Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2010

Aplicaciones del área

Seguimos a Euclides en *Los Elementos* (Heath [1], Joyce [2]) para demostrar los teoremas fundamentales de Pitágoras y Tales. Estas demostraciones ilustran una técnica de demostraciones que emplea el área.

✎ Los ejercicios 1.4 y 2.3 están tomados del libro de Vasíliev y Gutenmájer [4].

1. Teorema de Pitágoras

1.1. Teorema (de Pitágoras). *Si el triángulo ABC es rectángulo en A, entonces*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

✎ Acá seguimos la demostración en Euclides I.47. En los ejercicios vemos la «versión china» también usando áreas, y más adelante veremos otra usando semejanzas (como la de Pogorélov). Hay cientos de demostraciones de este teorema fundamental.

❦ Construimos externamente los cuadrados sobre los lados, ABB_1A_1, ACC_1A_1 y BCC_2B_2. También trazamos los segmentos B_1C y AB_2, AP (la altura en A), y PQ (continuación de AP de modo que $Q \in B_2C_2$), como se indica en la figura 1.

Como $\angle BAC = \angle BAA_1 = 90°$, los puntos C, A, A_1 están alineados. Además $BB_1 \parallel AA_1$ de modo que

$$\text{área}(CBB_1) = \text{área}(ABB_1) = \text{área}(ABB_1A_1)/2.$$

También por ser AP altura es $\angle APB = 90°$ de modo que $\angle QPB = 90°$ y $BB_2 \parallel PQ$, y por lo tanto

$$\text{área}(ABB_2) = \text{área}(PBB_2) = \text{área}(PBB_2Q)/2.$$

Pero los triángulos CBB_1 y B_2BA son iguales pues $CB = B_2B$ (siendo lados del cuadrado BB_2C_2C), $BB_1 = BA$ (siendo lados del cuadrado ABB_1A_1), y

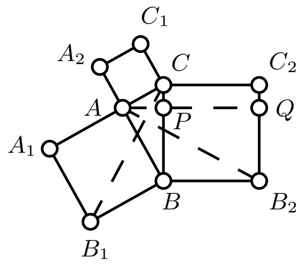

Figura 1: Pitágoras según Euclides

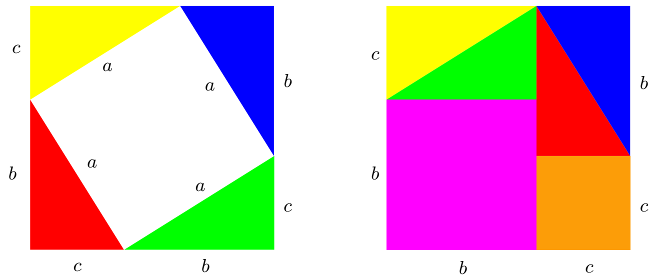

Figura 2: versión china del teorema de Pitágoras

$\angle CBB_1 = \angle B_2BA$ (pues ambos son $90° + \angle ABC$), o de otra forma, uno se obtiene a partir del otro rotando $90°$ alrededor de B. Siendo los triángulos iguales, sus áreas también lo son y entonces

$$AB^2 = \text{área}(ABB_1A_1) = \text{área}(PBB_2Q).$$

De modo similar, $AC^2 = \text{área}(ACC_1A_2) = \text{área}(PCC_2Q)$. Finalmente,

$$BC^2 = \text{área}(BCC_2B_2) = \text{área}(PBB_2Q) + \text{área}(PCC_2Q) = AB^2 + AC^2.$$

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Si un triángulo ABC es tal que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, entonces el triángulo es rectángulo en A. *Sugerencia*: construir un triángulo rectángulo y usar LLL.

✎ Esto es Euclides I.48, el recíproco del teorema de Pitágoras.

Ejercicio 1.2 (versión china del teorema de Pitágoras). Teniendo en cuenta los dos gráficos en la figura 2, en donde se subdivide al mismo cuadrado de lado $b + c$ en dos formas distintas, demostrar el teorema de Pitágoras.

✎ En particular hay que ver que el área en blanco a la izquierda es un cuadrado, así como las áreas en «lila» y «marrón» a la derecha.

✎ Se llama «Pitágoras chino» porque aparece en el tratado chino «Chou Pei Suan Ching», que posiblemente sea anterior a Pitágoras. La imagen de la figura 3 está tomada de `http://www.ualr.edu/lasmoller/pythag.html`, en donde aparecen muchos comentarios interesantes sobre el teorema.

Ejercicio 1.3. La diagonal de un cuadrado de lado ℓ mide $\sqrt{2}\,\ell$, y la altura de un triángulo equilátero de lado ℓ mide $\sqrt{3}\,\ell/2$.

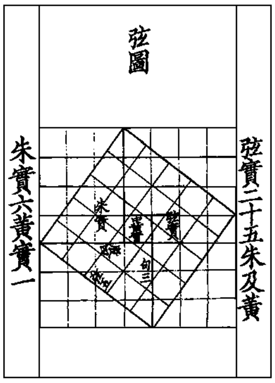

Figura 3: Pitágoras chino

Ejercicio 1.4. Si $ABCD$ es un rectángulo (A y C opuestos), entonces para todo punto P del plano,

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2.$$

2. Teorema de Tales

2.1. Lema. *Sean a, b, c y d números positivos. Entonces si*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \tag{1}$$

debe ser

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}. \tag{2}$$

Recíprocamente, si vale (2) entonces vale (1).

Por otro lado, si

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d},$$

entonces

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

✎ La primera parte es Euclides V.19.

✎ Con la segunda parte se puede ver que entre dos números racionales siempre hay otro racional (otra forma es, e.g., tomar el promedio de los números).

❦ Ejercicio 2.1.

2.2. Corolario. *Si a, b, c y d son números reales con b y d no nulos y $b \neq d$ entonces*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}.$$

❦ Ejercicio 2.2

2.3. Teorema (de Tales). *Supongamos dado el triángulo ABC y puntos D y E tales que*

i) D está en la semirrecta AB y E en la semirrecta CD, o bien

ii) D está en la semirrecta opuesta a AB y E en la semirrecta opuesta a CD.
Entonces:

a) Si la recta DE es paralela a la recta BC, vale la relación

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}. \tag{3}$$

b) Recíprocamente, si vale la relación (3)*, entonces* $BC \parallel DE$.

✎ La demostración que damos es Euclides VI.2 (que usa área).

✎ Comparar con la demostración del teorema 12.1 en Pogorélov [3].

✎ Recordar que el teorema 1.13 del apunte de *cuadriláteros* (teorema 9.8 en Pogorélov [3]) permite obtener el resultado cuando AB y AD son *conmensurables*, i.e., cuando AB/AD es racional.

✎ Hay muchos resultados que se atribuyen a Tales de Mileto. En otros países (por ejemplo Brasil) se denomina «teorema de Tales» al resultado sobre la relación entre el ángulo inscripto y el central, que veremos al estudiar circunferencias. En cualquier caso, son los resultados matemáticos más antiguos de nuestra civilización que recibieron el nombre de «teoremas». Tales incluso propuso algunos axiomas para fundamentar la geometría, abriendo el camino para Euclides. Así, muchas veces se dice que Tales fue el «primer matemático».

❦ Suponemos que D está en la semirrecta AB y E en la semirrecta AC, pues en otro caso tomamos el triángulo simétrico del ADE respecto de A (que resulta igual al original).

También observamos que las expresiones

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} \quad \text{y} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

son equivalentes.

Comparando las áreas de los triángulos ABC y BDC, tomando como bases AB y BD, la altura común es la correspondiente a C, y tenemos

$$\frac{\text{área}(ABC)}{\text{área}(BDC)} = \frac{AB}{BD}.$$

De modo similar, tomando ahora como bases a AC y CE,

$$\frac{\text{área}(ABC)}{\text{área}(CBE)} = \frac{AC}{CE}.$$

Pero los triángulos BDC y CBE tienen igual área, pues DE es paralela a BC, entonces la misma altura respecto de la base común BC.

Para el recíproco, usamos lo que acabamos de demostrar, construyendo una paralela a BC por D, que debe cortar a la semirrecta AC en E'. Por la primera parte, $AB/BC = AC/CE'$ pero como $AB/BC = AC/CE$ debe ser $CE' = CE$. Por 2.1, debe ser también $AE' = AE$ y como están en la misma semirrecta, $E = E'$.

2.4. Corolario. *Si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos correspondientes son proporcionales. Es decir si las paralelas son cortadas en* A, B, C *por la primer transversal y* A', B', C' *por la segunda, entonces* $AB/BC = A'B'/B'C'$.

✎ Este resultado también se conoce como teorema de Tales (la versión que cantan *Les Luthiers*).

❦ Si las transversales son paralelas, se determinan paralelogramos $ABB'A'$ y $BCC'B'$ con lados opuestos iguales, i.e., $AB = A'B'$ y $BC = B'C'$. Si no son paralelas, podemos trazar una paralela a la segunda transversal por A (suponiendo que las otras dos paralelas estén en un mismo semiplano respecto de la primera, que pasa por A), quedando determinados los puntos B'' y C'' al cortar las otras dos paralelas de modo que $AB'' = A'B'$ y $BC'' = B'C'$, y se aplica 2.3.

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.1. Demostrar el lema 2.1.

Ejercicio 2.2. Demostrar el corolario 2.2.

Ejercicio 2.3. Supongamos que la *cruz de bisectrices* (proposición 2.4 y definición 2.5 del apunte de *construcciones*) de $\angle ACB$ está formada por las rectas ℓ y ℓ', donde ℓ contiene a la bisectriz de $\angle ACB$.

Comparando las áreas de los triángulos ACM y MCB donde M es cualquiera de E o F, demostrar:

a) Si E es la intersección de ℓ con la recta AB, entonces

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CB} \tag{4}$$

b) Si $\ell' \nparallel AB$ y F es la intersección de ℓ' con la recta AB, entonces

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{CB},$$

mientras que si $\ell' \parallel AB$ entonces $AB/CB = 1$.

Ejercicio 2.4. La igualdad (4) es Euclides VI.3, donde se considera E en el segmento AB y se construye D en la recta AC con $DB \parallel CE$.

a) Ver que si CE es la bisectriz de $\angle ACB$ entonces el triángulo BCD es isósceles (con $BC = CD$) de donde se deduce (4).

b) Recíprocamente, ver que si vale (4) entonces la semirrecta CE es bisectriz de $\angle ACB$.

✎ Ver también el teorema 12.5 en Pogorélov [3].

3. Bibliografía

[1] T. L. Heath. *The thirteen books of Euclid's Elements*. Dover Publications, 1956.

[2] D. E. Joyce. *Euclid's Elements*. Clark University, 1996. URL `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`. Ver también `http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm`.

[3] A. V. Pogorélov. *Geometría elemental*. MIR, Moscú, 1974.

[4] N. B. Vasíliev y V. L. Gutenmájer. *Rectas y curvas*. MIR, Moscú, 1980.