Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2010

Cónicas

La teoría para los temas de este apunte se encuentra en el capítulo 6 (pág. 111) del libro de Vasíliev y Gutenmájer [2], y nos limitamos a dar pocas definiciones y resultados básicos. Una buena parte de los ejercicios están tomados del mismo libro.

✎ Además del material en libro de Coxeter y Greitzer [1], otras propiedades de la parábola pueden encontrarse en *Apuntes sobre la parábola: su medición según Arquímedes y otras propiedades*.

1. Propiedades básicas

1.1. Definición (de parábola). Dados una recta d y un punto F, $F \notin d$, la *parábola* asociada es el conjunto $\{P : FP = \operatorname{dist}(P,d)\}$.

- d es la *directriz* y F es el *foco* de la parábola.
- La recta e perpendicular a d por F es el *eje* de la parábola.
- El *interior* de la parábola es el conjunto $\{P : FP < \operatorname{dist}(P,d)\}$, y el *exterior* el conjunto $\{P : FP > \operatorname{dist}(P,d)\}$.

1.2. Definición (de elipse). Dados dos puntos F_1 y F_2 y un número $d > F_1F_2$, la *elipse* asociada es el conjunto $\{P : PF_1 + PF_2 = d\}$.

- F_1 y F_2 son los *focos* de la elipse, y el punto medio de F_1F_2, indicado por O, es el *centro*.
- El *interior* de la elipse es el conjunto $\{P : PF_1 + PF_2 < \operatorname{dist}(P,d)\}$, y el *exterior* el conjunto $\{P : PF_1 + PF_2 > \operatorname{dist}(P,d)\}$.

✎ Si $d = F_1F_2$, el conjunto $\{P : PF_1 + PF_2 = d\}$ es un segmento, mientras que si $d < F_1F_2$, el conjunto es vacío. Cuando $F_1 = F_2$, la elipse es una circunferencia de centro F_1 y radio d.

1.3. Definición (de hipérbola). Dados dos puntos F_1 y F_2 y un número d, $0 < d < F_1F_2$, la *hipérbola* asociada es el conjunto $\{P : |PF_1 - PF_2| = d\}$.

- F_1 y F_2 son los *focos* de la hipérbola, y el punto medio de F_1F_2, indicado por O, es el *centro*.
- La hipérbola tiene dos *ramas*: $\{P : PF_1 - PF_2 = d\}$ y $\{P : PF_2 - PF_1 = d\}$.

✎ Como $F_1F_2 > d > 0$, debe ser $F_1 \neq F_2$.

✎ Si $d = F_1F_2 > 0$, el conjunto $\{P : |PF_1 - PF_2| = d\}$ es la recta F_1F_2 menos el segmento F_1F_2, si $d > F_1F_2$ el conjunto es vacío, si $d = F_1F_2 = 0$ el conjunto es todo el plano, y si $d = 0 < F_1F_2$ el conjunto es la mediatriz del segmento F_1F_2.

1.4. Propiedad (ecuaciones características de las cónicas).

a) *Si* $\operatorname{dist}(F, d) = 2h$ *y elegimos los ejes coordenados de modo que el eje x sea paralelo a d y equidiste de F y d, y el eje y pase por F, la parábola de foco F y directriz d tiene como ecuación*

$$y = ax^2, \quad \text{donde } a = \frac{1}{4h}.$$

b) *Consideremos* $F_1 \neq F_2$*, pongamos* $c = F_1F_2/2$*,* $a = d/2$*, y elijamos los ejes coordenados de modo que el eje x sea la recta* F_1F_2*, y el origen sea O (el punto medio de* F_1F_2*).*

Entonces:

- *La elipse de focos* F_1 *y* F_2 *y distancia d tiene ecuación*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{donde } b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

- *La hipérbola de focos* F_1 *y* F_2 *y distancia d tiene ecuación*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{donde } b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

2. Ejercicios

Ejercicio 2.1 (simetrías de las cónicas).

a) Una parábola es simétrica respecto de su eje.

b) Una elipse de focos F_1 y F_2, $F_1 \neq F_2$, es simétrica respecto de la recta F_1F_2, de la mediatriz F_1F_2, y de la intersección de estas dos rectas (el *centro* de la elipse).

c) Repetir el inciso anterior para el caso de la hipérbola.

Ejercicio 2.2. Consideremos un punto P en la parábola de foco F y directriz d.

a) Si P' es el pie de la perpendicular a d por P, entonces la mediatriz m de FP' corta a la parábola en un único punto, y el interior de la parábola está en un semiplano respecto de m.

✎ Decimos que m es la *tangente* a la parábola por P.

b) Las semirrectas PF y PP' forman ángulos iguales con las semirrectas de m.

✎ Esto es la propiedad focal de la parábola: un rayo que parte del foco rebota en la parábola en un dirección paralela al eje.

Ejercicio 2.3. Sean A y B dos puntos en un mismo semiplano respecto de la recta ℓ. Encontrar un punto $P \in \ell$ tal que la distancia $AP + PB$ sea mínima.

Ejercicio 2.4. Sean F_1 y F_2 dos puntos y $d > F_1F_2$.

a) Ver que dado un punto Q en la circunferencia de centro F_1 y radio d, el punto P en la intersección de la recta F_1Q con la mediatriz m de F_2Q es un punto en la elipse de focos F_1 y F_2 y distancia d. Recíprocamente, todo punto P de la elipse puede obtenerse a partir de un punto Q en la manera descripta.

b) Ver que la mediatriz m del inciso anterior corta a la elipse únicamente en el punto P, dejando al interior de la elipse en un semiplano.

✎ m es la *tangente* a la elipse por P.

c) Con las notaciones anteriores, los ángulos formados por las semirrectas PF_1 y PF_2 con semirrectas opuestas de m son iguales.

✎ Esto es la propiedad focal de la elipse: un rayo que parte de un foco rebota en la elipse en dirección hacia el otro foco.

Ejercicio 2.5.

a) Sean ℓ una recta y A y B dos puntos a diferentes lados de ℓ, y tales que $\mathrm{dist}(A,\ell) > \mathrm{dist}(B,\ell)$. Encontrar un punto $P \in \ell$ tal que la diferencia de las distancias $AP - BP$ sea máxima.

b) Dados los puntos F_1 y F_2 y el número d, $0 < d < F_1F_2$, ver que dado un punto Q en la circunferencia de centro F_1 y radio d, el punto P en la intersección de la recta F_1Q con la mediatriz m de F_2Q es un punto en la hipérbola de focos F_1 y F_2 y distancia d. Recíprocamente, todo punto P de la hipérbola puede obtenerse a partir de un punto Q en la manera descripta.

c) Ver que la mediatriz m del inciso anterior corta a la hipérbola únicamente en el punto P.

✎ m es la *tangente* a la hipérbola por P.

d) Las semirrectas PF_1 y PF_2 forman ángulos iguales con una semirrecta de m.

✎ Esto es la propiedad focal de la hipérbola: un rayo que parte de un foco rebota en la hipérbola alejándose del otro foco en dirección opuesta.

Ejercicio 2.6. Dada una parábola de foco F y directriz d:

a) Si P es exterior a la parábola, construir (con regla y compás) las tangentes a la parábola por P.

✎ Se puede ver que si A y B son los puntos de tangencia, y A', B' y P' son las proyecciones de A, B y P en d (respectivamente), entonces P' es el punto medio del segmento $A'B'$.

b) Dada una recta r, construir una recta r' tangente a la parábola y tal que $r' \parallel r$.

✎ Como en a *a*), se puede ver que si A y B son las intersecciones de r (o una recta paralela a r) y la parábola, C es donde la tangente es paralela a r, y A', B' y C' son las proyecciones de A, B y C en d (respectivamente), entonces C' es el punto medio del segmento $A'B'$.

c) Encontrar el lugar geométrico de los puntos tales que la parábola se ve en ángulo recto (i.e., las tangentes a la parábola por el punto se cortan a 90°). *Sugerencia*: Si P es un punto exterior, A y B son puntos de tangencia y A', B' y P' son las proyecciones de A, B y P en d, comparar los ángulos $\angle A'PA$, $\angle FPA$, $\angle B'PB$ y $\angle B'PF$.

Ejercicio 2.7. Supongamos que dos móviles, A y B, en el interior de la parábola de foco F y directriz d se acercan hacia ésta en dirección paralela al eje de la parábola, y supongamos que ambos rebotarán al llegar a la parábola dirigiéndose hacia F. Ver que si ambos se mueven a la misma velocidad constante y están inicialmente a la misma distancia de d, llegan juntos a F. *Sugerencia*: *distancia* = *velocidad* × *tiempo*.

Ejercicio 2.8. Construir (con regla y compás) el foco de una parábola dados la directriz y dos puntos en la parábola. ¿Cuántas soluciones hay?

Ejercicio 2.9. Sean A y B dos puntos del plano, y $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Encontrar el lugar geométrico de los puntos M tales que el perímetro del triángulo AMB es

a) igual a p,

b) menor que p.

Ejercicio 2.10. Sea T un punto en el segmento AB. Encontrar el lugar geométrico de los puntos M tales que la circunferencia inscripta del triángulo AMB es tangente a AB en T. *Sugerencia*: comparar $MA - MB$ con $TA - TB$.

Ejercicio 2.11. En una articulación quebrada cerrada $ABCD$, para la cual $AD = BC = a$ y $AB = CD = b$, el elemento AD está fijo. Encontrar el lugar geométrico de puntos de intersección de las rectas AB y CD cuando *a*) $a < b$, *b*) $b < a$.

Ejercicio 2.12. Consideremos una elipse de focos A y B.

a) Demostrar que el conjunto de puntos simétricos al foco A respecto a todas las tangentes a la elipse es una circunferencia.

b) Demostrar que el conjunto de pies de las perpendiculares por A a las tangentes a la elipse es una circunferencia.

c) Repetir los incisos anteriores para el caso de la hipérbola.

Ejercicio 2.13. Supongamos una elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

✎ Es útil usar un software de geometría dinámica para visualizar los resultados del ejercicio.

a) Si (x', y') es un punto de la elipse, entonces la recta

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$$

corta a la elipse únicamente en (x', y'). *Sugerencia*: ver que la recta corta a la elipse en un único punto, calculando $(x - x')^2/a^2 + (y - y')^2/b^2$ para (x, y) en la intersección de la elipse y la recta.

b) Sea $P = (p_1, p_2)$ un punto exterior de la elipse, y pongamos

$$d = \frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} \quad (d > 1 \text{ pues } P \text{ es exterior}).$$

Entonces, las tangentes por P a la elipse tienen ecuaciones

$$\frac{xx_i}{a^2} + \frac{yy_i}{b^2} = 1 \quad \text{para } i = 1, 2,$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son las intersecciones de las tangentes y la elipse y están dados por

$$x_1 = \frac{p_1}{d} + \frac{ap_2}{bd}\sqrt{d-1}, \quad y_1 = \frac{p_2}{d} - \frac{bp_1}{ad}\sqrt{d-1},$$
$$x_2 = \frac{p_1}{d} - \frac{ap_2}{bd}\sqrt{d-1}, \quad y_2 = \frac{p_2}{d} + \frac{bp_1}{ad}\sqrt{d-1}.$$

c) $(x_1 - p_1)(x_2 - p_1) + (y_1 - p_2)(y_2 - p_2) = \dfrac{d-1}{d}(p_1^2 + p_2^2 - a^2 - b^2).$

d) La elipse se ve desde P a 90° si y sólo si P está en la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Ejercicio 2.14. Sea $k \in \mathbb{R}$, $0 < k$.

a) El lugar geométrico de los puntos tales que el cociente entre su distancia a un punto fijo (el foco) y su distancia a una recta fija (la directriz) es k es una elipse si $k < 1$, o una hipérbola si $k > 1$.

✎ Si $k = 1$ es una parábola, por definición.

✎ Autores como Coxeter y Greitzer [1] definen las cónicas de esta forma.

b) En una elipse o hipérbola de focos F_1 y F_2, y distancia característica d, la *excentricidad* es el cociente F_1F_2/d. Ver que en el inciso anterior cuando $0 < k < 1$ o $k > 1$, k coincide con la excentricidad.

✎ La circunferencia tiene excentricidad 0, pero la definición en *a*) no tiene sentido.

Ejercicio 2.15 (el gatito en la escalera II). Recordando el gatito en la escalera del ejercicio 3.6 en el apunte de *circunferencia*, ¿qué curva recorre el gatito si está sentado en un punto que no es el punto medio de la escalera?

3. Bibliografía

[1] H. S. M. Coxeter y S. L. Greitzer. *Retorno a la Geometría, La Tortuga de Aquiles n.º 1*. DLS-EULER editores, Madrid, 1993.

[2] N. B. Vasíliev y V. L. Gutenmájer. *Rectas y curvas*. MIR, Moscú, 1980.