

Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2010

Concurrencia y colinealidad

1. Teoremas de Ceva y Menelao	1
1.1. Ejercicios	6
2. Otros resultados clásicos	7
3. Bibliografía	9

1. Teoremas de Ceva y Menelao

Dos rectas que se cortan lo hacen en un punto (o son iguales), pero ya hemos visto ejemplos —como las medianas o las bisectrices de un triángulo— de tres rectas distintas que se cortan en un punto.

1.1. Definición. Decimos que tres o más rectas son *concurrentes* si se cortan en un único punto.

Aunque rectas concurrentes no están necesariamente asociadas a un triángulo, es interesante estudiar el caso de rectas que pasan por los vértices de un triángulo y son concurrentes, como las medianas o bisectrices.

1.2. Definición. El segmento que une un vértice de un triángulo con un punto del lado opuesto se llama *ceviana*.

✎ En honor a G. Ceva (1648–1734) quien demostró el [teorema 1.4](#) en *De lineis rectis* de 1678.

En realidad, el resultado fue probado mucho antes por Yüsuf Al-Mu'taman ibn Hud, quien fue rey de Zaragoza entre 1082 y 1085.

✎ Las medianas, bisectrices y alturas son cevianas, pero no las mediatrices porque no pasan (necesariamente) por vértices.

Supongamos que tenemos un triángulo ABC y una recta que pasa por A y corta al segmento BC . Entonces la recta tiene que estar en la región sombreada en el gráfico a la izquierda de la [figura 1](#). De modo similar graficamos en esa figura las regiones de las rectas que pasan por B y cortan al segmento AC (en el centro) o pasan por C y cortan al segmento AB (a la derecha).

Así, si las rectas ℓ , m y n son concurrentes, con $A \in \ell$, $B \in m$, $C \in n$, y todas pasan por los respectivos segmentos opuestos (BC , AC y AB), entonces el punto

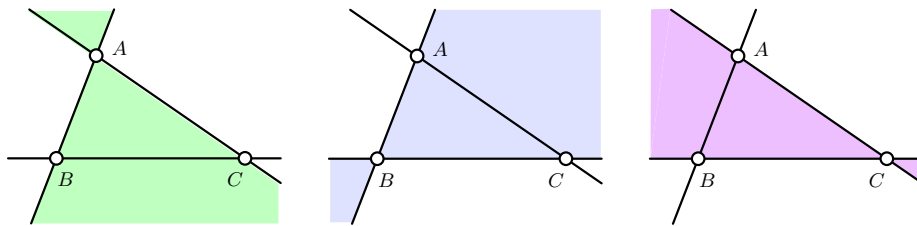


Figura 1: región de rectas según los vértices.

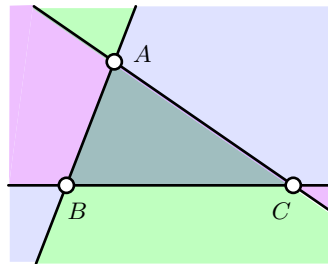


Figura 2: la intersección de las regiones.

de concurrencia debe estar en la intersección de todas esas regiones, i.e., en el interior del triángulo, como se muestra en la [figura 2](#). O, de otra forma, si dos de ellas pasan por los segmentos opuestos, la tercera también.

Por otra parte, como se muestra en la [figura 2](#), al menos una de las rectas debe pasar por el segmento opuesto, ya que la unión de las regiones de la [figura 1](#) es todo el plano.

Podemos enunciar entonces el siguiente resultado:

1.3. Lema. Sean ABC un triángulo y ℓ , m y n tres rectas concurrentes en un punto tales que $A \in \ell$, $B \in m$ y $C \in n$ y ninguno de los lados del triángulo está contenido en alguna de las rectas. Entonces sólo puede suceder una de las siguientes posibilidades:

- a) Las tres rectas cortan a los lados opuestos correspondientes (BC para ℓ , AC para m , AB para n).
- b) Sólo una de ellas corta al lado opuesto.

1.4. Teorema (de Ceva). Sea ABC un triángulo y consideremos puntos L en la recta BC , M en la recta AC y N en la recta AB tales que las rectas AL , BM y CN son concurrentes en R . Entonces

$$\frac{BL}{LC} \frac{CM}{MA} \frac{AN}{NB} = 1, \tag{1}$$

si ningún numerador ni denominador es nulo.

- ✎ Los puntos de intersección no deben coincidir con ninguno de los vértices, pues en este caso algunos numeradores o denominadores serían 0.
- 👁 Llamamos ℓ a la recta AL , m a la recta BM y n a la recta CN . Por [1.3](#), hay dos configuraciones posibles (salvo permutaciones de letras) indicadas en la [figura 3](#). Damos las indicaciones para la configuración de la izquierda, dejando como ejercicio la demostración para la configuración de la derecha.

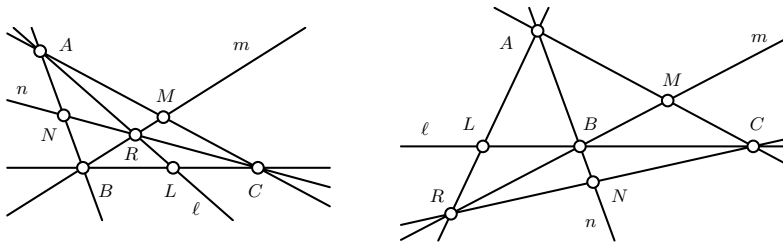


Figura 3: configuraciones para el teorema de Ceva.

Los triángulos BAL y LAC tienen igual altura desde A , y por lo tanto sus áreas están en la proporción de las bases:

$$\frac{\text{área}(BAL)}{\text{área}(LAC)} = \frac{BL}{LC}.$$

La misma proporción tienen los triángulos BRL y LRC :

$$\frac{\text{área}(BRL)}{\text{área}(LRC)} = \frac{BL}{LC},$$

de modo que podemos poner (ver el [ejercicio 2.2](#) en *aplicaciones del área*)

$$\frac{BL}{LC} = \frac{\text{área}(BAL) - \text{área}(BRC)}{\text{área}(LAC) - \text{área}(LRC)} = \frac{\text{área}(BAR)}{\text{área}(RAC)}.$$

Repitiendo para los vértices B y C ,

$$\frac{CM}{MA} = \frac{\text{área}(CBR)}{\text{área}(RBA)}, \quad \frac{AN}{NA} = \frac{\text{área}(ACR)}{\text{área}(RCB)},$$

y multiplicando,

$$\frac{BL}{LC} \frac{CM}{MA} \frac{AN}{NA} = \frac{\text{área}(ABR)}{\text{área}(ACR)} \frac{\text{área}(BCR)}{\text{área}(ABR)} \frac{\text{área}(ACR)}{\text{área}(BCR)} = 1.$$

Así como tres (o más) rectas pueden concurrir en un punto, es interesante estudiar el caso en que tres (o más) puntos están en una recta.

1.5. Definición. Decimos que tres o más puntos son *colineales* si están sobre una misma recta.

En el [lema 1.3](#) vimos que hay sólo dos configuraciones posibles para rectas concurrentes que pasan por los vértices de un triángulo. Para puntos colineales tenemos un resultado análogo que es esencialmente el «axioma de Pasch» ([teorema 2.8](#) en el apunte de axiomas):

1.6. Lema. *Dados un triángulo y una recta que no pasa por ninguno de sus vértices, sólo puede suceder una de las siguientes posibilidades:*

- La recta corta exactamente a dos de los lados.
- La recta no corta al triángulo.

1.7. Teorema (de Menelao). *Sea ABC un triángulo, y sean L en la recta BC , M en la recta AC y N en la recta AB tres puntos colineales ninguno de los cuales es vértice del triángulo.*

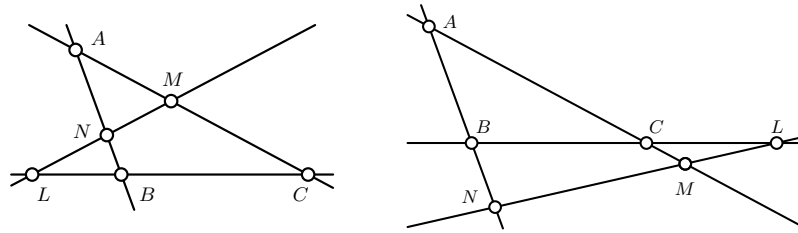


Figura 4: configuraciones para el teorema de Menelao.

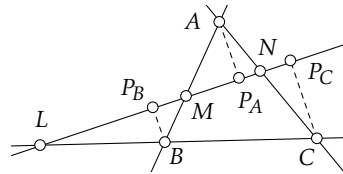


Figura 5: esquema en la demostración del teorema de Menelao.

Entonces

$$\frac{BL}{LC} \frac{CM}{MA} \frac{AN}{NB} = 1, \tag{2}$$

si ningún numerador ni denominador es nulo.

- ✎ El teorema lleva el nombre por Menelao de Alejandría (70–140).
- ✎ Las ecuaciones (1) en el teorema de Ceva y (2) en el de Menelao son las mismas. Para distinguir los resultados, muchos autores agregan un «signo» a las fracciones involucradas, quedando un «-1» en vez de «1» en el término derecho de (2).
- 🔗 Por el lema 1.6, hay dos configuraciones posibles (salvo permutaciones de letras) indicadas en la figura 4. Consideramos sólo la de la izquierda.

Sean P_A , P_B y P_C los pies de las perpendiculares a la recta LM por A , B y C respectivamente, como se indica en la figura 5. Los triángulos LP_BB y $LP_C C$ son semejantes pues son rectángulos en P_B y P_C y comparten el ángulo en L . Por lo tanto,

$$\frac{LB}{LC} = \frac{P_B B}{P_C C}.$$

Del mismo modo, ahora por ángulos opuestos en M , son similares los triángulos MP_{AA} y $MP_C C$, y análogamente los triángulos NP_{AA} y $NP_B B$. Entonces

$$\frac{MC}{MA} = \frac{P_C C}{P_A A}, \quad \frac{NA}{NB} = \frac{P_A A}{P_B B}.$$

Multiplicando las igualdades, obtenemos el resultado.

Tal vez más interesantes y útiles son las recíprocas de los teoremas de Ceva y Menelao: si cierta igualdad se satisface entonces hay rectas concurrentes o puntos alineados.

- ✎ Por ejemplo, usamos los recíprocos en los ejercicios 1.3 (medianas) y 1.4 (bisectrices).

Dado que en ambos teoremas se tiene la misma igualdad, es necesario agregar otras hipótesis.

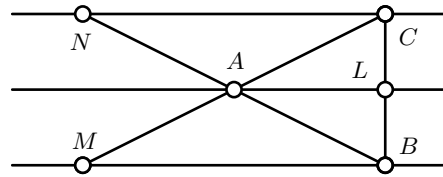


Figura 6: las rectas AL , BM y CN son paralelas en Ceva.

En realidad, las recíprocas no son ciertas en nuestro contexto. Consideremos por ejemplo la [figura 6](#), donde $MBCN$ es un rectángulo, A es la intersección de las diagonales MC y BN , y L es el punto medio de BC . Entonces

$$BL = LC, \quad CM = BN, \quad \text{y} \quad AM = AN,$$

por lo que vale la ecuación (1) (o la (2)). Sin embargo, ni las rectas AL , BM , CN son concurrentes, ni los puntos L , M y N son colineales.

En este caso las rectas AL , BM y CN son paralelas y se cortan en el «infinito». Para considerar las recíprocas, deberíamos incluir de alguna manera estos «puntos en el infinito», tema estudiado en la geometría proyectiva. En esa geometría, existe el concepto de «dualidad» y los teoremas de Ceva y Menelao son «duales», intercambiando rectas con puntos y concurrencia con colinealidad. Más aún, uno se puede obtener del otro, incluso sin apelar a la «geometría proyectiva».

1.8. Teorema (recíproco de los de Ceva y Menelao). Sea A, B, C un triángulo, y consideremos tres puntos L, M y N sobre las rectas BC, AC y AB (respectivamente) tales que

$$\frac{BL}{LC} \frac{CM}{MA} \frac{AN}{NB} = 1, \quad (3)$$

y ninguno de los numeradores o denominadores en (3) se anula.

Entonces:

- i) Si exactamente uno o tres de los puntos L, M y N están en los lados del triángulo, las rectas AL, BM y CN son concurrentes o son paralelas.
- ii) Si ninguno o exactamente dos de los puntos L, M y N están en los lados del triángulo, los puntos están alineados.

- ☞ Recordar que estamos suponiendo que ninguno de los puntos L, M y N coincide con los vértices.
- ☞ Muchos autores (e.g., Coxeter y Greitzer [1]) enuncian los teoremas de Ceva y Menelao incluyendo sus recíprocos.
- ☞ Tanto Coxeter y Greitzer [1] como Shively [2] presentan demostraciones incompletas de las recíprocas, al no justificar que ciertas rectas se intersecan. Por ejemplo, no consideran la configuración de la [figura 6](#), lo que parece ser bastante común en la bibliografía.

Seguiremos el ejemplo de ellos, ya que la presentación se simplifica bastante si suponemos que «todas las rectas se cortan» y «en los lugares correctos».

- ☞ Como ya mencionamos, vamos a considerar aquí sólo el caso «típico» (dejando los otros casos para los interesados) en el que la recta MN corta a la recta AC en Q , las rectas BM y CN se cortan en R , y la recta AR corta a la recta BC en S .

Usando 1.7 con los puntos alineados M , N y Q , y 1.4 para las rectas BM , CN y AS que son concurrentes en R , obtenemos

$$\frac{BQ}{QC} \frac{CM}{MA} \frac{AN}{NB} = \frac{BS}{QS} \frac{CM}{MA} \frac{AN}{NB} = 1,$$

que combinados con (3) dan

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{BS}{SC} = \frac{BL}{LC}.$$

Por 1.3 y 1.6 exactamente uno de Q y S está en el segmento BC , y no pueden ser iguales. Por el ejercicio 1.1 del apunte de *cuadriláteros*, debe ser $L = Q$ (y L , M y N están alineados) o $L = S$ (y las rectas AL , BM y CN se intersecan en R).

La mayoría de las veces en la práctica se usa el siguiente resultado:

1.9. Corolario. Con las notaciones de *teorema 1.8*, si se satisface la *ecuación (3)* y los puntos L , M y N no están alineados, entonces las rectas AL , BM y CN son concurrentes o paralelas.

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Con las notaciones de 1.4, supongamos que las rectas AL , BM y CN son paralelas. Entonces sólo una de esas rectas corta al lado correspondiente (BC , AC o AB respectivamente) y sigue valiendo la *ecuación (1)*.

✍ El ejercicio muestra que el enunciado del *teorema de Ceva* que dimos no es una caracterización completa, lo que luego se refleja en el recíproco (*teorema 1.8*).

Ejercicio 1.2. Completar las demostraciones de 1.4 y 1.7 para las otras configuraciones.

En los ejercicios 1.3 a 1.5, usar las ideas de los teoremas de Ceva y Menelao o sus recíprocos (recordando el *corolario 1.9*), aún cuando hayamos visto estos resultados con otras demostraciones.

Ejercicio 1.3.

- Las medianas de un triángulo se encuentran en un punto.
- Las medianas de un triángulo lo dividen en seis triángulos de igual área.
- Usando el inciso anterior, ver que las medianas de un triángulo se dividen una a otra en razón 2 : 1.
- Si L , M y N son los puntos medios de los lados BC , AC y AB (respectivamente), las medianas del triángulo LMN están contenidas en las medianas del triángulo ABC .

Ejercicio 1.4. Usando que si AM es bisectriz del ángulo $\angle A$ en el triángulo ABC (con $M \in BC$), entonces $AB/BM = AC/CM$ (ver el *ejercicio 2.3* del apunte de *aplicaciones del área*), y de modo similar para las otras bisectrices, demostrar que las bisectrices se cortan en un punto.

Ejercicio 1.5. Sean L , M y N los pies de las alturas correspondientes a A , B y C (respectivamente) en el triángulo ABC .

- Los triángulos AMB y ANC son semejantes, y por lo tanto $AM/AN = AB/AC$.

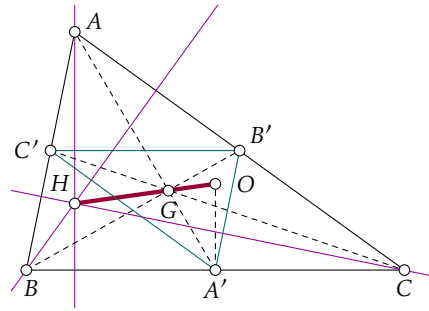


Figura 7: la recta de Euler contiene al segmento HO .

- b) Usando el inciso anterior (para todos los vértices) y el recíproco del teorema de Ceva, demostrar que las rectas que contienen a las alturas se cortan en un punto.

Ejercicio 1.6. Sean L , M y N los puntos medios de los lados AB , BC y AC (respectivamente) del triángulo ABC . Entonces:

- Las mediatrices del triángulo ABC son alturas del triángulo LMN .
- Las mediatrices del triángulo ABC se cortan en un punto.

2. Otros resultados clásicos

Acá mencionamos algunos resultados clásicos relacionados con los teoremas y ejercicios anteriores (ver por ejemplo Coxeter y Greitzer [1]).

2.1. Lema. *El ortocentro y el circuncentro de un triángulo coinciden si y sólo si el triángulo es equilátero.*

- ☞ Llamemos ABC al triángulo, y sea D el pie de la altura en A .

Supongamos que el ortocentro y el circuncentro coinciden. Siendo la recta AD paralela a la mediatriz de BC , D debe ser el punto medio de BC y $AB = AC$ (pues los triángulos ADB y ADC son iguales por LAL: rectángulos en D , $BD = DC$ y AD común). Tomando B en vez de A , podemos ver del mismo modo que $BC = BA$, y entonces $AB = AC = BC$.

Si el triángulo es equilátero, en particular es isósceles con $AB = AC$ y entonces la mediatriz de BC pasa por A y contiene a la altura AD (ver [teorema 4.9](#) del apunte de *axiomas*). Repitiendo para B , vemos que la altura en B está contenida en la mediatriz de AC , y por lo tanto las intersecciones de alturas y mediatrices coinciden.

2.2. Teorema (recta de Euler). *Sean H el ortocentro, G el baricentro y O el circuncentro de un triángulo. Entonces $HG = 2GO$ y si el triángulo no es equilátero $H * G * O$.*

- ☞ Cuando el triángulo no es equilátero, la recta que contiene H , G y O se llama *de Euler*.
- ☞ Supongamos que A' , B' y C' son los puntos medios de los lados BC , AC y AB (respectivamente) del triángulo ABC (ver [figura 7](#)).

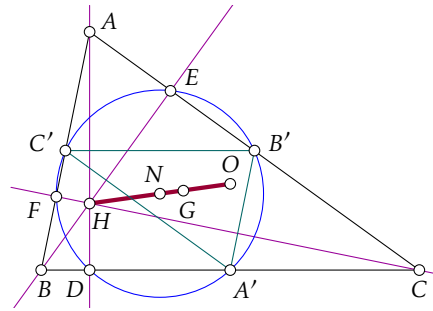


Figura 8: circunferencia de los nueve puntos (marcada en azul).

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes con razón de semejanza 2 (e.g., $AB = 2A'B'$). Más aún, las medianas del triángulo $A'B'C'$ están contenidas en las del ABC (ejercicio 1.3), de modo que estos triángulos comparten el baricentro (G).

Podemos transformar el triángulo ABC en el $A'B'C'$ haciendo primero una simetría central con centro G y luego una homotecia de razón $1/2$. Por el ejercicio 1.6, el ortocentro H de ABC se transforma en el ortocentro del triángulo $A'B'C'$ que es O . Entonces $H * G * O$ y $GH = 2GO$.

2.3. Teorema (circunferencia de los nueve puntos). Sea ABC un triángulo, y supongamos que A' , B' y C' son los puntos medios de los lados BC , AC y AB (respectivamente), y que D , E y F son los pies de las alturas correspondientes a los puntos A , B y C respectivamente.

Entonces:

- i) El circuncentro del triángulo $A'B'C'$ es el punto medio del segmento HO .
- ii) La circunferencia circunscrita al triángulo $A'B'C'$ también circunscribe al triángulo DEF , y tiene radio la mitad de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC .

✍ J. V. Poncelet (1788–1867) la llamó *circunferencia de los nueve puntos* pues también pasa por los puntos medios determinados por los vértices y el ortocentro H .

🔗 Nos orientamos con la figura 8.

Usando la transformación de semejanza del teorema 2.2, vemos que el punto O (circuncentro del triángulo ABC) se transforma en el punto N (circuncentro del triángulo $A'B'C'$), resultando $N * G * O$ y $GO = 2NG$. Puesto que $H * G * O$ y $HG = 2GO$ (por 2.2), tenemos $NO = (3/2)GO$ y $HN = HG - NG = 2OG - 1/2OG = (3/2)GO$, i.e., $NO = HN$.

Además, la circunferencia circunscrita al triángulo ABC , de radio r , por la semejanza se transforma en una circunferencia de radio $r/2$.

Finalmente, siendo N el punto medio de HO , su proyección sobre la recta BC es punto medio de DA' , y por lo tanto $DN = A'N$. De modo similar, $EN = B'N$ y $FN = C'N (= r/2)$.

2.4. Teorema (recta de Simson). Los pies de las perpendiculares desde un punto a los lados de un triángulo están alineados si y sólo si el punto está situado en la circunferencia circunscrita.

✍ Aunque es un teorema sobre colinealidad, no se usa el teorema de Menelao.

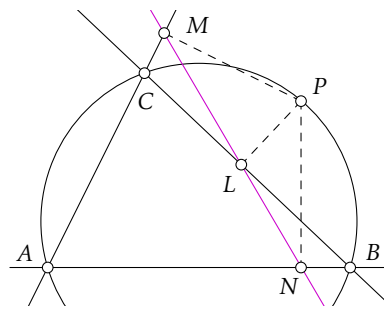


Figura 9: recta de Simson.

- ✍ Poncelet en *Traité des propriétés projectives des figures* de 1822 atribuye el resultado a R. Simson (1687–1768), aunque los historiadores sostienen que se debe a W. Wallace (1768–1843), quien lo publicó en 1799.
- 🗨 Sea P un punto cualquiera (que puede no estar en la circunferencia circunscrita), y llamemos L , M y N a las proyecciones sobre BC , AC y AB respectivamente (ver figura 9).

Como $\angle PMA = \angle PNA = 90^\circ$, los puntos A , P , M y N están en una circunferencia de diámetro PA , y de modo similar para B , P , L y N con la circunferencia de diámetro PB , y para C , P , L y M con la circunferencia de diámetro PC .

La idea de la demostración es usar igualdades entre ángulos inscritos, aunque exactamente qué ángulos y qué igualdades dependen de la posición relativa de los puntos (A , B , C y P). Acá seguimos la configuración en la figura 9 cuando P está en la circunferencia circunscrita.

Si P está en la circunferencia circunscrita, tenemos sucesivamente:

$$\begin{aligned}
 \angle PLN &= 180^\circ - \angle PBN && \text{usando la circunferencia de diámetro } PB, \\
 \angle PBN &= 180^\circ - \angle PCA && \text{usando la circunferencia circunscrita,} \quad (4) \\
 \angle PCA &= 180^\circ - \angle PCM && \text{pues } A * C * M, \\
 \angle PCM &= \angle PLM && \text{usando la circunferencia de diámetro } PC.
 \end{aligned}$$

Juntando estas igualdades obtenemos $\angle PLN + \angle PLM = 180^\circ$, i.e., $M * L * N$.

Para la recíproca (y otra vez dependiendo de las posiciones de A , B , C y P), revertimos los pasos llegando a la igualdad (4), de donde podemos deducir que P está en la circunferencia circunscrita del triángulo ABC (recordar el teorema 1.3 del apunte de cuadriláteros y el ejercicio 3.4 del apunte de circunferencia).

3. Bibliografía

- [1] H. S. M. COXETER Y S. L. GREITZER. *Retorno a la Geometría, La Tortuga de Aquiles n.º 1*. DLS-EULER editores, Madrid, 1993.
- [2] L. S. SHIVELY. *Introducción a la geometría moderna (2da. ed.)*. Compañía Editorial Continental S.A., México, 1966.