Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2010

Circunferencia

En este apunte miramos propiedades básicas de la circunferencia tomando elementos de §11 y §13 en Pogorélov [3] y cubriendo buena parte del libro III de *Los Elementos* de Euclides [1, 2].

En la seccion 1 nos basamos en el teorema de Pitágoras para estudiar la intersección de una circunferencia con una recta u otra circunferencia. Si bien los resultados parecen intuitivos, dependen fundamentalmente de que la raíz cuadrada de un número real es otro número real: si no trabajáramos sobre los reales el resultado podría no ser cierto (pensemos en un triángulo de lados 1, 1 y $\sqrt{2}$).

Aunque en la construcción con regla y compás de un triángulo de lados dados usamos que dos circunferencias se cortan, desde la teoría veremos primero la existencia de los triángulos para luego pasar a la intersección de circunferencias. Para eso necesitaremos generalizar el teorema de Pitágoras.

Hay pocas variantes sobre lo hecho en Pogorélov, y omitimos la mayoría de las demostraciones (que están en el libro). Las diferencias más notables son: el estudio de la intersección de recta y circunferencia en la sección 1, la definición tradicional de la tangente (Euclides III, definición 2) en la sección 2, y la introducción del arco capaz al final de la sección 3.

Varios de los ejercicios están tomados de Vasíliev y Gutenmájer [4].

1. Propiedades generales de la circunferencia

Recordemos la definición de circunferencia y conceptos relacionados.

1.1. Definición. Una circunferencia de centro O y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos P tales que $OP = r$.

- También llamamos *radio* a cualquier segmento que une un punto sobre la circunferencia con O.
- El segmento que une dos puntos de la circunferencia se llama *cuerda*.
- Si la cuerda contiene al origen la llamamos *diámetro* (de la circunferencia o círculo).
- También llamamos *diámetro* al valor común de las longitudes de los diámetros (que es $2r$).

1.2. Teorema (11.1 en Pogorélov). *En una circunferencia, una recta que contiene un diámetro es eje de simetría y el centro de la circunferencia es centro de simetría.*

1.3. Proposición. *Si en la circunferencia de centro O y radio r el diámetro AB corta a la cuerda PQ en R, entonces $\angle ARP = 90°$ si y sólo si R es el punto medio de PQ.*

✎ Esto es Euclides III.3.

✎ Comparar con el teorema 11.2 en Pogorélov.

1.4. Teorema (11.3 en Pogorélov). *Ninguna cuerda es mayor que el diámetro, y sólo puede ser igual si es diámetro.*

✎ Aquí hablamos de «el» diámetro como el valor que es el doble del radio.

✎ Ver Euclides III.15.

1.1. Intersección de recta y circunferencia

1.5. Proposición. *Sean c una circunferencia de centro O y radio r, ℓ una recta, y pongamos $d = \operatorname{dist}(O, \ell)$. Entonces:*

i) si $d < r$, $c \cap \ell$ tiene exactamente dos puntos,

ii) si $d = r$, $c \cap \ell$ es exactamente un punto,

iii) si $d > r$, $c \cap \ell = \emptyset$.

En particular, una recta corta a una circunferencia en a lo sumo dos puntos.

❦ Sea $B \in \ell$ tal que $d = OB$, y entonces $OB \perp \ell$.

Si $OB < r$, sean P y P' en distintas semirrectas de ℓ tales que $BP = BP' = \sqrt{r^2 - d^2}$ (axioma IV). Por el teorema de Pitágoras, $OP^2 = OB^2 + BP^2 = d^2 + r^2 - d^2 = r^2$, de modo que $OP = r$ y $P \in c$. Del mismo modo, $P' \in c$. Supongamos que exista $Q \in c \cap \ell$. Otra vez por Pitágoras debe ser $r^2 = OQ^2 = OB^2 + BQ^2 = d^2 + BQ^2$, i.e., $BQ = \sqrt{r^2 - d^2}$. Como $Q \in \ell$, por el axioma IV, debe ser $Q = P$ o $Q = P'$.

Si $OB = r$, cualquier otro punto $P \in \ell$ satisface $OP > OB = r$, i.e., $P \notin c$, y ℓ corta a c únicamente en B.

Si $OB > r$, para cualquier $P \in \ell$ se satisface $OP \geq OB > r$ y $P \notin c$.

1.2. Intersección de dos circunferencias

1.6. Teorema (13.2 y 13.3 en Pogorélov). *Sea un triángulo ABC y sea D la proyección del vértice A sobre la recta BC. Entonces si $\angle C > 90°$,*

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2\,BC\,CD,$$

mientras que si $\angle C < 90°$,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,BC\,CD.$$

- ✎ Observar el error de imprenta hacia el final de la demostración de 13.4 en Pogorélov.
- ✎ Cuando $\angle C = 90°$, $D = C$ y el resultado se reduce al teorema de Pitágoras (que se usa en la demostración).
- ✎ El resultado es esencialmente el *teorema del coseno* que veremos más adelante.

1.7. Teorema (13.5 en Pogorélov). *Dadas las longitudes a, b y c, existe un triángulo de lados a, b y c si y sólo si la suma de dos cualesquiera de estas longitudes es mayor que la tercera, i.e., si y sólo si*

$$a < b + c, \quad b < a + c \quad y \quad c < a + b.$$

1.8. Teorema (13.6 en Pogorélov). *Sean c_1 y c_2 dos circunferencias de centros O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2, respectivamente, donde $r_1 \le r_2$. Entonces, poniendo $d = O_1O_2$,*

i) si $r_2 < d - r_1$ o $d + r_1 < r_2$, $c_1 \cap c_2 = \emptyset$,

ii) si $d - r_1 = d$ o $d + r_1 = r_2$, $c_1 \cap c_2$ tiene exactamente un punto,

iii) si $d - r_1 < r_2 < d + r_2$, $c_1 \cap c_2$ tiene exactamente dos puntos.

En particular, dos circunferencias se cortan a lo sumo en dos puntos.

1.3. Ejercicios

- ✎ Recordar que:
  - *a*) En las construcciones, parte del problema es determinar (aunque sea groseramente) cuántas soluciones hay y qué relaciones entre los datos han de pedirse para que la construcción sea posible.
  - *b*) En los lugares geométricos hay que demostrar dos inclusiones.

Ejercicio 1.1. Si en el triángulo ABC se tiene $AB^2 < AC^2 + BC^2$ entonces $\angle C < 90°$, mientras que si $AB^2 > AC^2 + BC^2$ entonces $\angle C > 90°$.

- ✎ Recordar el recíproco de Pitágoras: si $AB^2 = AC^2 + BC^2$ entonces $\angle C = 90°$.

Ejercicio 1.2. Sean A y B son dos puntos distintos y $k > 0$. Entonces, el lugar geométrico de los puntos P para los cuales $AP^2 + BP^2 = k$ es una circunferencia con centro en el punto medio del segmento AB. *Sugerencia*: si M es el punto medio y $MP \not\perp AB$, uno de $\angle AMP$ y $\angle BMP$ es agudo y el otro obtuso y usar 1.6.

Ejercicio 1.3. Dados un punto A, una circunferencia y una longitud d, trazar por A una recta tal que la cuerda correspondiente tenga longitud d.

2. Tangente a una circunferencia

2.1. Definición. Una recta que corta a una circunferencia en exactamente un punto se llama *tangente* a la circunferencia por ese punto.

- ✎ Observar que esta definición difiere de la de Pogorélov.

El próximo resultado muestra que la definición «clásica» de tangente es equivalente a la de Pogorélov.

2.2. Corolario (de la proposición 1.5). *Sean A un punto de la circunferencia de centro O y ℓ una recta por A. Entonces $\ell \perp OA$ si y sólo si ℓ es tangente a la circunferencia por A.*

✎ Ver Euclides III.18 y III.19.

✎ Comparar con el teorema 11.4 en Pogorélov.

❦ Llamando c a la circunferencia y r a su radio, usamos 1.5 con $B \in \ell$ tal que $\operatorname{dist}(O, \ell) = OB$.

Si $\ell \perp OA$, debe ser $A = B$, $\operatorname{dist}(O, \ell) = OB = OA = r$ y hay un único punto en $c \cap \ell$ (que es A), i.e., ℓ es tangente a c por A.

Recíprocamente, si $\ell \not\perp OA$, entonces $\operatorname{dist}(O, \ell) = OB < OA$ y ℓ corta a c en dos puntos, por lo que no puede ser tangente.

2.3. Definición. Dado un triángulo ABC, se llama *circunferencia inscripta* a una circunferencia c de centro O para la cual

i) las rectas AB, BC y AC son tangentes a c,

ii) O está en el interior del triángulo.

2.4. Teorema. *Dado un triángulo ABC,*

a) *El centro de una circunferencia inscripta equidista de los lados del triángulo.*

b) *Todo punto que equidista de los lados del triángulo debe estar en las tres bisectrices.*

c) *Las bisectrices se cortan en un punto (el incentro) que equidista de los lados.*

d) *Hay una única circunferencia inscripta en el triángulo.*

✎ Ver el ejercicio 4.13 del apunte de *axiomas*.

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.1. Supongamos que c y c' son dos circunferencias *tangentes entre sí*, i.e., $c \cap c'$ tiene un único punto.

a) Si O y O' son los centros respectivos, debe ser $O \neq O'$.

b) Si A es el punto común entre las circunferencias, y ℓ y ℓ' son las rectas tangentes por A a cada una de las circunferencias, entonces $\ell = \ell'$ y $\ell \perp OO'$.

Ejercicio 2.2. Dados dos rectas paralelas y un punto A entre ellas, construir una circunferencia tangente a las rectas que pase por A.

Ejercicio 2.3.

a) Dados un ángulo y una longitud r, construir una circunferencia de radio r que sea tangente a los lados del ángulo.

b) Dados una longitud d, una circunferencia y una recta, trazar una circunferencia de radio r tangente a la recta y a la circunferencia dada.

✎ Podría haber hasta 8 circunferencias.

Ejercicio 2.4. Dado un triángulo ABC, construir todas las circunferencias que son tangentes (simultáneamente) a las rectas AB, AC y BC. ¿Cuántas de estas circunferencias hay?

✎ Las circunferencias sobre los ángulos externos se llaman *exscriptas* y sus centros los *excentros* (aunque algunos dicen *exinscripta* y *exincentro*).

Ejercicio 2.5. Si las rectas AB y AC son tangentes a una circunferencia c, con B y C en c, entonces los segmentos AB y AC son iguales.

Ejercicio 2.6. Sea ABC un triángulo y c una circunferencia exterior (exscripta) tangente al lado AB y a las semirrectas CA y CB. Si Q es el punto de intersección de c con la semirrecta CA, demostrar que el perímetro del triángulo ABC es el doble de la longitud de CQ.

Ejercicio 2.7. Una circunferencia está *inscripta* en un cuadrilátero convexo si todas las rectas que contienen a los lados del cuadrilátero son tangentes a la circunferencia.

a) Si c es una circunferencia inscripta en un cuadrilátero convexo $ABCD$, entonces $AB + CD = BC + AD$.

b) Dar un ejemplo de un cuadrilátero convexo que no tiene circunferencia inscripta.

c) ¿Puede haber un cuadrilátero convexo con más de una circunferencia inscripta?

d) Dados los segmentos a, b, c y d con $a+c = b+d$, construir un cuadrilátero $ABCD$ que tenga una circunferencia inscripta con $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$.

✎ Comparar con la definición 2.3 y el teorema 2.4.

3. Ángulos en la circunferencia

3.1. Definición. Dos puntos (distintos) A y B en una circunferencia c de centro O, dividen a c en dos partes, llamadas *arcos*.

- Si el segmento AB es diámetro de c, llamamos a cada uno de estos arcos *semicircunferencia*.
- Si el segmento AB no es diámetro, el arco que está en el mismo semiplano que O respecto de la recta AB se dice *arco mayor que la semicircunferencia*, el otro se llama[1] *arco menor que la semicircunferencia*.

  ✎ En el último caso, todos los radios que van desde el centro hasta un punto en el arco cortan al segmento AB. Lo contrario sucede en el primer caso.
- Llamamos *ángulo central* correspondiente al arco de circunferencia dado a la figura formada por los rayos que parten del centro de la circunferencia y cortan al arco.

  ✎ Se trata de un rodeo por no considerar ángulos de más de 180°. En este caso, Pogorélov considera al ángulo central como «lleno», a diferencia de lo que vimos en la definición 2.5 del apunte de *axiomas*.
- Si un arco está definido por los puntos A y B sobre la circunferencia de centro O, y el ángulo formado por las semirrectas OA y OB mide $m°$, definimos la *medida en grados* del ángulo central correspondiente como:

  i) $m°$, si el arco correspondiente es menor que una semicircunferencia,

  ii) $360° - m°$, en otro caso.

  ✎ Vale la observación anterior.

3.2. Proposición. *Si dos cuerdas de una circunferencia tienen igual longitud, entonces los ángulos centrales respectivos son iguales.*

[1] ¡Quién lo diría!

❦ Usar LLL.

3.3. Definición. Un ángulo es *inscripto* en la circunferencia c si su vértice está en la circunferencia y sus lados intersecan a la circunferencia en otros dos puntos (distintos entre sí y el vértice).

✎ Recordar los comentarios en la definición 2.13 del apunte de *construcciones*.

- El *ángulo central correspondiente al ángulo inscripto* es el ángulo central correspondiente al arco que no contiene al vértice del ángulo.

3.4. Teorema (11.5 en Pogorélov). *Todo ángulo inscripto en una circunferencia mide la mitad del ángulo central correspondiente. En particular, si el ángulo central mide* $180°$*, el ángulo inscripto es recto.*

✎ La primera parte es Euclides III.20. La última es Euclides III.31 y se atribuye a Tales de Mileto (∼624 a.C.– ∼547 a.C.).

3.5. Corolario. *Dos ángulos inscriptos cuyos lados pasan por los puntos* A *y* B *de una circunferencia son iguales si sus vértices están en el mismo arco determinado por* A *y* B *y son suplementarios si están en distintos arcos.*

✎ Esto es Euclides III.21 y III.22.

3.6. Corolario. *Si dos ángulos inscriptos en una circunferencia determinan cuerdas de igual longitud, entonces los ángulos son iguales o son suplementarios.*

❦ Usar 3.2 y 3.5.

3.7. Definición. Dada una circunferencia c y un punto $A \in c$, la tangente a c por A queda dividida por el mismo A en dos semirrectas, llamadas *semitangentes*.

- Si AB es una cuerda de c, cada semitangente forma con la semirrecta AB un ángulo llamado *semiinscripto*.

  ✎ Seguimos la nomenclatura común en Argentina, aunque esta definición no está en Pogorélov.

- El *ángulo central correspondiente al ángulo semiinscripto* es aquél cuyo arco está en el mismo semiplano respecto de la recta AB que la semitangente que lo determina.

3.8. Teorema (11.6 en Pogorélov). *Un ángulo semiinscripto mide la mitad del ángulo central correspondiente.*

3.9. Problema. *Dadas una circunferencia* c *y un punto exterior* A*, construir las tangentes a* c *que pasan por* A*.*

✎ Ver también el ejercicio 3.2.

3.10. Definición. El *arco capaz* de un ángulo α respecto de un segmento AB es el lugar geométrico de los puntos P desde los cuales se ve al segmento con un ángulo α, i.e., $\angle APB = \alpha$.

3.11. Proposición. *El arco capaz del ángulo* α *con respecto al segmento* AB *es la unión de dos arcos de circunferencias con cuerda* AB*, simétricos respecto de la recta* AB *(los puntos* A *y* B *no están incluidos).*

Si un punto P *está dentro de la región limitada por estos arcos,* $\angle APB > \alpha$*, mientras que* $\angle APB < \alpha$ *si* P *si está fuera de la región.*

❦ Sean α y AB dados. Construyamos C de modo que $\angle CAB = \alpha$. Si $\alpha = 90°$ tomemos O como el punto medio de AB, en otro caso tomemos O como la intersección de la mediatriz de AB con la perpendicular a AC por A (esta intersección no existe si $\alpha = 90°$). Sean c la circunferencia de centro O que pasa por A, β el ángulo central correspondiente al ángulo semiinscripto $\angle BAC$, c_1 el arco determinado por AB que no es el correspondiente a β. Entonces β mide 2α, y todo ángulo $\angle ADB$ con $D \in c_1$ es igual a α (el ángulo central correspondiente es β). Sea c_1' la figura simétrica de c_1 respecto de la recta AB. Entonces el arco capaz es $c_1 \cup c_1'$ (sin incluir los puntos A y B).

Tomemos $0° < \alpha < 180°$ y P no en la recta AB. Si $P \in c_1 \cup c_1'$ es $\angle APB = \alpha$. Si $P \notin c_1 \cup c_1'$, alguna de las rectas AP o BP corta a $c_1 \cup c_1'$ en el mismo semiplano que P respecto de la recta AB. Sea Q esta intersección. Usando que si en el triángulo UVW, el punto T está en el lado UV, entonces $\angle WUV < \angle WTV$, resulta $\angle APB < \angle AQB (= \alpha)$ si Q están entre A y P, y $\angle APB > \angle AQB (= \alpha)$ si P está entre A y Q.

Si $\alpha = 90°$ quedan dos semicircunferencias de una misma circunferencia. Si $\alpha = 0°$ tenemos dos semirrectas, digamos AE y BF en la recta AB, donde A está entre B y E, y B está entre A y F (el complemento del segmento cerrado AB en la recta AB). Si $\alpha = 180°$, resulta el segmento AB (abierto).

En cualquier caso, los puntos A y B no están en el arco capaz, pues ni $\angle AAB$ ni $\angle ABB$ están definidos.

3.1. Ejercicios

Ejercicio 3.1. Dadas dos longitudes a y b, construir un segmento de longitud x tal que $x^2 = ab$.

✎ Esto es Euclides VI.13.

✎ De esta forma se resuelven geométricamente las ecuaciones de segundo grado (más una eventual completación de cuadrados).

Ejercicio 3.2. Justificar la construcción en Euclides III.17 para trazar la tangente por A a una circunferencia c de centro O y radio r: sea D el punto de intersección de c con el rayo OA, sea c' la circunferencia de centro O y radio OA, sea F un punto en la intersección de c' y la perpendicular a OA por D, sea B en la intersección de c y el rayo OF, entonces la recta AB es tangente a c.

Ejercicio 3.3. Dadas dos circunferencias c_1 y c_2, construir cuando sea posible:

a) las tangentes *exteriores*, i.e., rectas que son tangentes a ambas circunferencias y que dejan en un mismo semiplano a ambas.
Sugerencia: Si el centro de c es O, construir M el punto medio del segmento OA, la circunferencia c' de centro M que pasa por A. Si P es un punto de $c \cap c'$, $\angle OPA = 90°$, i.e., $AP \perp OP$.

b) las tangentes *interiores*, i.e., rectas que son tangentes a ambas circunferencias y que dejan en distintos semiplanos a ambas.

Ejercicio 3.4. Los vértices de un cuadrilátero convexo están en una circunferencia si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es $180°$.

✎ Comparar con el problema 2.15 del apunte de *construcciones*, el teorema 1.3 del apunte de *cuadriláteros*, y el ejercicio 2.7.

Ejercicio 3.5. Si A, B y C están sobre una circunferencia c, y la bisectriz de $\angle ABC$ corta a c en P ($P \neq B$), entonces P está en la mediatriz de AC.

Ejercicio 3.6 (el gatito en la escalera). Una escalera situada sobre el suelo y apoyada con un extremo en la pared, se desliza hacia abajo. ¿Qué curva recorre un gatito sentado en el centro de la escalera?

✎ Se supone que el piso y la pared están a 90°.

Sugerencia: pensar a la escalera como una de las diagonales de un rectángulo.

Ejercicio 3.7. Dados los puntos A y B,

a) Encontrar el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares desde el punto A a cualesquiera rectas que pasan por B.

b) Encontrar el lugar geométrico de los puntos que son simétricos a A respecto de alguna recta que pase por B.

Ejercicio 3.8. Dados un punto A y una circunferencia, determinar el conjunto de los puntos medios de las cuerdas de la circunferencia que pasan por A (eventualmente extendidas). *Sugerencia*: considerar la mediatriz de la cuerda.

Ejercicio 3.9. Dados los puntos A y B en el interior de la circunferencia c, construir un triángulo rectángulo inscripto en c y tal que sus catetos contengan a A y B. *Sugerencia*: considerar una circunferencia de diámetro AB.

Ejercicio 3.10. Dados los puntos A y B sobre una recta, encontrar el lugar geométrico de los puntos T que son punto de contacto de dos circunferencias tangentes, que a su vez son tangentes a la recta, una en A y la otra en B. *Sugerencia*: ¿dónde corta la tangente por T a la recta AB?

Ejercicio 3.11. Sea A el vértice de un ángulo α.

a) Si A se encuentra dentro de un círculo, la medida de α es la semisuma de los valores de los arcos de los cuales uno está situado entre los lados de α y el otro entre los lados del ángulo opuesto por el vértice.

b) Si A está fuera de un círculo y los lados de α cortan a la circunferencia correspondiente, la medida de α es la mitad de la diferencia de los valores de los arcos determinados (el mayor menos el menor).

Ejercicio 3.12. Sea A un punto dentro de una circunferencia. Encontrar el lugar geométrico de los vértices C de los rectángulos $ABCD$ donde B y D están sobre la circunferencia. *Sugerencia*: ver ejercicio 1.4 del apunte de *aplicaciones del área*.

4. Bibliografía

[1] T. L. Heath. *The thirteen books of Euclid's Elements*. Dover Publications, 1956.

[2] D. E. Joyce. *Euclid's Elements*. Clark University, 1996. URL http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html. Ver también http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm.

[3] A. V. Pogorélov. *Geometría elemental*. MIR, Moscú, 1974.

[4] N. B. Vasíliev y V. L. Gutenmájer. *Rectas y curvas*. MIR, Moscú, 1980.