

Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2010


Área de figuras planas

1. Introducción	1
2. Área de figuras simples	2
2.1. Ejercicios	6
3. Bibliografía	7

1. Introducción

Hasta ahora hemos considerado las figuras como «alambres» (los lados) que se juntan en «nudos» (los vértices), sin tener mucho en cuenta si estaban «llenas» o no. En general no tenemos distintos nombres para la figura «llena» o «vacía», siendo una excepción el caso de «círculo» y «circunferencia».

Al hablar de «área» de una figura, presuponemos que la consideramos «llena» y medimos —de alguna forma— la cantidad de puntos en el «interior». Aunque la noción de «interior» parece clara para figuras como el triángulo, en general no es sencilla. Por ejemplo, ¿cuál es el «interior» de una figura como \square ? Sin embargo, esto no será demasiado obstáculo para determinar el área de las figuras que consideraremos: «área de un triángulo» se refiere a medir la figura «llena».

 Como en otros casos trataremos de no ser latosos: «área de una figura» se interpreta como «medida del área de la figura» cuando corresponde.

Mucho más formidable es que no podemos definir satisfactoriamente el área de modo de cumplir con las hipótesis planteadas más abajo (en 2.3) y medir cualquier conjunto.

Para una y dos dimensiones (la recta y el plano), S. Banach demostró que el problema tiene soluciones pero no únicas. Para tres dimensiones (el espacio), F. Hausdorff demostró en 1914 que el problema no tiene solución. En tres dimensiones tenemos también la célebre «paradoja de Banach y Tarski», quienes en 1924 —avanzando sobre las ideas de Hausdorff— demostraron que es posible dividir a la esfera tridimensional de radio 1 en un número finito de partes (disjuntas) de modo tal que —usando sólo movimientos rígidos en tres dimensiones— estas partes se pueden reagrupar formando dos esferas de radio 1. Estos resultados —a su vez— dependen de los axiomas más básicos que fundamentan las matemáticas.

† Concretamente, si se incluye el llamado «axioma de elección» o no.

Estos temas se ven en cursos mucho más avanzados (de nivel de posgrado). Acá nos contentaremos con dar una idea del tema, trabajando con las figuras planares sencillas que más conocemos como cuadriláteros, triángulos o círculos.

Tomamos como base el libro de Pogorélov [4], pero con algunos cambios tratando de precisar sobre si las figuras están «llenas» o no, y «axiomatizando» el área. Como en ese libro, será esencial la completitud de los números reales.

✎ En *Los Elementos* de Euclides [1, 3] no hay una definición formal de área, y no se usa la propiedad de completitud de los reales.

Tampoco se considera el área de un círculo salvo en [Euclides XII.35](#) donde se establece que las áreas de dos círculos son proporcionales a los cuadrados de sus diámetros.

✎ Hilbert [2] distingue entre *área* y *contenido* de figuras para tener en cuenta caso que llamaríamos «patológicos». Nosotros no haremos ese estudio acá.

2. Área de figuras simples

2.1. Definición. El *interior de un triángulo* es la intersección de los semiespacios definidos por las rectas que contienen a cada lado y el vértice opuesto, y de modo similar se define el *interior de un cuadrilátero convexo* como la intersección de los semiplanos correspondientes.

En cualquiera de estos casos, el *borde* de la figura son los vértices y los lados, y la figura es *completa* cuando incluimos el interior y el borde.

2.2. Definición. Una figura es *simple* si es la unión disjunta de un número finito de puntos, segmentos e interiores de triángulos.

✎ Observar las diferencias con la definición en Pogorélov [4, pág. 120].

✎ El círculo no es una figura simple según esta definición, ni tampoco lo son una recta o un semiplano.

2.3. Hipótesis (o axiomas) sobre el área de figuras. Supondremos que hay una familia de figuras del plano, que llamaremos *medibles*, y una función *área* tales que se satisfacen las siguientes propiedades:

A-1. Si F es una figura medible, $\text{área}(F)$ está definida y es un número real no negativo.

A-2. Si F_1 y F_2 son iguales y F_1 es medible, entonces F_2 es medible y $\text{área}(F_1) = \text{área}(F_2)$.

✎ Recordar que, por definición, dos figuras son iguales si una se transforma en otra mediante un movimiento rígido, no confundir con la igualdad entre conjuntos, definida como $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ y $B \subset A$.

A-3. Si dos figuras F_1 y F_2 son medibles, entonces

i) $F_1 \cup F_2$ y $F_1 \setminus F_2$ son medibles.

ii) Si $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ entonces $\text{área}(F_1 \cup F_2) = \text{área}(F_1) + \text{área}(F_2)$.

A-4. Toda figura simple es medible.

A-5. El área de un cuadrado completo de lado 1 (unidad de longitud) es 1 (unidad de área).

- ✎ Observar que la unidad de área está ligada a la unidad de longitud. Así, si nuestra unidad de longitud es el centímetro, la unidad de área es el «centímetro cuadrado»: un cuadrado con lados de 1 cm tiene área de 1 cm².
- ✎ Como los cuadrados de lado 1 son iguales, en el sentido que se puede transformar uno en otro mediante un movimiento rígido, el área de cualquier cuadrado unitario es 1, por A-2.
- ✎ Los cuadrados servirán como «bloques» con los cuales mediremos el área de otras figuras.

2.4. Lema. *El área satisface las propiedades de monotonía y subaditividad: si F_1 y F_2 son medibles,*

- i) si $F_1 \subset F_2$, entonces $\text{área}(F_1) \leq \text{área}(F_2)$ (monotonía),
- ii) $\text{área}(F_1 \cup F_2) \leq \text{área}(F_1) + \text{área}(F_2)$ (subaditividad).

- ☛ Si $F_1 \subset F_2$, $F_3 = F_2 \setminus F_1$ es medible por A-3 y $\text{área}(F_3) \geq 0$ por A-1. De $F_1 \cap F_3 = \emptyset$ y $F_1 \cup F_3 = F_2$, usando A-1 tenemos $\text{área}(F_2) = \text{área}(F_1) + \text{área}(F_3) \geq \text{área}(F_1)$. Por otro lado, $F_1 \cup F_2 = F_1 \cup (F_2 \setminus F_1)$, de modo que $\text{área}(F_1 \cup F_2) = \text{área}(F_1) + \text{área}(F_2 \setminus F_1) \leq \text{área}(F_1) + \text{área}(F_2)$ (usando A-3 y el inciso anterior).

2.5. Corolario. *Si F_1, F_2, \dots, F_n son n figuras medibles, entonces*

$$\text{área}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n) \leq \text{área}(F_1) + \text{área}(F_2) + \dots + \text{área}(F_n).$$

- ☛ Usamos 2.4 sucesivamente:

$$\begin{aligned} \text{área}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n) &= \text{área}((F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{n-1}) \cup F_n) \leq \\ &\leq \text{área}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{n-1}) + \text{área}(F_n) \leq \\ &\leq \text{área}((F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{n-2}) \cup F_{n-1}) + \text{área}(F_n) \leq \\ &\leq \dots \leq \text{área}(F_1) + \text{área}(F_2) + \dots + \text{área}(F_n). \end{aligned}$$

2.6. Lema. *Si F_1, F_2, \dots, F_n son n figuras medibles, tales que para $i = 1, \dots, n$:*

- i) $F_i = G_i \cup H_i$, donde G_i y H_i son medibles con $\text{área}(H_i) = 0$.
- ii) $G_i \cap G_j = \emptyset$ para $j \neq i$.

Entonces

$$\text{área}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n) = \text{área}(F_1) + \text{área}(F_2) + \dots + \text{área}(F_n).$$

- ☛ Si $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$ y $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$, entonces por 2.5, A-3 y 2.4,

$$\begin{aligned} \text{área}(F) &\leq \text{área}(F_1) + \text{área}(F_2) + \dots + \text{área}(F_n) = \\ &= \text{área}(G_1 \cup H_1) + \text{área}(G_2 \cup H_2) + \dots + \text{área}(G_n \cup H_n) \leq \\ &\leq \text{área}(G_1) + \text{área}(H_1) + \text{área}(G_2) + \text{área}(H_2) + \dots \\ &\quad \dots + \text{área}(G_n) + \text{área}(H_n) = \\ &= \text{área}(G_1) + \text{área}(G_2) + \dots + \text{área}(G_n) = \text{área}(G) \leq \text{área}(F). \end{aligned}$$

y debe valer la igualdad en todos los casos.

2.7. Lema. *El área de un segmento es 0. En consecuencia, también todo punto tiene área 0 (por 2.4).*

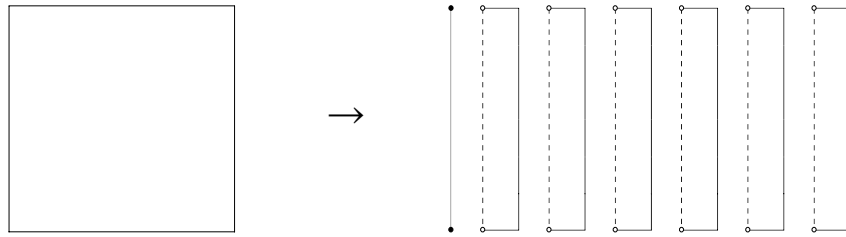


Figura 1: Dividiendo el cuadrado «completo» en un segmento y varios rectángulos

☛ Para $n \in \mathbb{N}$ dividimos el cuadrado completo de lado 1 en un segmento cerrado (incluyendo los extremos) de longitud 1 y n rectángulos completos de lados 1 y $1/n$, a los que se les ha quitado un segmento cerrado de longitud 1 del borde, como se indica en la figura 1, donde a la derecha hemos separado las partes dentro del cuadrado.

Los n rectángulos iguales son disjuntos y están contenidos en el cuadrado completo de lado 1. Si r es el área de cada uno de ellos (usando A-2), la unión tiene medida $n \times r$ (por A-3) y debe ser $n \times r \leq 1$ (por la monotonía de 2.4), i.e., $r \leq 1/n$. A su vez, mediante una traslación podemos poner al segmento de longitud 1 en uno de los rectángulos, de modo que si el área del segmento es a , debe ser $a \leq r \leq 1/n$ (otra vez por la monotonía). Como esto sucede para todo n , y $a \geq 0$, debe ser $a = 0$ (lema 2.4 del apunte de números reales).

De modo que el segmento cerrado de longitud 1 tiene área 0. Pero todo otro segmento puede incluirse dentro de la unión de un número finito de segmentos de longitud 1 (por la arquimedaneidad de los reales, propiedad 2.3 en el apunte de números reales), y por 2.5 el área de cualquier segmento es 0.

2.8. Corolario. Si una figura simple es unión de triángulos con interiores disjuntos, el área de la figura es la suma de las áreas de esos triángulos.

☛ Usamos 2.6 y 2.7.

De ahora en más, nos referiremos al área de un triángulo o cuadrilátero convexo como el área común del interior de la figura o de la figura completa, omitiendo «interior» o «completo»: el *área de un cuadrado* será el área del cuadrado completo, y también el área de su interior, o cualquier otra variante.

2.9. Teorema. Si un rectángulo R tiene lados de longitudes a y b , entonces $\text{área}(R) = a \times b$.

☛ Observamos que siendo el rectángulo una figura simple, su área debe estar definida. Consideramos distintos casos.

i) El rectángulo es un cuadrado de lados $1/n$, donde $n \in \mathbb{N}$. Como uniendo n^2 de ellos formamos un cuadrado de lado 1, cada uno tendrá área de $1/n^2$ (ignoramos que hay lados que se «solapan» pues tienen área nula y usamos 2.6).

- ii) Los lados del rectángulo son racionales, digamos $a = m/n$, $b = m'/n$, con $m, m', n \in \mathbb{N}$, habiendo elegido un denominador común. Como podemos formar el rectángulo con $m \times m'$ cuadrados de lado $1/n$, el área será $mm' \times (1/n^2) = a \times b$.
- iii) Los lados del rectángulo son números reales arbitrarios. Sean

$$A = \{\text{área}(R') : R' \text{ es rectángulo de lados racionales y } R' \subset R\},$$

$$B = \{\text{área}(R'') : R'' \text{ es rectángulo de lados racionales y } R'' \supset R\}.$$

De $R' \subset R \subset R''$ resultará

$$x \leq \text{área}(R) \leq y \quad \text{para todo } x \in A, y \in B.$$

Si fijamos $q \in \mathbb{N}$ arbitrariamente, y ponemos $a = p/q + r$, $b = p'/q + r'$, donde $0 \leq r, r' < 1/q$, podemos encontrar rectángulos R' de lados p/q y p'/q , y R'' de lados $(p+1)/q$ y $(p'+1)/q$, de modo que $R' \subset R \subset R''$, quedando

$$p/q \leq a < (p+1)/q \quad \text{y} \quad p'/q \leq b < (p'+1)/q.$$

- ☞ Ver el [lema 2.5](#) y la [proposición 2.6](#) en el apunte de *números reales*.

De aquí que $\text{área}(R') \leq ab < \text{área}(R'')$, i.e.

$$x \leq a \times b \leq y \quad \text{para todo } x \in A, y \in B.$$

Pero

$$\begin{aligned} 0 < \text{área}(R'') - \text{área}(R') &= \frac{(p+1)(p'+1)}{q^2} - \frac{pp'}{q^2} = \\ &= \frac{p+p'+1}{q^2} = \frac{p/q + p'/q + 1/q}{q} < \frac{a+b+1}{q}, \end{aligned}$$

y el miembro derecho puede hacerse tan pequeño como se quiera tomando $q \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Por el [ejercicio 2.1](#), debe ser $\text{área}(R) = ab$ pues hay un único número m tal que $x \leq m \leq y$ para todo $x \in A$ y $y \in B$.

2.10. Teorema. Si dos paralelogramos tienen un lado común, y los lados opuestos están sobre una misma recta, entonces sus áreas coinciden.

- ☞ Esto es [Euclides I.35](#) (y también [I.36](#)).
- ☛ Bastará comparar cada paralelogramo con un rectángulo con el mismo lado en común y el lado opuesto sobre la misma recta. Si un paralelogramo es $ABCD$ y el rectángulo es $ABC'D'$, hay dos casos posibles según CD y $C'D'$ se intersequen o no (ver [figura 2](#)).
- ☞ La demostración en Pogorélov [[4](#), pág. 122] sólo cubre el primer caso, mientras que [Euclides](#) cubre el segundo, que es más complejo.

Guiándonos por la figura, en cualquier caso los triángulos ADD' y BCC' son iguales ($AD' = BC'$, $\angle DAD' = \angle CBC'$ porque sus lados son paralelos, y $\angle D' = \angle C' = 90^\circ$).

En el primer caso el cuadrilátero $ABC'D$ es común, y

$$\begin{aligned} AB \times AD' &= \text{área}(ABC'D') = \text{área}(ADD') + \text{área}(ABC'D) = \\ &= \text{área}(BCC') + \text{área}(ABC'D) = \text{área}(ABCD). \end{aligned}$$

En el segundo caso, los segmentos AD y BC' se cortan en P , y el triángulo ABP es común al rectángulo y al paralelogramo, mientras que ninguno

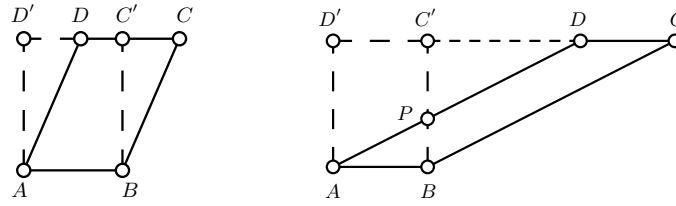


Figura 2: Posibles posiciones del paralelogramo en el teorema 2.10.

contiene al triángulo PDC' que sí es común a los triángulos ADD' y BCC' .
Tenemos

$$\begin{aligned} AB \times AD' &= \text{área}(ABC'D') = \text{área}(ADD') - \text{área}(PDC') + \text{área}(ABP) = \\ &= \text{área}(BCC') - \text{área}(PDC') + \text{área}(ABP) = \text{área}(ABCD). \end{aligned}$$

2.11. Definición. Dado un paralelogramo $ABCD$, llamamos *altura* correspondiente al lado AB a la distancia entre las rectas AB y CD .

2.12. Corolario. *El área de un paralelogramo es el producto de un lado por la altura correspondiente.*

☞ Se compara el paralelogramo con un rectángulo con el lado en común e igual altura correspondiente.

2.13. Corolario. *Si un triángulo $T = ABC$ tiene $AC = b$ y la altura correspondiente de longitud h , entonces $\text{área}(T) = (b \times h)/2$.*

☞ Uno de los ángulos $\angle A$ o $\angle C$ es agudo. Si es $\angle A$, tomando el simétrico C' de C respecto del punto medio del lado AB , construimos un paralelogramo $ACBC'$ de altura h correspondiente al lado AC , y luego usamos que los triángulos ABC y BAC' son iguales.

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.1. Si A y B son subconjuntos no vacíos de números reales tales que

- i) $a \leq b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$,
- ii) para todo $x > 0$ existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $b - a < x$,

entonces existe un único $z \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq z \leq b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$.
Sugerencia: usar la propiedad de completitud de los reales ([propiedad 2.1](#) en el apunte de *números reales*).

Ejercicio 2.2.

- a) Dado un triángulo ABC y un ángulo α , construir un paralelogramo $PQRS$ con $\text{área}(ABC) = \text{área}(PQRS)$ y $\angle PQR = \alpha$.

☞ Esto es [Euclides I.42](#).

- b) Dada un cuadrilátero convexo F y un ángulo α , construir un paralelogramo $PQRS$ con $\text{área}(F) = \text{área}(PQRS)$ y $\angle PQR = \alpha$.

☞ Esto es [Euclides I.45](#).

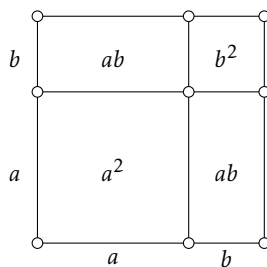


Figura 3: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Ejercicio 2.3. Recordando el [ejercicio 1.4](#) del apunte de *cuadriláteros*, el paralelogramo formado por los puntos medios de un cuadrilátero convexo tiene área que es la mitad del cuadrilátero original.

- ✦ Si un cuadrilátero no es convexo, puede ser *reentrante* cuando los lados no se cortan y hay un vértice en el interior del triángulo formado por los otros tres; o *cruzado* cuando dos lados se opuestos se cortan. Si el cuadrilátero $ABCD$ es reentrante en D (interior al triángulo ABC), podemos definir

$$\text{área}(ABCD) = \text{área}(ABC) - \text{área}(CDA).$$

En cambio si el cuadrilátero es cruzado y los lados AB y CD se cortan en Q , definimos

$$\text{área}(ABCD) = \text{área}(AQD) + \text{área}(BQC).$$

Con estas definiciones de «área», el ejercicio sigue siendo cierto aún para cuadriláteros no convexos.

Ejercicio 2.4. Un *polígono* es la figura formada por un número finito de puntos del plano, los *vértices* del polígono, A_1, A_2, \dots, A_n tales que no hay tres sobre una misma recta, y los segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ que se llaman *lados* del polígono.

Un polígono es *convexo* si para cada lado, la recta que lo contiene deja en un mismo semiplano a los vértices que no son extremos de ese lado.

- a) Demostrar que en un polígono convexo con $n \geq 4$ vértices, la recta A_1A_3 separa A_2 de A_4, A_5, \dots, A_n .

🔗 Esto lo vimos para un cuadrilátero convexo ($n = 4$) en la demostración del [teorema 1.2](#) del apunte de *cuadriláteros*. (teorema 9.1 en Pogorélov [4]).

- b) Demostrar que un polígono convexo es una figura *simple*, es decir, que se puede escribir como unión de triángulos de interiores disjuntos.

Ejercicio 2.5. Demostrar que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ usando la [figura 3](#).

3. Bibliografía

- [1] T. L. HEATH. *The thirteen books of Euclid's Elements*. Dover Publications, 1956.
- [2] D. HILBERT. *The Foundations of Geometry*. The Open Court Publishing Co, 1950. Ver <http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf>.

- [3] D. E. JOYCE. *Euclid's Elements*. Clark University, 1996. URL <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>. Ver también http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm.
- [4] A. V. POGORÉLOV. *Geometría elemental*. MIR, Moscú, 1974.