

# Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2010

## *Axiomas de la geometría plana*

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. La evolución de la geometría y sus axiomas . . . . .	1
1.2. La geometría y la enseñanza . . . . .	4
1.3. Lo que haremos . . . . .	6
<b>2. Incidencia y separación (Axiomas I y II)</b>	<b>7</b>
2.1. Ejercicios . . . . .	10
<b>3. Medidas de segmentos y ángulos (Axiomas III y IV)</b>	<b>11</b>
3.1. Ejercicios . . . . .	14
<b>4. Triángulos (Axioma V)</b>	<b>14</b>
4.1. Ejercicios . . . . .	19
<b>5. Rectas paralelas (Axioma VI)</b>	<b>20</b>
5.1. Ejercicios . . . . .	21

---

## 1. Introducción

### 1.1. La evolución de la geometría y sus axiomas

Si preguntamos a una persona común qué es la matemática, muy posiblemente diga algo como «es una disciplina que trata de números», y alguna más versada balbuceará algo sobre las diferencias entre matemáticas «aplicadas» y «puras».

Ambas respuestas son valederas, y la historia de las matemáticas las reflejan.

Empezando por el deseo o necesidad de cuantificar, aparecieron los números (una vaca por tres ovejas), y al tiempo empezaron a medirse distancias y áreas (cuántos días de viaje), conduciendo a la geometría.<sup>1</sup>

De a poco, se fueron puliendo estas nociones, haciendo abstracciones sucesivas, tanto en los números (el «tres» es el mismo en «tres vacas» que en «tres días»), como en las formas (algo derecho es más fácil de medir que algo torcido), y luego pasamos de derecho a «recta», de mesa a «rectángulo».

La inquietud humana llevó a observaciones, como «si los lados de un triángulo miden 3, 4 y 5 entonces tiene un ángulo recto», e inmediatamente a las

<sup>1</sup> ¿Es necesario que ponga la etimología?

preguntas: ¿es siempre así?, ¿para qué valores de los lados se forma un ángulo recto?, y el ángulo recto es el opuesto al lado que mide 5, ¿siempre el ángulo mayor se opone al lado mayor?, ¿y cuánto suman las medidas de los ángulos?, y...

Una cosa lleva a la otra, y nos damos cuenta de que para poder deducir propiedades, debemos partir de supuestos que suponemos verdaderos, debemos saber qué es lo que suponemos conocido, en qué nos apoyamos para hacer determinadas afirmaciones. Rastreando hacia atrás, llegamos a una serie de afirmaciones que tenemos que suponer válidas. Estas afirmaciones se llaman *axiomas* o *postulados* de la teoría.

Euclides de Alejandría, unos 300 años a.C., propuso un tratamiento de la matemática conocida en ese entonces, basándose en definiciones, postulados y *nociones comunes* a partir de los cuales se deducen los resultados. En sus *Elementos* [4, 6], Euclides no sólo considera lo que hoy llamaríamos geometría, sino también lo que hoy llamaríamos *teoría de números*: problemas de divisibilidad y primalidad. En efecto, los griegos equiparaban las nociones de segmento y número (positivo).

Euclides presenta cinco postulados (o axiomas):

- I. *Dados dos puntos distintos se puede trazar una recta por ellos.*
- II. *Una (fragmento de) línea recta se puede extender indefinidamente.*
- III. *Dados dos puntos, se puede trazar una circunferencia con centro en uno y que contenga al otro.*
- IV. *Todos los ángulos rectos son iguales.*
- V. *Si una recta corta a otras dos formando ángulos correspondientes internos que sumen menos de dos ángulos rectos, estas dos rectas (extendidas indefinidamente) se cortan en un punto que está del mismo lado donde los ángulos correspondientes suman menos de dos rectos.*

El quinto postulado se conoce como *de las paralelas*, ya que tiene la formulación equivalente, a veces llamada *de Playfair* (1748–1819), pero ya formulada por Proclo «el sucesor» (412–485):

*Dados una recta y un punto no en ella, se puede trazar una única paralela a la recta que pasa por el punto.*

Un sistema axiomático debe presentar propiedades de *consistencia* (las propiedades no se contradicen entre sí), e *independencia* (unas propiedades no se deducen de otras).

✦ También queremos que sea *completo*: no queremos usar cosas fuera del sistema en las demostraciones.

Los matemáticos realizaron esfuerzos durante siglos tratando de demostrar que el postulado de las paralelas se deduce de los otros postulados y nociones comunes. El mismo Euclides posterga el uso de este axioma lo más posible (hasta la proposición I.29), aún cuando ciertas demostraciones anteriores se podrían simplificar con su uso.

Finalmente, N. Lobachevsky en 1829 y J. Bolyai en 1832, publicaron independientemente geometrías en el que este quinto postulado se reemplaza por

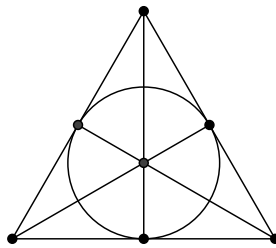


Figura 1: El plano de Fano, la geometría proyectiva plana con menor número de puntos y rectas.

otro,<sup>2</sup> demostrando así la independencia del postulado de las paralelas respecto de los otros axiomas en Euclides.

Otro tipo de geometría, la *proyectiva*, en la que no existen los conceptos de paralelismo o de medida (ni de segmentos ni de ángulos) fue desarrollándose desde Pappus de Alejandría<sup>3</sup> hacia el año 340, impulsada por el interés en el estudio de la perspectiva. Las contribuciones de Desargues (1591–1661) le dieron un gran impulso, y fue creciendo como teoría hasta establecerse como área independiente de la matemática en el siglo XIX.

Si bien no influenció directamente sobre la axiomática, un avance profundo en la geometría lo produjo Descartes (1596–1650) en *La géométrie* [3], la tercera parte de su *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, publicado en 1637. La introducción de coordenadas permitió la reducción de los problemas de geometría al estudio de ecuaciones y facilitó el establecimiento del análisis matemático. Aunque menor, su contribución al tratamiento de semejanzas también fue importante, permitiendo simplificar demostraciones de Euclides (con las técnicas de Euclides).

Estas nuevas geometrías, la «algebraización» de Descartes, y el avance del análisis matemático, llevaron a F. Klein (1849–1925) a redactar en 1872 el *Programa de Erlangen* [7], en el que propone clasificar las geometrías (incluyendo a la euclidiana, la de Lobachevsky y Bolyai y la proyectiva) según los «grupos de simetría» subyacentes.

G. Fano, estudiante de Klein, dio otro paso importante al considerar geometrías *finitas*, que también encajan dentro del *Programa* de Klein. En la [figura 1](#) está representado el *plano de Fano*, la menor geometría proyectiva plana posible.

- ✦ El plano de Fano constituye una pieza fundamental en matemáticas discretas (divisibilidad, grafos y combinatoria). Por ejemplo, se ha usado para la factorización de enteros por medio de formas cuadráticas.

En otra línea bastante distinta, a través de los años se fue observando que algunas de las «demostraciones» en Euclides dependían de nuestra concepción física y no se basaban en los postulados. Una de las primeras es la proposición I.4 de Euclides, que luego se tomó como axioma adicional (nuestro [axioma V](#) sobre igualdad de triángulos).

<sup>2</sup> Según el mismo C. F. Gauss, él no se atrevió a presentar resultados similares por temor a la reprobación de los matemáticos de su época. Algo de razón tendría: la Academia de Ciencias de San Petersburgo rechazó el trabajo de Lobachevsky, quien tuvo que publicarlo en una revista de menor prestigio.

<sup>3</sup> También conocido como Pappus (de Alejandría).

No obstante, hacia fines del siglo XIX M. Pasch causó una gran sorpresa al mostrar en su *Vorlesungen über neuere Geometrie* de 1882 que varios resultados, como nuestro [teorema 2.8](#), no se deducen de los axiomas y postulados de Euclides, dando lugar al [axioma II](#) sobre separación.

Las ideas de Pasch fueron desarrolladas posteriormente por D. Hilbert (1862–1943) quien en su *Grundlagen der Geometrie* (fundamentos de la geometría) de 1899 [5] propuso un sistema de axiomas generales que caracterizan a las geometrías, inclusive con conjuntos «numéricos» que no satisfacen la arquimedianeidad.

- ✎ Hilbert no hizo un análisis exhaustivo de la independencia de sus axiomas, y sólo presentó la independencia entre ciertos grupos de axiomas. R. L. Moore en 1902 probó que, efectivamente, los axiomas de Hilbert no son independientes.

Para concluir, los axiomas de Euclides dieron forma a la matemática como disciplina, tratando de abstraer propiedades de los objetos de la realidad física para hacer un desarrollo puramente deductivo a partir de «nociones previas» y axiomas. En el proceso, por ejemplo al tratar de demostrar el postulado de las paralelas a partir de los otros, se fueron desarrollando técnicas que luego se transformaron en áreas independientes dentro de la matemática. Este movimiento se continuó con los axiomas de Hilbert, provocando que el estudio de sistemas formales formara una gran parte de las matemáticas posteriores.

## 1.2. La geometría y la enseñanza

Desde la época pitagórica, unos 500 años a.C., la geometría fue considerada parte fundamental de la enseñanza superior en la cultura occidental, dando lugar a que en las universidades medievales se estudiara el *quadrivium* (aritmética, geometría, música y astronomía) después del *trivium*<sup>4</sup> (gramática, lógica o dialéctica, y retórica), y precediendo los estudios más profundos en filosofía y teología.

Al desarrollarse un sistema educativo general, el *trivium* se integró a la escuela primaria y el *quadrivium* a la secundaria. Hasta la década de 1970, con la aparición de la «nueva matemática», la geometría euclidiana se enseñaba en muchos países —como el nuestro— en la escuela secundaria basándose en los *Elementos* de Euclides. Se dice que, después de la Biblia, los *Elementos* han sido el mejor «bestseller» de la historia.

Otros países, como Alemania e Italia, reaccionaron antes a los descubrimientos de Pasch y Hilbert y trataron de cambiar los contenidos para adecuarlos a los nuevos desarrollos.

Muchos matemáticos de renombre se preocuparon por la enseñanza de las matemáticas en los niveles primario y secundario (y por supuesto universitario) hacia fines del siglo XIX (y todo el XX). Así, el ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) se estableció en el IV Congreso Internacional de Matemáticas en 1908, siendo su primer presidente F. Klein.

Una de las preocupaciones de estos matemáticos fue el tratar de adaptar los axiomas de Hilbert a la enseñanza secundaria. Se hicieron varias propuestas (¡demasiadas!), pero una de las más destacables fue la de G. Birkhoff publicada en el *Annals of Mathematics* de 1932 [2] y luego volcada en el texto escolar *Basic Geometry* de 1940 [1]. Los cuatro axiomas de Birkhoff suponen ya definida una


<sup>4</sup> Que da origen al vocablo «trivial».

distancia y hacen uso directo de las propiedades de los números reales, haciendo innecesarios los axiomas de separación que veremos. Una variante más pulida de los axiomas de Birkhoff, quizás a un nivel un poco alto para la secundaria, son los axiomas de S. MacLane [8].

Hacia la década de 1960 apareció el movimiento *matemáticas modernas* (*new math*) en distintos países, en forma relativamente independiente. En Estados Unidos obtuvo un gran impulso tras perder la carrera del espacio contra los soviéticos con su Sputnik, y en Europa —especialmente Francia— por las ideas del poderoso grupo Bourbaki.

✎ El grupo Bourbaki, constituido hacia 1935 por matemáticos franceses de primer nivel, elaboró una serie de libros rigurosos que fundamentaban las matemáticas avanzadas a partir de las ideas de estructura, comenzando por la teoría de conjuntos.

Estos libros tuvieron una gran influencia internacional en la forma de practicar las matemáticas, sobre todo las puras, lo que se evidenció en nuestro país en las décadas de 1960 hasta 1980.

En lo anecdótico, los libros de Bourbaki introdujeron los términos inyectivo, suryectivo y biyectivo, el uso del símbolo  $\emptyset$  para el conjunto vacío y el de «curva sinuosa» , popularizado por D. Knuth en sus libros.

La rama francesa de la *matemática moderna* impulsó el estudio de la geometría a partir de las transformaciones (o movimientos) rígidos, retomando el *Programa de Erlangen* de Klein, dejando de lado la introducción axiomática clásica. En cambio, la rama estadounidense, impulsada por E. G. Begle, director del SMSG (School Mathematics Study Group) entre 1958 y 1972, elaboró un nuevo sistema de axiomas basados en los de Birkhoff, que aún son usados en Estados Unidos.

La *matemática moderna* fue un fenómeno curioso en la cultura occidental, en el que muchos matemáticos de renombre participaron activamente, lo que no había sucedido antes (y no volvió a suceder). Aunque cubrió prácticamente toda la enseñanza occidental, hubo excepciones como la Unión Soviética, liderada por A. Kolmogorov (1903–1987), y Holanda, liderada por H. Freudenthal (1905–1990) (quien también fuera presidente de ICMI). También algunos matemáticos no estaban de acuerdo con los cambios que se llevaron a cabo en sus países, como G. Pólya (1887–1985) en Estados Unidos y L. Santaló (1911–2001) en nuestro país.<sup>5</sup> Se consideraba que no era didácticamente aceptable la introducción de estructuras (empezando con la teoría de conjuntos, y siguiendo con temas como grupos) para construir el conocimiento matemático en la escuela.

La *matemática moderna* prácticamente desapareció hacia fines de 1980, dejando una gran confusión entre los docentes, muchos de los cuales no pudieron hacer la transición. La experiencia produjo que se pensara en integrar la didáctica y la matemática (como disciplinas autónomas), impulsando el desarrollo de la *educación matemática* (o *didáctica de las matemáticas*) como disciplina independiente.

Hacia 1980 aparecieron las computadoras personales con sus capacidades gráficas, y se desarrolló software como *Cabri Géomètre* en Francia (1984) y *Geometer's Sketchpad* en Estados Unidos (1991), lo que conllevó un gran cambio en la enseñanza en los países avanzados.

<sup>5</sup> Es imperdible la transcripción de una de sus conferencias en *La enseñanza de la matemática en la escuela media* [11]. De hecho, es muy instructivo leer toda la introducción en ese libro.

Con medios tecnológicos o sin ellos, la enseñanza de la geometría basada en la axiomática (y gran parte de las matemáticas) fue desapareciendo de las escuelas en muchos países, y con ella las demostraciones.

Concluimos este apartado citando a Santaló con su visión de la matemática y su enseñanza en *La geometría en la formación de profesores* [12]:

Desde la antigüedad se distinguen dos objetivos principales de la enseñanza de la matemática, a saber: el *formativo*, destinado a cultivar y practicar el razonamiento lógico, y el *informativo*, destinado a enseñar las técnicas especiales que son necesarias para usar la matemática en sus aplicaciones, cada vez más extendidas en todas las ramas del saber. A veces se ha dado preponderancia al aspecto formativo, que da lugar a lo que hoy llamamos *matemática pura*, posición defendida tradicionalmente por Platón al proponer para los ciudadanos de su República el estudio de aquella matemática que tiene por fin el conocimiento y que «facilita al alma los medios para elevarse desde la esfera de la generación hasta la verdad y la esencia». El aspecto informativo, en cambio, constituye la hoy llamada *matemática aplicada* y era despreciada por Platón por considerarla destinada a los «comerciantes y traficantes, que la utilizan tan sólo en vista a las compras y a las ventas». Esta matemática aplicada, sin embargo, fue esencial en la Nueva Ciencia de Galileo y en todos los desarrollos de la misma durante los siglos XVIII y XIX, resultando fundamental para toda la ciencia y tecnología modernas.

### 1.3. Lo que haremos

Que hayan pasado más de 2000 años hasta que se determinara la independencia de los postulados o se descubrieran algunas fallas en la presentación de Euclides, nos hace pensar que no tiene sentido presentar un sistema riguroso y formal sin contar con los conocimientos necesarios.

De modo que en este curso no pretendemos una extrema rigurosidad, ni abordaremos temas de consistencia o independencia de los axiomas presentados. En cambio, trataremos de ubicarnos en un punto intermedio entre lo formal y lo intuitivo, siguiendo la presentación del libro de Pogorélov [9], quien a su vez presenta una axiomática entre la de Hilbert y la de Birkhoff.

✍ Otro libro de texto comparable en castellano es *Geometría Métrica (Tomo I Fundamentos)* de Puig Adams [10], cuya primera edición es de 1947.

Los axiomas de Pogorélov no son independientes (lo que iremos aclarando con notas), y la presentación acá *no* es completamente idéntica a la de Pogorélov (hay ligeras variantes en algunos enunciados, en el orden y algunas omisiones o agregados).

Como Euclides, Pogorélov retrasa lo más posible el uso del axioma de las paralelas, presentado aquí como [axioma VI](#), por lo que los resultados hasta nuestra [sección 5](#) no dependen de aquél. A propósito, prácticamente todos los resultados de esa sección (como [5.1](#), [5.3](#), [5.5](#) o [5.9](#)), o el teorema de Pitágoras, son equivalentes al axioma de las paralelas (suponiendo los otros axiomas).

A partir de la fundamentación de Hilbert, se han clasificado las geometrías de acuerdo a los axiomas que se toman. Con algo similar a nuestro [axioma I](#) se obtiene una geometría *de incidencia* si se incluye unicidad o *abstracta* si no. Al

agregar axiomas de separación (similares a nuestro [axioma II](#)), se obtiene una geometría *de Pasch*, midiendo ángulos y distancias entre puntos (contemplados en los [axiomas III](#) y [IV](#)), obtenemos una geometría *métrica de transportador*. En fin, agregando el [axioma V](#) obtenemos una geometría *neutral* y agregando el [VI](#) una *euclidiana*.

Separaremos las secciones según un esquema similar, introduciendo los axiomas a medida que avanzamos y son necesarios.

Pasemos al estudio de estos axiomas, pero antes un par de observaciones:

- Uno de los objetivos del curso (y del aprendizaje de matemáticas en general) es tomar una postura crítica ante enunciados y demostraciones.

Este apunte está basado en el libro de Pogorélov [9] al que debe recurrirse. Acá nos limitamos a seleccionar y anotar resultados de ese libro, tratando de no repetir demasiado lo que ya está publicado, pero debe hacerse una lectura simultánea y comparada de ambas fuentes (¿cuáles son las diferencias?, ¿por qué?).

En particular, sólo vamos a dar indicaciones de las demostraciones (señaladas con el símbolo ☞),

*¡pero recordar que en los exámenes deben hacerse las demostraciones completas!*

- Es aconsejable ir haciendo dibujos de los enunciados y demostraciones para entenderlos.

## 2. Incidencia y separación (Axiomas I y II)

Pensamos que trabajamos con un conjunto universal que se llama *plano*, cuyos elementos se denominan *puntos*, y una familia particular de subconjuntos que se llaman *rectas*. Los axiomas establecen propiedades y relaciones entre estos objetos.

El [axioma I](#) relaciona puntos y rectas, mientras que el [axioma II](#) establece una primer estructura, relacionando puntos en una recta (con la relación *entre*), y luego rectas en el plano.

### Axioma I (de *incidencia*).

1. Cualquiera que sea la recta, existen puntos que pertenecen a la recta y puntos que no pertenecen a la recta.
  - ☞ El [axioma III](#) nos va a decir que hay infinitas rectas e infinitos puntos en cada recta.
2. Cualesquiera que sean dos puntos (distintos), existe una —y sólo una— recta que pasa por estos puntos.
  - Indicamos por  $AB$  la recta que pasa por los puntos  $A$  y  $B$ .

**2.1. Teorema.** *Dos rectas diferentes no se cortan o se cortan en un único punto.*

- ☞ Usar el [axioma I.2](#).

**Axioma II (de orden o separación).**

1. De tres puntos distintos de una recta, uno —y solamente uno— de ellos se halla entre los otros dos.
  - Si  $B$  está entre  $A$  y  $C$ , lo indicamos por  $A * B * C$  ( $A$ ,  $B$  y  $C$  deben estar *alineados*, i.e., en una misma recta).
  - Si  $A * B * C$ , decimos que  $A$  y  $C$  están a distintos lados de  $B$ , o que  $B$  separa a  $A$  y  $C$ .
  - ✎ Se establece así una relación entre tres puntos alineados que tiene la simetría  $A * B * C \Leftrightarrow C * B * A$ .
  - ✎ El axioma dice que si los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  están alineados y son distintos, una y sólo una de las siguientes es verdadera:  $A * B * C$ ,  $B * C * A$  o  $C * A * B$ .
2. Un punto  $A$  en una recta la divide en dos partes no vacías llamadas *semirrectas* (o *rayos*), de modo que todo punto de la recta distinto de  $A$  está en alguna de las dos.  $A$  separa a dos puntos en distintas semirrectas, pero no separa puntos de una misma semirrecta.
  - ✎ Está enunciado como axioma pero se deduce de II.1: si  $B$  fuera otro punto en la recta,  $B \neq A$ , una semirrecta es  $\{C : A * C * B\} \cup \{B\} \cup \{C : A * B * C\}$  y la otra  $\{C : C * A * B\}$  (ver el [ejercicio 2.3](#)).
  - ✎ Agregamos la condición de que las semirrectas no sean vacías.
  - ✎ Dado que suponemos que las semirrectas no son vacías, cada una de ellas queda determinada dando un punto en la recta distinto de  $A$ .
  - Las dos semirrectas así obtenidas se llaman *complementarias* u *opuestas*.
  - El punto de la recta que produce la división en dos semirrectas se llama *origen* de (cada una de) las semirrectas.
    - ✎ El origen *no pertenece* a la semirrecta, i.e., las semirrectas son *abiertas*.
  - Denotamos por  $AB$  una semirrecta de origen  $A$  que contiene a  $B$ .
    - ✎ Usamos la notación  $AB$  tanto para la recta como para la semirrecta (de origen  $A$ ).

**2.2. Lema.** *Dada una semirrecta, existe una única recta que la contiene.*

- ✎ Sea  $a$  la semirrecta definida a partir de la recta  $r$  y el origen  $A \in r$ . Como  $a \neq \emptyset$ , existe  $B \in a \subset r$ , y necesariamente  $B \neq A$  (la semirrecta es abierta). Entonces las rectas  $AB$  y  $r$  son iguales pues  $A$  y  $B$  están en ellas (usando I.2).
- ✎ Usamos que la semirrecta no es vacía.

**2.3. Definición.** Dados los puntos  $A$  y  $B$ , con  $A \neq B$ , se llama *segmento*  $AB$  a los puntos de la recta por  $A$  y  $B$  que están entre  $A$  y  $B$ .  $A$  y  $B$  son los *extremos* del segmento  $AB$ .

- ✎ El orden de los extremos no es importante para determinar el segmento.
- ✎ Según la definición, un segmento *no incluye* a sus extremos, i.e., es *abierto*.
- ✎ Usamos la misma notación que para rectas y semirrectas. ✂

**2.4. Teorema.** *El segmento  $AB$  es una parte de la semirrecta  $AB$  (y de la recta  $AB$ ).*

- ✎ Usar II.1 y II.2 (y la definición de segmento).

**2.5. Definición.** Dadas dos semirrectas distintas  $a$  y  $b$  con un origen común  $O$ , se llama *ángulo* al conjunto formado por las semirrectas y el punto  $O$ , y se denota por  $\angle ab$ .

- $O$  es el *vértice* del ángulo, y  $a$  y  $b$  son sus *lados*.
- Si  $a$  y  $b$  son semirrectas opuestas, el ángulo se dice *llano*.
- Si  $A \in a$  y  $B \in b$ , también denotamos el ángulo por  $\angle AOB$  (el vértice en el medio).
- 📎 El orden de las semirrectas no es importante,  $\angle ab = \angle ba$  y  $\angle AOB = \angle BOA$ , pero el vértice debe estar en el medio, en general  $\angle AOB \neq \angle ABO$ .
- 📎 En la escritura manual, generalmente usamos la notación  $\widehat{ab}$  en vez de  $\angle ab$ . ✂

**2.6. Definición.** Un *triángulo* es el conjunto formado por tres puntos no alineados y los tres segmentos que unen esos puntos de a pares.

- Los puntos se denominan *vértices* y los segmentos *lados* del triángulo.
- En un triángulo se forman tres ángulos llamados *ángulos* del triángulo.<sup>6</sup>
- Si los vértices son  $A, B$  y  $C$ , el triángulo se indica por  $ABC$ .
- 📎 Es usual indicar con letras en minúsculas a los lados opuestos a los vértices indicados con letras mayúsculas: si los vértices son  $A, B, C$ , los lados serán  $a = BC, b = AC, c = AB$ . Pero esta convención no es obligatoria. ✂

**2.7. Teorema.** Ningún ángulo de un triángulo es llano.

- 📎 Los vértices no están alineados.

### Axioma II (continuación).

3. Toda recta divide a los restantes puntos del plano en dos conjuntos no vacíos llamados *semiplanos*, de modo que todo punto del plano que no está en la recta está en alguno de ellos. Si los extremos de un segmento cualquiera pertenecen a un semiplano, el segmento no corta la recta. Si ambos extremos del segmento pertenecen a diferentes semiplanos, el segmento corta a la recta.

- 📎 Como en el caso de las semirrectas y segmentos, los semiplanos *no contienen* a la recta, es decir, son *abiertos*.
- 📎 Observar las diferencias con el enunciado de Pogorélov.
- 📎 Un semiplano queda determinado dando un punto que no está en la recta.
- Cuando dos puntos están en distintos semiplanos, también decimos que la recta *separa* los dos puntos.
- Como una semirrecta está contenida en exactamente una recta (por 2.2), podemos hablar de semiplanos determinados por una semirrecta.

**2.8. Teorema (axioma de Pasch).** Si una recta  $a$ , que no pasa por ninguno de los vértices del triángulo  $ABC$ , corta a su lado  $AB$ , entonces también corta a uno —y sólo uno— de los lados  $BC$  o  $AC$ .

- 📎 Éste es el enunciado que da Hilbert en su *Grundlagen der Geometrie* para el axioma de Pasch [5]. Acá lo deducimos, pero es equivalente a II.3 (supuesto los axiomas anteriores).
- 📎 Por II.3,  $A$  y  $B$  están en distintos semiplanos respecto de  $a$ , y  $C$  está en alguno, usar nuevamente II.3 con  $C$  y el punto ( $A$  o  $B$ ) que está en distinto semiplano.

<sup>6</sup> ¡Curiosamente! De allí el nombre de triángulo, pero podría haberse llamado «trilátero» (como en «cuadrilátero»).

**2.9. Teorema.** Si una recta  $a$  contiene al punto  $A$  y no contiene al punto  $B$ , toda la semirrecta  $AB$  estará en un semiplano respecto a la recta  $a$  (el semiplano en el que está ubicado  $B$ ).

☞ Si  $C$  está en la semirrecta  $AB$ , entonces  $C \neq A$  y el segmento  $BC$  está contenido en la recta  $AB$  (por 2.4) que corta a  $a$  sólo en  $A$  (por 2.1), entonces  $C \notin a$ . Pero  $A$  deja de un lado a  $B$  y  $C$  (porque están en una misma semirrecta de origen  $A$ ), y no puede estar en el segmento  $BC$ . Por II.3,  $C$  está en el mismo semiplano que  $B$ .

**2.10. Corolario.** Si por el extremo  $A$  del segmento  $AB$  se traza una recta  $a$  que no pasa por el punto  $B$ , todo el segmento  $AB$  quedará situado en un semiplano respecto a la recta  $a$  (el semiplano en el que está ubicado  $B$ ).

☞ Usar 2.4 y 2.9.

**2.11. Corolario.** Si las rectas  $a$  y  $b$  se cortan en  $O$ , entonces las semirrectas opuestas determinadas por  $O$  en  $b$  están en distintos semiplanos respecto de  $a$ .

☞ Si las semirrectas son  $b'$  y  $b''$ , y  $B' \in b'$ ,  $B'' \in b''$ , como  $O$  está entre  $B'$  y  $B''$ , el segmento  $B'B''$  corta a  $a$  (en  $O$ ), y usamos II.3 y 2.9.

**2.12. Definición.** Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son semirrectas distintas que tienen el mismo origen, y  $a$  y  $b$  no son opuestas, diremos que  $c$  pasa entre los lados del ángulo  $\angle ab$  si existen  $A \in a$  y  $B \in b$  tales que  $c$  corta al segmento  $AB$ .

Si  $\angle ab$  es llano, cualquier rayo que parte del vértice (y no coincide con alguno de los lados) pasa entre los lados del ángulo.

☞ Es el análogo para ángulos de la relación  $A * B * C$  para puntos. ☞

**2.13. Teorema.** Si el rayo  $c$  pasa entre los lados del ángulo  $\angle ab$ , la recta que contiene el rayo  $c$  separa los lados del ángulo, i.e., las semirrectas  $a$  y  $b$  se hallan en distintos semiplanos respecto a la recta que contiene al rayo  $c$ .

Más aún, si  $\angle ab$  no es llano,  $b$  y  $c$  se encuentran en un mismo semiplano respecto de la recta que contiene a  $a$ .

☞ Sean  $A \in a$  y  $B \in b$  y  $C \in c$  tales que  $c$  corta al segmento  $AB$  en  $C$ .  $A$  y  $B$  se encuentran en distintos semiplanos respecto de la recta  $r$  que contiene a  $c$  (II.3); y por 2.9,  $a$  está en un semiplano respecto de  $r$  y  $b$  en el otro.

Sea  $\alpha$  al semiplano determinado por  $a$  que contiene a  $B$  ( $\angle ab$  no es llano).  $C$  está en el segmento  $AB$ , que está contenido en  $\alpha$  (por 2.10). Entonces las rectas  $b$  y  $c$  están contenidas en  $\alpha$  (por 2.9).

**2.14. Corolario.** Si el rayo  $c$  pasa entre los lados de  $\angle ab$  y  $\angle ab$  no es llano, entonces  $c$  corta a cualquier segmento con un extremo en cada lado del ángulo.

☞ Por 2.13, las semirrectas  $a$  y  $b$  se encuentran en distintos semiplanos respecto de  $c$ , por lo que si  $P \in a$  y  $Q \in b$ , el segmento  $PQ$  corta a la recta  $r$  que contiene a  $c$  en  $C$ . Por 2.10, todo el segmento  $PQ$  (y por lo tanto  $C$ ) está contenido en un semiplano respecto de  $a$ . Por 2.11 y la segunda parte de 2.13,  $C$  y  $c$  están en un mismo semiplano respecto de  $a$ , por lo que  $C \in c$ .

## 2.1. Ejercicios

**Ejercicio 2.1.** En el plano se tienen cuatro puntos  $A_1, A_2, A_3, A_4$  y una recta  $a$  que no contiene a ninguno de ellos. Los segmentos  $A_1A_2$  y  $A_3A_4$  cortan a la recta  $a$  y el segmento  $A_2A_3$  no la corta. ¿Corta la recta  $a$  al segmento  $A_1A_4$ ?

**Ejercicio 2.2.** Los puntos  $A, B, C, D$  están en una misma recta, con  $A * B * C$  y  $B * C * D$ . Demostrar que  $A * C * D$ .

**Ejercicio 2.3.** Demostrar la validez de la nota inmediatamente después del [axioma II.2](#): los conjuntos  $a = \{C : A * C * B\} \cup \{B\} \cup \{C : A * B * C\}$  y  $b = \{C : C * A * B\}$ , son tales que *i*) todo punto de la recta está en  $a \cup b$ , *ii*) si  $P \in a$  y  $Q \in b$  entonces  $P * A * Q$ , *iii*) si  $P, Q \in a$  entonces  $A * P * Q$  o  $A * Q * P$ , y *iv*) si  $P, Q \in b$  entonces  $A * P * Q$  o  $A * Q * P$ .

**Ejercicio 2.4.** Demostrar que dos rectas que se cortan (y son distintas) determinan exactamente cuatro ángulos.

### 3. Medidas de segmentos y ángulos (Axiomas III y IV)

El axioma [axioma III](#) nos permite medir segmentos y ángulos, mientras que el [axioma IV](#) establece correspondencias entre los reales y segmentos y ángulos.

#### Axioma III.

1. Todo segmento tiene una longitud determinada, mayor que 0.

✎ Implícitamente estamos aceptando que se ha establecido una *unidad de longitud*, que podemos pensar como un centímetro, o pulgada, o milla náutica, etc., o, directamente, que se fija un segmento arbitrario como de longitud 1, con el cual los restantes segmentos se comparan.

• Si el segmento es  $AB$ , indicamos su longitud por  $AB$ .

✎ ¡O sea que  $AB$  puede indicar una recta, una semirrecta (de origen  $A$ ), un segmento, o la longitud de un segmento!

Sin embargo, estamos siguiendo la tradición.

2. Si  $A * C * B$  entonces  $AB = AC + CB$ .

**3.1. Definición.** Dos segmentos son *iguales* si sus longitudes lo son, y uno será *mayor* que otro si la longitud del primero es mayor que la del segundo.

✎ Los segmentos  $AB$  y  $CD$  pueden ser *iguales* porque sus longitudes lo son, y a la vez ser *distintos* o *diferentes* como conjuntos de puntos si, por ejemplo, los puntos  $A, B, C, D$  son todos distintos.

Esta ambigüedad se resuelve a veces diciendo que los segmentos con *congruentes* si tienen la misma longitud, pero preferimos mantener la notación de Pogorélov, más de acuerdo con el espíritu de Euclides, donde las longitudes de los segmentos se identifican con los segmentos.  $\gg$

#### Axioma III (continuación).

3. Todo ángulo tiene una medida en grados determinada, mayor que 0. El ángulo llano mide  $180^\circ$ .

✎ Como en el caso de segmentos, se supone que hay una *unidad de medida de ángulos* que —a diferencia del caso de segmentos para los que no se especifica— se toma como «grado». En realidad, podemos pensar que la unidad inicial es el ángulo llano, al que se divide en 180 partes.

✎ Por ahora, supondremos que las medidas de los ángulos están entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ . Más adelante ampliaremos las posibilidades y consideraremos otras unidades de medida de ángulos.

- Si el ángulo es  $\angle ab$ , indicamos su medida también por  $\angle ab$ .
  - ✎ Recordar que, a diferencia del caso de segmentos, en la notación  $\angle ABC$  es importante el orden de las letras.
- 4. Si un rayo  $c$  parte del vértice de un ángulo formado por las semirrectas  $a$  y  $b$ , y pasa entre sus lados, entonces  $\angle ab = \angle ac + \angle cb$ .

**3.2. Definición.** Dos ángulos son *iguales* si sus medidas lo son, y uno es *mayor* que otro si el primero tiene medida mayor que el segundo.

✎ Valen las mismas observaciones que para la igualdad de ángulos. ✂

**Axioma IV.**

1. Dados un número positivo  $\ell$  y una semirrecta de origen  $A$  cualesquiera, existe un único punto  $B$  en la semirrecta tal que  $AB = \ell$ .
  - ✎ El axioma implica que en toda semirrecta hay infinitos puntos.
  - ✎ Una vez elegida la semirrecta y tomando la semirrecta como «eje» positivo y la opuesta como negativo, el axioma establece una correspondencia biunívoca entre puntos de la recta y números reales.
2. Cualesquiera que sean el número  $\ell$ ,  $0 < \ell < 180$ , la semirrecta  $a$  y un semiplano correspondiente, existe una única semirrecta  $b$  en el semiplano tal que  $\angle ab = \ell^\circ$ .

**3.3. Definición.** La *distancia* entre dos puntos  $A$  y  $B$ , se define como

$$\begin{cases} 0 & \text{si } A = B, \\ AB & \text{si } A \neq B. \end{cases}$$

- A fin de no generar más notaciones, indicaremos a la distancia entre  $A$  y  $B$  como  $AB$ , interpretando que si  $A = B$ , el «segmento»  $AB$  tiene longitud 0. ✂

✦ Pogorélov define la distancia entre puntos a partir de la longitud de segmentos, pero son conceptos equivalentes: si conocemos la distancia, digamos  $\rho$ , entre puntos podemos definir la longitud del segmento  $AB$  como  $\rho(A, B)$ .

Pedimos que la distancia  $\rho$  esté definida para cualquier par de puntos en el plano, con  $\rho(A, B) \geq 0$  y  $\rho(A, B) = 0$  si y sólo si  $A = B$ .

Conociendo la distancia  $\rho$ , podemos *definir* que  $C$  está entre  $A$  y  $B$  si  $\rho(A, B) = \rho(A, C) + \rho(C, B)$  (ver el [teorema 4.18](#), pero allí se usa el [axioma V](#)), y (con un poco de trabajo) recuperar el [axioma II.1](#), y luego el [axioma II.2](#) (como indicado en las notas allí).

De modo que los axiomas [II](#) y [IV](#) de Pogorélov no son independientes.

La idea de poner los axiomas a partir de la distancia es la que siguió Birkhoff [[2, 1](#)], ya comentada en la [sección 1.2](#).

**3.4. Teorema.** Si en una semirrecta  $AB$  se construye, a partir de su punto de origen  $A$ , un segmento  $AC$  de longitud menor que la del segmento  $AB$ ,  $C$  resultará entre  $A$  y  $B$ .

✎ Usar [axioma III.2](#) y [axioma IV.1](#).

**3.5. Definición.** Dos ángulos son *adyacentes* si tienen un lado común y sus otros dos lados son semirrectas complementarias. ✂

**3.6. Teorema.** *La suma de ángulos adyacentes es  $180^\circ$ .*

- ✎ Ponemos la suma de ángulos en vez del más latoso la suma de las medidas de los ángulos.
- 🔗 Usar [axioma III.4](#) y definición de adyacentes.

**3.7. Corolario.** *Si dos ángulos son iguales, también son iguales sus ángulos adyacentes.*

**3.8. Teorema.** *Si a partir de una semirrecta  $a$  se construyen en un mismo semiplano los ángulos  $\angle ab$  y  $\angle ac$  con  $\angle ac < \angle ab$ , entonces el rayo  $c$  pasa entre los lados del ángulo  $\angle ab$ .*

- 🔗 Sea  $a'$  la semirrecta opuesta a  $a$ ,  $A \in a$ ,  $B \in b$ ,  $A' \in a'$ . Por [2.8](#),  $c$  debe cortar al segmento  $A'B$  o al  $AB$ , pero no puede cortar a  $A'B$  pues por [III.4](#) sería  $\angle a'c + \angle cb = \angle a'b < \angle a'c$ .

**3.9. Definición.** Dos rectas (distintas) en el plano que no se cortan se dicen *paralelas*. Una recta es paralela a sí misma.

- Ponemos  $a \parallel b$  para indicar que las rectas  $a$  y  $b$  son paralelas.
- Cuando dos rectas distintas se cortan, diremos que son *secantes*.
- ✎ En las geometrías no euclidianas el paralelismo se define de otra forma: pueden haber rectas que no se cortan y no son paralelas.
- ✎ En dimensión tres (el espacio) hay rectas que no se cortan y no son paralelas (e.g., si no están en un mismo plano). ☞

**3.10. Definición.** Supongamos dadas las rectas  $r = AB$ ,  $s = CD$  y  $t = AC$ . Entonces los ángulos  $\angle BAC$  y  $\angle ACD$  se dicen:

- *Correspondientes internos* si  $B$  y  $D$  se encuentran en un mismo semiplano respecto de  $t$ .
- *Alternos internos* si  $B$  y  $D$  se encuentran en distintos semiplanos respecto de  $t$ . ☞

**3.11. Definición.** Dos ángulos son *opuestos por el vértice* si los lados de un ángulo son semirrectas complementarias del otro. ☞

**3.12. Teorema.** *Ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

- 🔗 Son adyacentes comunes a un tercer ángulo, y usar [3.6](#).

**3.13. Definición.** Un ángulo es *recto* si mide  $90^\circ$ , es *agudo* si mide menos de  $90^\circ$ , y es *obtuso* si mide más de  $90^\circ$  pero menos de  $180^\circ$ .

- ✎ Recordemos que según el [axioma III.3](#) el ángulo llano mide  $180^\circ$ . ☞

**3.14. Proposición.** *El ángulo adyacente a uno recto también es recto.*

- 🔗 La suma es  $180^\circ$  y uno vale  $90^\circ$ .

**3.15. Definición.** Las rectas  $a$  y  $b$  se dicen *perpendiculares* si se cortan y los cuatro ángulos formados son rectos. ☞

**3.16. Teorema.** *Dado un punto de una recta, existe una única perpendicular a la recta que contiene al punto.*

- 🔗 Usar [axioma IV.2](#).

### 3.1. Ejercicios

**Ejercicio 3.1.** Si los puntos (distintos)  $A$ ,  $B$  y  $C$  están alineados y  $AB = AC + BC$ , entonces  $A * C * B$ . *Sugerencia:* Considerar cada uno de los casos posibles y excluyentes  $A * B * C$ ,  $A * C * B$  y  $B * A * C$ .

☞ Es el recíproco de III.2.

**Ejercicio 3.2.** Si  $A$ ,  $B$ ,  $P$  y  $Q$  son cuatro puntos distintos alineados tales que

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ},$$

entonces exactamente uno de  $P$  y  $Q$  está en el segmento  $AB$ . *Sugerencia:* ver que si ambos están dentro o ambos fuera del segmento entonces debe ser  $P = Q$ .

☞ Los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  forman una *hiler armónica*, tema que veremos más adelante en el curso.

**Ejercicio 3.3.** Demostrar que si el rayo  $c$  que parte del vértice del ángulo  $\angle ab$  pasa entre sus lados, entonces la medida de  $\angle ac$  es menor que la de  $\angle ab$ .

**Ejercicio 3.4.** En cada caso, dar ejemplos de tres puntos no alineados  $A$ ,  $B$  y  $C$  de modo que:

- $\angle ABC \neq \angle BAC$ .
- $\angle ABC = \angle BAC$ .

**Ejercicio 3.5.** Supongamos que  $\angle ab$  mide  $120^\circ$  y  $\angle ac$  mide  $150^\circ$ .

- Si los rayos  $b$  y  $c$  están en un mismo semiplano determinado por la recta que contiene a  $a$ , ¿cuánto mide  $\angle bc$ ?
  - ¿Y si los rayos están en distintos semiplanos?
- ☞ Recordar que por ahora los ángulos no miden más de  $180^\circ$ .

**Ejercicio 3.6.** Supongamos que tenemos dos ángulos adyacentes.

- ¿Cuánto miden si uno mide el doble del otro?
- ¿Y si uno mide  $30^\circ$  más que el otro?

**Ejercicio 3.7.** Los segmentos  $AB$  y  $CD$  se cortan en el punto  $O$  ( $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  todos distintos). Demostrar que  $\angle AOC$  y  $\angle BOD$  son opuestos por el vértice.

**Ejercicio 3.8.** Uno de los ángulos formados por la intersección de dos rectas mide  $57^\circ$ . Encontrar la medida de los (tres) ángulos restantes.

## 4. Triángulos (Axioma V)

Los axiomas que hemos visto hasta ahora dan propiedades de los puntos, rectas, segmentos, semiplanos y ángulos, pero no relacionan ángulos con segmentos, lo que hace el [axioma V](#) por medio de los triángulos.

**4.1. Definición.** Dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son *iguales* si sus lados y sus ángulos correspondientes son iguales, i.e., si

- $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$ ,  $AC = A'C'$ , y

b)  $\angle A = \angle A'$ ,  $\angle B = \angle B'$ ,  $\angle C = \angle C'$ .

☞ Según esta convención,

*es importante el orden en que se dan los vértices de los triángulos para determinar la igualdad*

Por ejemplo, en general el triángulo  $ABC$  no es igual al triángulo  $BCA$  (ejercicio 4.1).

Algunos autores distinguen estos triángulos llamándolos *ordenados* (e.g., MacLane [8]).

☞ Valen las mismas observaciones que para la igualdad de segmentos o ángulos: sería más preciso usar «congruentes» en vez de «iguales». ✂

**Axioma V (LAL).** Si en dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  se tiene  $\angle A = \angle A'$ ,  $AB = A'B'$  y  $AC = A'C'$ , entonces los triángulos son iguales.

☞ Llamamos a este criterio *LAL* por lado-ángulo-lado.

**4.2. Teorema (ALA).** Si los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son tales que  $AB = A'B'$ ,  $\angle A = \angle A'$  y  $\angle B = \angle B'$ , entonces los triángulos son iguales. Es decir, también  $\angle C = \angle C'$ ,  $AC = A'C'$  y  $BC = B'C'$ .

☞ *ALA* por ángulo-lado-ángulo.

☛ Usamos *LAL* si  $AC = A'C'$ . Si no, suponemos, e.g.,  $AC > A'C'$ , construimos el triángulo  $ABC''$  con  $AC'' = A'C'$ , por 3.4 el rayo  $BC''$  pasa entre los rayos  $BA$  y  $BC$ , por ejercicio 3.3 es  $\angle ABC'' < \angle ABC$ , con *LAL* llegamos a contradicción.

**4.3. Definición.** Un triángulo es *isósceles* si tiene dos lados iguales. El tercer lado se llama *base*.

☞ Un triángulo equilátero también es isósceles. En este caso la base puede ser cualquiera de los lados.

☞ El término «base de triángulo» se usa también para indicar un lado distinguido de un triángulo arbitrario, como en la fórmula del área  $b \times h/2$ . ✂

**4.4. Teorema (pons asinorum).** En un triángulo isósceles, los ángulos de la base son iguales, es decir, si el triángulo es  $ABC$  con  $AC = BC$ , la base es  $AB$  y se tiene  $\angle A = \angle B$ .

Recíprocamente, si en el triángulo  $ABC$  se tiene  $\angle A = \angle B$ , entonces  $AC = BC$  y el triángulo es isósceles.

☞ *Pons asinorum* (latín por *punto de burros*) es el nombre tradicional dado a este teorema (proposición I.5 en los *Elementos*), presuntamente porque acá los alumnos más flojos se perdían con Euclides.

☛ Se comparan los triángulos  $CAB$  y  $CBA$ , usando *LAL* para una implicación y *ALA* para la otra.

☞ La idea de esta demostración se atribuye a Pappus.

**4.5. Definición.** El *punto medio* del segmento  $AB$  es un punto  $D$  sobre la recta  $AB$  tal que  $AD = DB$ . ✂

**4.6. Definición.** La *bisectriz* de un ángulo  $\angle ab$  y origen  $O$ , es un rayo  $c$  con origen en  $O$  tal que  $c$  pasa entre  $a$  y  $b$ , y las medidas de los ángulos  $\angle ac$  y  $\angle bc$  son iguales.

- ✎ En el caso de un ángulo llano, existirán dos bisectrices.
- ✎ Por el contrario si admitimos que un ángulo mida  $0^\circ$ , i.e., cuando  $a = b$ , la bisectriz será la misma semirrecta. ✎

**4.7. Proposición.** Si el ángulo  $\angle ab$  no es llano, tiene una única bisectriz, i.e., existe una única semirrecta  $c$  entre  $a$  y  $b$  tal que  $\angle ac = \angle cb$ .

☞ Usar [axioma III.3](#) y [axioma IV.2](#).

**4.8. Definición.** Dado el triángulo  $ABC$  decimos que

- El segmento  $CD$  es *mediana* del triángulo (respecto del lado  $AB$ ) si  $D$  es punto medio de  $AB$ .
- El segmento  $CD$  es *bisectriz* del triángulo (respecto del ángulo  $\angle C$ ) si el rayo  $CD$  (con origen en  $C$ ) es bisectriz del ángulo  $\angle C$ .
- Dado  $D$  en la recta  $AB$ , decimos que el segmento  $CD$  es *altura* del triángulo (respecto del vértice  $C$ ) si las rectas  $AB$  y  $CD$  son perpendiculares.
- ✎ A veces distinguimos un lado del triángulo llamándolo *base*, como mencionamos en la definición de base de triángulo isósceles. En este caso, cuando nos referimos a la altura correspondiente a la base, nos referimos a la altura con respecto al vértice opuesto al lado denominado como base. ✎

**4.9. Teorema.** En un triángulo isósceles, la mediana relativa a la base es también bisectriz y altura.

☞ Si  $CD$  es la mediana relativa a la base, se ve que los triángulos  $CAD$  y  $CBD$  son iguales (LAL), y de  $\angle ACD = \angle BCD$  se obtiene bisectriz y de  $\angle ADC = \angle BDC$  se obtiene altura.

**4.10. Teorema (LLL).** Si los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son tales que  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$  y  $BC = B'C'$ , entonces los triángulos son iguales. Es decir, los ángulos correspondientes también son iguales.

✎ Como hicimos con los criterios anteriores, LLL es por lado-lado-lado.

☞ Si  $\angle A = \angle A'$  o  $\angle B = \angle B'$ , se usa LAL. En otro caso se construye  $C''$  en el semiplano en el que está  $C$  respecto de la recta  $AB$ , de modo que  $\angle BAC'' = \angle A'$  y  $AC'' = A'C'$  (como  $\angle A \neq \angle A'$ , debe ser  $C \neq C''$ ). Por LAL, los triángulos  $A'B'C'$  y  $ABC''$  son iguales, i.e.,  $BC'' = B'C'$ . Los triángulos  $CC''A$  y  $CC''B$  son isósceles y  $CC''$  es base común. Si  $D$  es el punto medio del segmento  $CC''$ ,  $D$  no está en la recta  $AB$  ( $C$  y  $C''$  están en el mismo semiplano respecto de esa recta de modo que el segmento  $CC''$  no la corta), y las rectas  $AD$  y  $BD$  son distintas. Además,  $AD \perp CC''$  y  $BD \perp CC''$  (por 4.9), pero eso contradice 3.16.

**4.11. Teorema.** La suma de dos ángulos cualesquiera de un triángulo es menor que  $180^\circ$ .

☞ Si el triángulo es  $ABC$ , demostramos (por ejemplo) que  $\angle A + \angle C < 180^\circ$ . La idea es poner los dos ángulos juntos para poder sumarlos, y lo hacemos—como veremos después— con una simetría central. Sea  $\alpha$  el semiplano respecto de la recta  $AB$  que contiene a  $C$ , y sea  $O$  punto medio de  $AC$ . Por 2.10,  $O \in \alpha$ , y por 2.9 la semirrecta  $BO$  está contenida en  $\alpha$ . Sea  $D$  en el rayo opuesto al  $OB$  tal que  $OB = OD$ . Entonces  $D \in \alpha$ . Los triángulos  $AOD$  y  $COB$  son iguales (por 3.12 y LAL),  $\angle OCB = \angle OAD$ ,  $\angle BAD = \angle BAO + \angle OAD$ , y usamos 2.7 para el triángulo  $ABD$ .

**4.12. Teorema.** Sean  $a, b, c$  tres rectas tales que  $c$  corta a  $a$  en  $A$  y a  $b$  en  $B$ . Si vale alguna de las condiciones:

- i) los ángulos alternos internos son iguales, o
- ii) los ángulos correspondientes internos suman  $180^\circ$ ,

entonces  $a \parallel b$ .

- ☞ i) y ii) son equivalentes por adyacencias. Si  $a \parallel b$ , sea  $C \in a \cap b$ .  $\angle BAC$  y  $\angle ABC$  son correspondientes internos, y  $\angle BAC + \angle ABC < 180^\circ$  por 4.11 en el triángulo  $ABC$ .

**4.13. Corolario.** Si  $a \perp c$  y  $b \perp c$ , entonces  $a \parallel b$ .

**4.14. Definición.** En el triángulo  $ABC$  se llama *ángulo exterior* o *externo* de vértice  $A$  al ángulo adyacente del ángulo del mismo vértice en el triángulo.

Para distinguirlos, el ángulo de vértice  $A$  del triángulo a veces se llama *ángulo interior* o *interno*. ☞

**4.15. Teorema.** Todo ángulo exterior del triángulo es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente a éste.

- ☞ Si el triángulo es  $ABC$ , para demostrar que el ángulo exterior en  $A$ , llamémoslo  $\alpha$ , es mayor que el interior en  $B$ , usamos 4.11 para ver que  $\angle A + \angle B < 180^\circ$  y usamos  $\alpha + \angle A = 180^\circ$ .

**4.16. Teorema.** Si en el triángulo  $ABC$  es  $AB > BC$ , entonces  $\angle C > \angle A$ .

Recíprocamente, si  $\angle C > \angle A$ , entonces  $AB > BC$ .

En otras palabras, en un triángulo «a mayor ángulo se opone mayor lado» o, equivalentemente, «a mayor lado se opone mayor ángulo».

- ☞ Consideramos  $C'$  en la semirrecta  $BA$  tal que  $BC' = BC$ ,  $C'$  está entre  $A$  y  $B$ , la semirrecta  $CC'$  pasa entre  $CA$  y  $CB$ ,  $\angle BCC' < \angle BCA$  (ejercicio 3.3),  $\angle BCC' = \angle BC'C$  por isósceles, y  $\angle BC'C$  es exterior en el triángulo  $AC'C$  y por lo tanto mayor que  $\angle A$ .

Para el recíproco, si  $\angle C > \angle A$  no puede ser  $AB = BC$  (por isósceles y entonces  $\angle A = \angle C$ ), ni  $AB < BC$  (por anterior resultaría  $\angle A > \angle C$ ).

**4.17. Teorema (desigualdad triangular).** En todo triángulo, la suma de dos lados es mayor que el tercer lado.

- ☞ Si el triángulo es  $ABC$ , construimos  $D$  en la semirrecta  $AC$  tal que  $AD = AC + CB$ , resulta  $\angle CBD = \angle CDB$  (por ser isósceles y 4.4),  $\angle ABD > \angle CBD = \angle CDB$  pues semirrecta  $BC$  pasa entre  $BA$  y  $BD$ , y  $AC + CB = AD > AB$  por 4.16.

**4.18. Teorema.** Si  $A, B, C$  son tres puntos, no necesariamente distintos,  $AB \leq AC + CB$ , con igualdad si y sólo si  $A * C * B$  o  $A = C$  o  $C = B$ .

- ☞ 1) Si  $A, B, C$  son distintos y no alineados, usamos 4.17 para obtener  $AB < AC + CB$  y no vale la igualdad. 2) Si distintos pero alineados, usamos II.1 y III.2). Por ejemplo, si  $A * B * C$  debe ser  $AC + CB > AC = AB + BC > AB$ . 3) Si dos o tres puntos coinciden hay una distancia nula.

Si  $AB = AC + CB$ , los puntos deben estar alineados (si no, usamos 4.17) y usamos el ejercicio 3.1.

**4.19. Definición.** Un triángulo es *rectángulo* si tiene un ángulo recto.

- En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa* y los otros dos lados se llaman *catetos*. ☞

**4.20. Proposición.** En un triángulo rectángulo:

- Los ángulos que no son rectos son agudos.
- La hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos pero menor que la suma de éstos.

☞ El primero se puede deducir de 4.15, el segundo de 4.16.

**4.21. Teorema.** Supongamos que  $ABC$  y  $A'B'C'$  son triángulos rectángulos en  $C$  y  $C'$  respectivamente. Entonces los triángulos son iguales si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $BC = B'C'$  y  $\angle A = \angle A'$ , o
- $AB = A'B'$  y  $BC = B'C'$ , o
- $AB = A'B'$  y  $\angle A = \angle A'$ .

☞ No sabemos aún que la suma de los ángulos es  $180^\circ$  (porque todavía no usamos el axioma de las paralelas). Junto con los criterios anteriores (LAL, ALA, LLL) este teorema nos dice que dado un lado (incluyendo la hipotenusa) y algún elemento más (otro lado o un ángulo agudo), el triángulo rectángulo queda unívocamente determinado.

☞ Si  $AC = A'C'$ , *a*) y *c*) se deducen de LAL, y *b*) de LLL.

Si  $AC \neq A'C'$ , consideremos (por ejemplo)  $A'C' < AC$ .

En *a*) y *b*) consideramos  $A''$  en rayo  $CA$  tal que  $CA'' = C'A'$ ,  $A''$  queda entre  $A$  y  $C$  (3.4), los triángulos  $A'B'C'$  y  $A''BC$  son iguales por LAL, y debe ser  $\angle BA''C = \angle B'A'C'$  (lo que es imposible en *a*) por 4.15 mirando el triángulo  $ABA''$ ) y  $BA'' = B'A'$  (lo que es imposible en *b*) pues el triángulo  $ABA''$  resulta isósceles,  $\angle BAA'' = \angle BA''A$  es obtuso por exterior a agudo).

Para *c*) (y  $A'C' < AC$ ), tomamos  $AC'' = A'C'$  en la semirrecta  $AC$ , los triángulos  $ABC''$  y  $A'B'C'$  son iguales por LAL,  $\angle AC'' = 90^\circ$ , y  $\angle CC''B = 90^\circ$ , y el triángulo  $CBC''$  tiene dos ángulos rectos.

**4.22. Definición.** Sean  $A$  y  $B$  dos puntos y  $a$  y  $b$  dos rectas tales que  $B \in b$ ,  $a \perp b$  y  $A \in a \cap b$ . Si  $A \neq B$  (i.e., si  $B \notin a$ ), el segmento  $AB$  se llama *perpendicular a a por B*.

☞ También llamaremos de esta forma a la recta  $b$ .

- El punto  $A$  se llama *pie de la perpendicular* o *proyección de B sobre a*. ☞

**4.23. Teorema.** Dados el punto  $B$  y la recta  $a$ , existe una —y sólo una— recta  $b$  tal que  $B \in b$  y  $a \perp b$ .

☞ Observar la similitud con la versión de Playfair del axioma VI de las paralelas. Sin embargo aún no hemos usado este axioma.

☞ Si  $B \in a$  usamos 3.16. Consideremos ahora  $B \notin a$ . Veamos primero la existencia. Consideremos dos puntos distintos  $C$  y  $D$  en  $a$  (recordar la nota en el axioma IV.1). Si  $BC \perp a$  ya está. Si no,  $B$  está en uno de los semiplanos definidos por  $a$ , y construimos  $B'$  en el otro de modo que  $\angle BCD = \angle B'CD$  y  $BC = B'C$  (la reflexión respecto a  $a$  que estudiamos más tarde). Como  $B$  y  $B'$  están en distintos semiplanos, el segmento  $BB'$  corta a  $a$  (por II.2) en, digamos,  $A$ . Los triángulos  $CAB$  y  $CAB'$  son iguales por LAL (observar que las rectas  $CD$  y  $CA$  pueden ser opuestas o coincidir), luego  $\angle CAB = \angle CAB' = 90^\circ$  por adyacentes.

Para la unicidad, supongamos que haya dos,  $BA$  y  $BA'$ , con  $A, A' \in a$ , entonces el triángulo  $BAA'$  tiene dos ángulos rectos.

**4.24. Corolario.** *Dados un punto  $B$  y una recta  $a$ , existe una recta  $b$  tal que  $a \parallel b$  y  $B \in b$ .*

☞ Acá se habla de existencia, el **axioma VI** nos dice de la unicidad.

⤴ En algún sentido, la perpendicularidad de dos rectas es una propiedad *local* (intuitivamente, hay que mirar qué pasa con las rectas cerca del punto de intersección), mientras que el paralelismo es una propiedad *global* (para verificarla hay que buscar en todo el plano).

El resultado dice que podemos verificar una propiedad global mirando a propiedades locales.

☞ Usar 3.16, 4.13 y 4.23.

**4.25. Definición.** *Dados un punto  $B$  y una recta  $a$ , se llama *distancia entre  $B$  y  $a$* , indicada por  $\text{dist}(B, a)$  o  $\text{dist}(a, B)$ , a la longitud del segmento perpendicular a la recta  $a$  por el punto  $B$  cuando  $B \notin a$ , o 0 si  $B \in a$ .*

☞ Por 4.23, existe un punto  $A \in a$  tal que  $AB \perp a$ , i.e., la distancia está bien definida. ☞

**4.26. Proposición.** *Si  $B$  es un punto y  $a$  una recta,  $\text{dist}(B, a) \leq BA$  para todo  $A \in a$ .*

☞ Es claro si  $B \in a$ , recordando que  $PP = 0$  para todo punto  $P$  por definición 3.3. Si  $B \notin a$ ,  $A$  es la proyección de  $B$  sobre  $a$ , y  $C$  es otro punto en  $a$ , en el triángulo  $ABC$  tenemos  $\angle A = 90^\circ$  y usamos 4.20.

## 4.1. Ejercicios

**Ejercicio 4.1.** En cada caso, dar ejemplos de tres puntos no alineados  $A$ ,  $B$  y  $C$  de modo que:

- El triángulo  $ABC$  es distinto del triángulo  $BAC$ .
- El triángulo  $ABC$  es igual al triángulo  $BAC$  pero distinto del  $CBA$ .

**Ejercicio 4.2.** Dar un ejemplo de dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  tales que  $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$  y  $\angle A = \angle A'$ , pero los triángulos no son iguales.

**Ejercicio 4.3.** Demostrar que si el triángulo  $ABC$  es igual al triángulo  $BCA$ , el triángulo es *equilátero* (es decir, todos sus ángulos y sus lados son iguales).

**Ejercicio 4.4.** En un triángulo isósceles:

- las medianas relativas a los laterales (los lados que no son base) son iguales,
- las bisectrices relativas a los laterales son iguales,
- los puntos medios de los lados forman un triángulo isósceles.

**Ejercicio 4.5.** En un triángulo isósceles, los ángulos en la base son agudos.

**Ejercicio 4.6.** ¿Existe un triángulo con dos ángulos rectos?

**Ejercicio 4.7.** En cualquier triángulo hay dos ángulos exteriores obtusos.

**Ejercicio 4.8.** Dos rectas perpendiculares a una tercera no se cortan (o sea, son paralelas).

**Ejercicio 4.9.** En el lado  $AB$  del triángulo  $ABC$  se ha tomado un punto  $D$ . Demostrar que  $CD$  es menor (al menos) que uno de los lados  $AC$  o  $BC$ .

**Ejercicio 4.10.** ¿Puede tener un triángulo lados que midan 7 cm, 10 cm y 18 cm respectivamente?

**Ejercicio 4.11.** En un triángulo isósceles, la altura relativa a la base es mediana y bisectriz.

- ✎ Se pretende hacer una demostración a partir de triángulos rectángulos, sin usar el [teorema 4.9](#).

**Ejercicio 4.12.** Supongamos que tenemos un triángulo  $ABC$  y un punto  $D$  en el segmento  $BC$ , de modo que la recta  $\ell$  por  $A$  y  $D$  satisface  $\text{dist}(B, \ell) = \text{dist}(C, \ell)$ . ¿Cómo se relacionan los segmentos  $BD$  y  $CD$ ?

**Ejercicio 4.13.** Sean  $AA'$  y  $BB'$  dos de las bisectrices del triángulo  $ABC$ .

- a) Las rectas  $AA'$  y  $BB'$  se cortan en un punto, que equidista de los lados del triángulo.
  - b) Las tres bisectrices se cortan en un (único) punto.
- ✎ Este punto se llama *incentro* por razones que veremos posteriormente.

## 5. Rectas paralelas (Axioma VI)

En esta sección finalmente usaremos el axioma de las paralelas.

**Axioma VI (de las paralelas).** Dados una recta  $a$  y un punto  $B$ , existe a lo sumo una recta  $b$  tal que  $B \in b$  y  $a \parallel b$ .

- ✎ Por [4.24](#) ya sabemos que existe una paralela. Aquí se dice que no hay otra.

**5.1. Teorema.** Si las rectas  $a, b, c$  satisfacen  $a \parallel b$  y  $b \parallel c$ , entonces  $a \parallel c$ .

- ✎ Es decir, el paralelismo entre rectas es una relación de equivalencia. Recordar que nosotros ponemos  $a \parallel a$ , a diferencia de Pogorélov.
- ☛ Si  $a \cap c = \emptyset$ ,  $a \parallel c$ . Si  $P \in a \cap c$ , entonces por  $P$  pasan dos paralelas a  $b$ , por [VI](#) debe ser  $a = c$ , i.e.,  $a \parallel c$ .

**5.2. Corolario.** Si una recta corta a una de dos rectas paralelas, entonces corta a la otra.

- ✎ Debe entenderse que las tres rectas son distintas.
- ☛ Si  $a \parallel b$  y  $c \cap a \neq \emptyset$  y  $c \cap b = \emptyset$ , entonces  $c \parallel b$  (definición),  $c \parallel a$  ([5.1](#)), y como  $a \cap c \neq \emptyset$  debe ser  $a = c$ .

**5.3. Teorema.** Sean  $a, b, c$  tres rectas tales que  $c$  corta a  $a$  en  $A$  y a  $b$  en  $B$  y  $a \parallel b$ . Entonces los ángulos alternos internos son iguales, y la suma de los ángulos correspondientes internos es  $180^\circ$ .

- ✎ Es el recíproco de [4.12](#).
- ☛ Si los ángulos correspondientes internos no suman  $180^\circ$ , sea  $a'$  por  $A$  tal que la suma de los correspondientes internos de  $a'$  y  $b$  con  $c$  sea  $180^\circ$ , entonces  $a' \parallel b$  por [4.12](#), y  $a = a'$  por [axioma VI](#).
- ✎ Observar que en la demostración se usa esencialmente la forma dada por Euclides a su [quinto postulado](#).

- ✦ Para geometrías «no planas» que se estudian en cursos de geometría diferencial, tal vez la forma de Euclides sea más acertada, ya que tiene implícitamente la noción de «curvatura» (que es una propiedad «local»).

**5.4. Corolario.** Si  $a \parallel b$  y  $c \perp a$ , entonces  $c \perp b$ .

✎ Comparar con 4.13.

**5.5. Teorema.** La suma de los ángulos (interiores) de un triángulo es  $180^\circ$ .

- ✦ Hay varias formas de hacerlo, por ejemplo considerando una paralela a uno de los lados por el vértice opuesto y después usar alternos o correspondientes. Otra forma, como la presentada por Pogorélov, es rehacer la construcción en 4.11, usando ahora que esencialmente se trata de un paralelogramo.

**5.6. Corolario.** En un triángulo  $ABC$ , el ángulo adyacente a  $\angle A$  es suma de los ángulos  $\angle B$  y  $\angle C$ .

**5.7. Definición.** Dos ángulos son *complementarios* si suman  $90^\circ$  y son *suplementarios* si suman  $180^\circ$ . ✎

**5.8. Corolario (del teorema 5.5).** En un triángulo rectángulo, los ángulos agudos son complementarios.

**5.9. Teorema.** Dos rectas paralelas son equidistantes, i.e., todos los puntos de una recta están a una misma distancia de la otra recta.

- ✦ Sean  $a \parallel b$  y  $A, A' \in a$ , y consideremos  $B, B' \in b$  tales que  $AB \perp b$  y  $A'B' \perp b$ , los triángulos  $ABA'$  y  $B'BA$  resultan iguales (son rectángulos y 4.21.c por alternos), entonces  $AB = A'B'$  y  $\text{dist}(A, b) = AB = A'B' = \text{dist}(A', b)$ .

## 5.1. Ejercicios

**Ejercicio 5.1.** Sean  $a$  y  $b$  dos rectas paralelas. Demostrar que  $b$  está en un semiplano respecto a la recta  $a$ .

**Ejercicio 5.2.** ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo si están en la proporción  $1 : 2 : 3$ ?

- ✎ Tres cantidades  $x, y, z$  están en la proporción  $a : b : c$  (donde ninguno de  $a, b, c$  es nulo) si

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Observar que es importante el orden en que se dan  $x, y, z$  y  $a, b, c$ .

**Ejercicio 5.3.** ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo rectángulo isósceles?

**Ejercicio 5.4.** Sea  $ABC$  un triángulo isósceles de base  $AB$ . Demostrar que la suma de las distancias entre  $X$  y las rectas  $AC$  y  $BC$  es constante para todo  $X$  en la base.

## Referencias

- [1] R. BEATLEY Y G. BIRKHOFF. *Basic Geometry*. Chelsea Publishing Co., 1940.  
 [2] G. BIRKHOFF. A set of postulates for plane geometry (based on scale and protractors). *Annals of Mathematics*, 33:329–345, 1932.

- [3] R. DESCARTES. *La Geometría*. Limusa, 1997. Ver <http://www.gutenberg.org/files/26400/26400-pdf.pdf>.
- [4] T. L. HEATH. *The thirteen books of Euclid's Elements*. Dover Publications, 1956.
- [5] D. HILBERT. *The Foundations of Geometry*. The Open Court Publishing Co, 1950. Ver <http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf>.
- [6] D. E. JOYCE. *Euclid's Elements*. Clark University, 1996. URL <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>. Ver también [http://www.euclides.org/menu/elements\\_esp/indiceeuclides.htm](http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm).
- [7] F. KLEIN. A comparative review of recent researches in geometry. *Bull. New York Math. Soc*, 2:215–249, 1892–1893. Ver [http://math.ucr.edu/home/baez/erlangen/erlangen\\_tex.pdf](http://math.ucr.edu/home/baez/erlangen/erlangen_tex.pdf).
- [8] S. MACLANE. Metric postulates for plane geometry. *The American Mathematical Monthly*, 66:543–555, 1959.
- [9] A. V. POGORÉLOV. *Geometría elemental*. MIR, Moscú, 1974.
- [10] P. PUIG ADAM. *Geometría Métrica. Tomo I. Fundamentos*. Euler Editorial, Madrid, 16a. edición, 1986.
- [11] L. A. SANTALÓ. *La enseñanza de la matemática en la escuela media*. Editorial Docencia, Buenos Aires, 1986.
- [12] L. A. SANTALÓ. *La geometría en la formación de profesores*. Red Olímpica, Buenos Aires, 1993.