veces la integral de (4.32). Por consiguiente (4.31) puede aplicarse para obtener la acotación en espacios L^p con pesos de la clase $A_{p/r'}$ del operador maximal asociado a K. Un núcleo de Calderón-Zygmund que satisface la condición de Dini usual en L^{∞}, esto es

$$\int_0^1 \omega_{\infty}(\delta)\, \delta^{-1}\, d\delta < \infty ,$$

donde

$$\omega_{\infty}(\delta) = \sup\{ |\Omega(x) - \Omega(y)| : |x-y| \leq \delta \} ,$$

cumple la propiedad (4.32) para todo $r \in (1,\infty)$. Es claro que la inclusión recíproca no ocurre. Esta observación sugiere la siguiente extensión del teorema (4.21) en el caso de las integrales singulares.

(4.33) COROLARIO: Sea T^* el operador maximal correspondiente a un núcleo que satisface (A') para cada r menor que infinito. Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$, entonces T^* es acotado en $L^p(X, w\,d\mu)$.

Demostración: Como $w \in A_p$, existe $\varepsilon < p-1$ tal que $w \in A_{p-\varepsilon}$. Si $r = p/\varepsilon > 1$, se tiene que $p/r' = p-\varepsilon$ y $p > r'$. Por lo tanto, el resultado sigue de (4.31) y la hipótesis sobre K. C.Q.D.

Hugo A. Aimar

Eleonor Harboure de Aguilera
Director

BIBLIOGRAFIA

[BCP] BENEDEK, A.; CALDERON, A.P. y PANZONE, R.
Convolution Operators on Banach Space Valued Functions.
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 48 (1962), 356-365.

[C] CALDERON, A.P.
Inequalities for the Maximal Function Relative to a Metric.
Studia Mathematica, T. LVII (1976), 297-306.

[CF] COIFMAN, R.R. y FEFFERMAN, C.
Weighted Norm Inequalities for Maximal Functions and Singular Integrals.
Studia Mathematica, T. LI (1974), 241-250.

[Co] COTLAR, M.
A Combinatorial Inequality and its Applications to L^2 - Spaces.
Revista Matemática Cuyana, V. 1 (1955), 41-55.

[CW] COIFMAN, R.R. y WEISS, G.
Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogenes.
Lecture Notes in Mathematics Nº 242, Springer-Verlag, Berlín (1971).

[CWZ] CALDERON, A.P.; WEISS, M. y ZYGMUND, A.
On the Existence of Singular Integrals.
Proceedings of Symposia in Pure Math. A.M.S. V. X (1967), 56-73.

[D] DAVID, G.
L'integrale de Cauchy sur les courbes rectifiables.
A aparecer.

[G] De GUZMAN, M.
Real Variable Methods in Fourier Analysis.
Notas de Matemática (75).
North-Holland Mathematics Studies Nº 46. North-Holland, Amsterdam (1981).

[GGW] GATTO, A.E.; GUTTIERREZ, C.E. y WHEEDEN, R.L.
On Weighted Fraccional Integrals.
A aparecer.

[KW] KURTZ, D.S. y WHEEDEN, R.L.
A Note on Singular Integrals with Weights.
A aparecer.

[MS1] MACIAS, R.A. y SEGOVIA, C.
Lipschitz Functions on Spaces of Homogeneous Type.
Advances in Mathematics, V.33 (1979), 257-270.

[MS2] MACIAS, R.A. y SEGOVIA, C.
A Decomposition into Atoms of Distributions on Spaces of Homogeneous Type.
Advances in Mathematics, V. 33 (1979), 271-309.

[MS3] MACIAS, R.A. y SEGOVIA, C.
Singular Integrals on Generalized Lipschitz and Hardy Spaces.
Studia Mathematica, T. LXV (1979), 55-75.

[MS4] MACIAS, R.A. y SEGOVIA, C.
A Well-behaved Quasi-distance for Spaces of Homogeneous Type.
Trabajos de Matemática Nº 32. Instituto Argentino de Matemática.
CONICET (1981).

[R] RIVIERE, N.M.
Singular Integrals and Multiplier Operators.
Arkiv för Matematik, V. 9 (1973), 243-278.

[S] STEIN, E.M.
Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.
Princeton University Press. Princeton (1970).

[Z] ZO, F.J.
Pointwise Convergence for Integrable Kernels.
Tesis Universidad de Minnesota (1975).

Hugo A. Aimar

Eleonor Harboure de Aguilera
Director