Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2010

Construcciones y lugares geométricos

1. Introducción 1

2. Construcciones y lugares geométricos 4

2.1. Ejercicios 5

1. Introducción

Los axiomas establecen relaciones entre ciertos objetos, dando propiedades de existencia o unicidad, por ejemplo que dados dos puntos distintos existe una única recta que los contiene. Hasta ahora nos hemos preocupado por deducir lógicamente otras relaciones y propiedades a partir de los axiomas, tales como que dados un punto y una recta existe una única perpendicular a la recta que contiene al punto.

Los problemas de existencia y unicidad son centrales a toda la matemática, pero cuando queremos usar los resultados en la práctica necesitamos determinar efectivamente los objetos, o al menos aproximaciones a ellos. Para muchos objetos es posible dar una serie de pasos a seguir, o *algoritmo*.

Por ejemplo, supongamos que tenemos un rectángulo de lados a y b y queremos encontrar un cuadrado de igual área. El problema es equivalente a encontrar $\sqrt{ab}$.

Usando propiedades de los números reales, es posible demostrar que existe un único $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$, tal que $\ell = \sqrt{ab}$. En algunos casos particulares, como $a = 1$ y $b = 4$, es posible encontrar rápidamente ℓ, pero en general esto no es así como en el caso $a = 1$ y $b = 2$, y necesitamos algún procedimiento que nos permita calcular $\sqrt{ab}$ ya sea exactamente o al menos dentro de un error permitido.

La geometría viene de problemas prácticos y no sorprende que ya en los primeros resultados de *Los Elementos*, Euclides se preocupara por estos procedimientos o *construcciones con regla y compás*, mediante los cuales obtenemos efectivamente ciertos objetos a partir de objetos iniciales o auxiliares.

Como si se tratara de un juego en el cual sólo podemos hacer ciertos movimientos, en las construcciones sólo se permiten algunos objetos iniciales, sólo ciertos pasos son permitidos, y debemos llegar al objetivo en un número finito de pasos.

Los objetos iniciales pueden ser puntos, rectas (y derivados como semirrectas, segmentos y semiplanos) o circunferencias. También podemos considerar puntos arbitrarios en una recta (semirrecta, segmento, semiplano) o en la circunferencia.

Contamos con dos instrumentos, la regla no graduada y el compás, que nos permiten construir a partir de dos puntos una recta o una circunferencia respectivamente.

Podemos usar el compás también para *transportar* longitudes: dado un segmento, podemos construir una circunferencia con centro en cualquier punto y con radio igual a la longitud del segmento.

✎ En realidad, el *compás de Euclides* permite trazar una circunferencia dados un centro y un punto sobre la circunferencia, pero al levantarlo el compás «se cierra», es decir no permite transportar longitudes directamente. En cambio el *compás moderno* permite transportar longitudes pues conserva su apertura al levantarlo del papel.

Se puede demostrar que con el compás de Euclides podemos transportar longitudes (haciendo más pasos que con el compás moderno), de modo que —para simplificar— supondremos que podemos usar un compás moderno.

Finalmente, dadas dos rectas, o una recta y una circunferencia, o dos circunferencias, podemos determinar los puntos de intersección.

✎ Para otras curvas no siempre es posible construir con sólo regla y compás la intersección o construir la curva, aunque a veces se pueda construir individualmente cada punto en ella.

Un poco caprichosamente, no podemos medir segmentos ni ángulos, de modo que no se pueden usar instrumentos de medición (como la regla graduada o el transportador), ni otras herramientas como escuadras.

Resumiendo, cada paso puede consistir en: 1) construir una recta (semirrecta, segmento) o circunferencia con regla o compás a partir de los objetos existentes; 2) construir los puntos de intersección de rectas o circunferencias; y 3) construir un punto arbitrario (no sujeto a otras restricciones) en una recta (semirrecta, segmento, semiplano) o circunferencia.

Volviendo a nuestro ejemplo inicial, como veremos más adelante es posible construir (con regla y compás) un segmento de longitud $\sqrt{ab}$ dados a y b.

✎ En la proposición 14 del Libro II de Los Elementos, Euclides realiza esta construcción para figuras poligonales generales.

Con los métodos y tecnologías que disponemos actualmente muchas de las construcciones geométricas han perdido el interés práctico: basta apretar un par de botones de la calculadora para obtener una buena aproximación de $\sqrt{ab}$ una vez ingresados a y b.

No todo es historia antigua, ya que la construcción de Euclides del máximo común divisor entre dos números[1] se sigue usando sin mayores modificaciones en cosas tan sofisticadas como transacciones seguras de internet.

Las construcciones geométricas también tienen interés teórico, y han dado lugar al desarrollo de muchas áreas de las matemáticas. Por ejemplo, la imposibilidad de ciertas construcciones como la «cuadratura del círculo», la «duplicación del cubo» y la «trisección del ángulo» encajan dentro de la profunda *teoría de Galois*.[2]

Veamos una breve descripción de estos problemas.

---

1 Proposiciones 1 y 2 del Libro VII.

2 Por E. Galois (1811–1832), quien murió a los 21 años. Sus trabajos se publicaron en 1846.

Cuadratura del círculo: construir con regla y compás un cuadrado que tenga igual área que un círculo dado. El problema es equivalente a dado un segmento de longitud r, construir un segmento de longitud $\sqrt{\pi}\, r$ (que sabemos que existe).

En 1882 F. von Lindemann demostró que π y por lo tanto $\sqrt{\pi}$ es *trascendente* y entonces tal construcción es imposible.

Duplicación del cubo: en tres dimensiones, construir un cubo que duplique en volumen a otro dado. El problema es equivalente a dado un segmento de longitud ℓ construir otro de longitud $\sqrt[3]{2}\,\ell$.

Según la leyenda, el «oráculo de Delfos» planteó este problema a los atenienses durante la plaga que asoló Atenas en 420 a.C..

Trisección del ángulo: dado el ángulo α, construir el ángulo $\alpha/3$.

Tanto este problema como el de duplicación del cubo se reducen a ecuaciones polinómicas de grado 3. P. Wantzel demostró en 1837 que ambas construcciones (con regla y compás) son imposibles.

Hay muchas variaciones sobre las construcciones con regla y compás.

L. Mascheroni (1750–1800) demostró en 1797 que se puede eliminar la regla dejando sólo el compás (de Euclides), claro que las construcciones se hacen mucho más complicadas y se debe interpretar que «construir una recta» o segmento se limita a dar dos puntos distintos.

También tenemos el *compás oxidado*, donde el compás tiene una abertura fija, y construcciones con sólo regla (hablaremos sobre algunas de ellas más adelante en el curso). En particular, según el teorema de Poncelet y Steiner (1833) basta con conocer una (única) circunferencia y su centro para que cualquier construcción con regla y compás pueda hacerse también con regla solamente.

Otras variantes permiten el uso de otras herramientas, algunas tan sencillas como una regla marcada, o curvas alternativas a la circunferencia. Con muchas de estas variantes la trisección del ángulo (por ejemplo) se hace posible.

Una herramienta particularmente intrigante es el *origami* (en japónes, «plegado de papel»), proveniente del arte tradicional japonés originado hacia el siglo VI. Usando las reglas (o axiomas) de H. Huzita (1924–2005), con el origami se pueden resolver ecuaciones polinómicas hasta de grado 3, lo que en particular implica la construcción (con origami) de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo.

Para concluir, y para mostrar la interconexión entre distintas áreas de la matemática, mencionamos que otro problema de la antigüedad es el de construir (con regla y compás) un n-ágono regular de lado dado, donde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

C. F. Gauss (1777–1855) probó que se puede construir para $n = 17$ cuando tenía 19 años, y cinco años más tarde obtuvo como condición suficiente que n sea de la forma $2^k p_1 \dots p_r$, donde los p_i son distintos *primos de Fermat* es decir de la forma $2^{2^k} + 1$ con $k \in \mathbb{N}$. En su trabajo de 1837, Wantzel también demostró que la condición es necesaria. En contrapartida, J. Pierpont (1866–1938) en 1895 demostró que con el origami se pueden construir los polígonos cuando n es de la forma $2^u 3^v p_1 \dots p_r$, donde los primos p_i son ahora de la forma $2^u 3^v + 1$, con u, v enteros no negativos.

✎ Los primos de la forma $2^u 3^v + 1$ se llaman de Pierpont en su honor. Si $v = 0$, se puede demostrar que un primo de Pierpont es primo de Fermat.

Sólo se conocen 5 primos de Fermat (los primeros son $3, 5, 17, 257$), y se sospecha que hay sólo finitos primos de Fermat pero infinitos primos de Pierpont.

2. Construcciones y lugares geométricos

De aquí en más entenderemos que *construcción* se refiere a una *con regla y compás*.

Seguimos la sección 7 del libro de Pogorélov [1], agregando algunos resultados de §8. Nos limitamos a repetir los enunciados, a veces con algún comentario, pero omitiendo las demostraciones (que están en el libro).

La mayor novedad respecto a la presentación de Pogorélov es el concepto de *cruz de bisectrices* siguiendo al libro de Vasíliev y Gutenmájer [2, pág. 38].

2.1. Problema (7.1 en [1]). *Dados los segmentos a, b, c, construir un triángulo con esos lados.*

✎ *Como sabemos, el problema no siempre tiene solución, ya que deben satisfacerse las relaciones*

$$a + b > c, \quad b + c > a \quad y \quad c + a > b.$$

2.2. Problema (7.2 en [1]). *Dados un ángulo $\angle ABC$, una semirrecta OD y un semiplano correspondiente a la recta OD, construir E en ese semiplano tal que $\angle ABC = \angle EOD$.*

2.3. Problema (7.3 en [1]). *Dado un ángulo $\angle ABC$, construir E tal que la semirrecta BE es bisectriz del ángulo.*

2.4. Proposición. *Si las rectas a y b, $a \neq b$, se cortan en el punto O determinando las semirrectas a', a'', b', b'', los ángulos $\angle a'b'$, $\angle b'a''$, $\angle a''b''$ y $\angle b''a'$ con respectivas bisectrices c, c', c'', c'', entonces*

i) *c y c'' son semirrectas complementarias, así como lo son c' y c'''.*

ii) *Las rectas ℓ y ℓ' que contienen respectivamente a c y c'', y c' y c''', son perpendiculares.*

2.5. Definición. La figura formada por las rectas ℓ y ℓ' de la proposición anterior se llama *cruz de bisectrices* de las rectas a y b.

2.6. Problema (7.4 en [1]). *Dado el segmento AB, encontrar M en el segmento tal que $AM = MB$, i.e., encontrar el punto medio del segmento.*

2.7. Problema (7.5 en [1]). *Dados el punto A y la recta ℓ, trazar por A una perpendicular a ℓ cuando*

a) $A \in \ell$,

b) $A \notin \ell$.

✎ *Una vez resuelto este problema, el uso de la escuadra (no graduada) está permitido, como forma de simplificar los pasos.*

2.8. Problema. *Trazar por un punto B una recta paralela a la recta a (se supone $B \notin a$).*

✎ Es el problema 8.7 en Pogorélov [1], pero no es necesario usar el axioma de las paralelas.

2.9. Definición. Un *lugar geométrico* de puntos es el conjunto de puntos que satisface determinada propiedad.

✎ Por ejemplo, por su misma definición, la circunferencia de centro O y radio r es el *lugar geométrico de los puntos cuya distancia a O es r*.

✎ Como un lugar geométrico es un conjunto, digamos A, demostrar que coincide con otro conjunto B requiere de demostrar dos implicaciones: $x \in A \Rightarrow x \in B$ y $x \in B \Rightarrow x \in A$. ✂

2.10. Definición. La *mediatriz* de un segmento AB es la recta perpendicular a la recta por A y B que pasa por el punto medio del segmento. ✂

2.11. Teorema (7.6 en [1]). *La mediatriz del segmento AB es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A y B.*

2.12. Teorema. *Las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un único punto.*

2.13. Definición. Dado el triángulo ABC, se llama *circunferencia circunscripta* del triángulo a una circunferencia que pasa por los vértices A, B, C.

También decimos que el triángulo está *inscripto* en la circunferencia.

✎ Así como se puede decir «septiembre» o «setiembre», se puede decir «circunscripta» o «circunscrita». La segunda acepción es más moderna, pero acá usaremos casi siempre la primera. ✂

2.14. Teorema.

a) *Si c es una circunferencia circunscripta al triángulo ABC, y O es su centro, entonces O es el punto de intersección en el teorema 2.12, llamado* circuncentro *del triángulo.*

b) *Todo triángulo tiene una única circunferencia circunscripta.*

   ✎ *En cambio, un segmento tiene varias.*

c) *Dados tres puntos no alineados, hay una única circunferencia que los contiene. En particular, una circunferencia queda determinada por tres de sus puntos.*

2.15. Problema (7.7 en [1]). *Dados tres puntos no alineados, construir una circunferencia que pase por ellos.*

2.16. Problema (7.8 en [1]). *Dada una recta a, dos puntos $A \in a$ y $B \notin a$, y una longitud m, construir un punto X en a tal que $XA + XB = m$.*

✎ *Se supone $AB < m$, en otro caso la construcción es imposible.*

✎ *Si A y B son los focos de una elipse (tema que veremos más adelante), se pide encontrar una de las intersecciones de la elipse con una recta que pasa por un foco, encontrando de paso la tangente correspondiente.*

2.17. Problema (8.6 en [1]). *Encontrar el lugar geométrico de los puntos que pertenecen a un mismo semiplano respecto de una recta a y que equidistan de esa recta.*

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.1.

a) Construir un segmento igual a la suma de dos segmentos dados.

b) Ídem con la diferencia (el mayor menos el menor).

Ejercicio 2.2. Construir un segmento que mida 1/4 la longitud de otro dado.

Ejercicio 2.3. Construir la suma (resp. diferencia) de dos ángulos dados.

Ejercicio 2.4. Construir un ángulo que mida 1/4 lo que otro dado.

Ejercicio 2.5.

a) Dados dos puntos en el plano, encontrar dos circunferencias distintas que los contengan.

✎ Atención que es «circunferencia» y no «círculo».

b) Dar cuatro puntos en el plano tales que ninguna circunferencia los contiene a todos.

Ejercicio 2.6. Construir en cada caso un triángulo ABC con las condiciones dadas:

a) $\angle A$ y lados AB y AC.
b) $\angle A$ y lados AB y BC.
c) $\angle A$, $\angle B$ y lado AB.
d) Lados AB, BC y mediana relativa a AB.
e) Lados AB, BC y altura desde A.

Indicar, en cada uno de los casos anteriores, si:

i) la construcción siempre es posible, o hay que imponer restricciones a las condiciones para la existencia de un tal triángulo,
ii) hay un único triángulo posible, i.e., si dos triángulos que satisfacen las mismas condiciones deben ser iguales.

Ejercicio 2.7. Demostrar la proposición 2.4.

Ejercicio 2.8. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas secantes es la cruz de bisectrices de las rectas (con el punto de intersección incluido).

Ejercicio 2.9. Dado el triángulo ABC, construir una recta ℓ por A tal que $\operatorname{dist}(B,\ell) = \operatorname{dist}(C,\ell)$. ¿Cuántas soluciones hay? *Sugerencia*: considerar los casos en que B y C están en un mismo semiplano respecto de ℓ o en distintos.

Ejercicio 2.10. Dividir el segmento AB en un número entero n de partes iguales.

Referencias

[1] A. V. Pogorélov. *Geometría elemental*. MIR, Moscú, 1974.

[2] N. B. Vasíliev y V. L. Gutenmájer. *Rectas y curvas*. MIR, Moscú, 1980.