Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2010

Cuadriláteros

Este apunte no tiene mayores variantes respecto a la presentación de Pogorélov [1], y ponemos indicaciones de las demostraciones sólo si hay variantes respecto de la presentación de ese libro. En clase omitiremos mucho de este material, dejándolo a cargo de los alumnos.

1. Cuadriláteros

1.1. Definición. Dados cuatro puntos A, B, C, D tales que no hay tres de ellos sobre una misma recta, la figura formada por ellos y los segmentos AB, BC, CD y AD se llama *cuadrilátero*, y se denota por $ABCD$.

- Los puntos A, B, C, D son los *vértices*, los segmentos AB, BC, CD y AD son los *lados*, y los ángulos $\angle B = \angle ABC$, $\angle C = \angle BCD$, $\angle D = \angle CDA$, $\angle A = \angle DAC$ son los *ángulos* del cuadrilátero.
- Los vértices A y C y los vértices B y D se dicen *opuestos*, así como los lados AB y CD, y los lados BC y AD .
- El cuadrilátero $ABCD$ es *convexo* si se encuentra en un mismo semiplano respecto de la recta que contiene a cualquiera de sus lados.

  ✎ En cursos más avanzados se define un conjunto como *convexo* si para cualquier par de puntos en él, el segmento que los une está también contenido en el conjunto. Para cuadriláteros, esto requeriría pedir que la figura fuera «llena», cosa que no se supone aquí.

  Observar que con esta otra definición de «convexo» el axioma II.3 establece que cada semiplano es convexo y que el plano sin una recta no lo es.
- Los segmentos que unen los vértices opuestos del cuadrilátero se llaman *diagonales*. ✄

1.2. Teorema (9.1 en Pogorélov [1]). *Las diagonales de un cuadrilátero convexo se cortan.*

1.3. Teorema (9.2 en Pogorélov [1]). *La suma de los ángulos de un cuadrilátero convexo es* $360°$.

1.4. Definición. Un *paralelogramo* es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos, i.e., se encuentran en rectas paralelas. ✂

1.5. Lema. *Un paralelogramo es un cuadrilátero convexo.*

❦ Sea $ABCD$ el paralelogramo. De $BC \parallel AD$ resulta que B y C están en un mismo semiplano respecto de recta AD, y lo mismo para los otros lados.

1.6. Teorema (9.3 y 9.4 en Pogorélov [1]). *En un paralelogramo,*

a) los lados opuestos son iguales,

b) los ángulos opuestos son iguales,

c) las diagonales se cortan en el punto medio de ambas.

1.7. Teorema (9.5 en Pogorélov [1], con agregados). *Si un cuadrilátero convexo satisface alguna de las condiciones:*

a) tiene dos lados opuestos paralelos e iguales, o

b) los lados opuestos son iguales, o

c) los ángulos opuestos son iguales, o

d) las diagonales se cortan en sus puntos medios,

entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

❦ Agregamos *c)* respecto de Pogorélov. Los otros incisos se demuestran como los correspondientes en 1.6, pero a partir de la igualdad de los triángulos (usando LAL) se deduce que la suma de alternos internos es 180° y por lo tanto los lados son paralelos (por 4.12 en el apunte de axiomas).

Para *c)*, si $ABCD$ es el cuadrilátero convexo, comparamos los triángulos ABD y CDB. Pongamos

$$\begin{gathered} \alpha = \angle ABD, \quad \beta = \angle BDA, \quad \gamma = \angle DAB, \\ \alpha' = \angle CDB, \quad \beta' = \angle DBC, \quad \gamma' = \angle BCD, \end{gathered}$$

y queremos ver que $\alpha = \alpha'$. Como se trata de triángulos, $\alpha+\beta+\gamma = \alpha'+\beta'+\gamma' = 180°$, y como la hipótesis es $\gamma = \gamma'$ y $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$, resulta

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' \quad \text{y} \quad \alpha + \beta' = \alpha' + \beta,$$

de donde $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$.

1.8. Definición. Un *rectángulo* es un cuadrilátero con todos sus ángulos rectos. ✂

1.9. Teorema (9.6 en Pogorélov [1]). *Si $ABCD$ es un rectángulo, entonces*

a) es un paralelogramo,

b) sus diagonales son iguales.

1.10. Definición. Un *rombo* es un paralelogramo con todos sus lados iguales. ✂

1.11. Teorema (9.7 en Pogorélov [1]). *Las diagonales del rombo se cortan en ángulo recto, y son bisectrices de sus ángulos.*

1.12. Definición. Un rectángulo con todos sus lados iguales se llama *cuadrado*.

✎ El cuadrado también es un rombo. ✂

1.13. Teorema (9.8 en Pogorélov [1]). *Supongamos que tres rectas a, b, c son paralelas y cortan a las rectas d y d' en los puntos A, B, C y A', B', C' respectivamente. Si B está entre A y C, entonces B' está entre A' y C'. Además, si $AB = BC$, entonces también $A'B' = B'C'$.*

✎ Esta es una primera versión del teorema de Tales (que veremos más adelante), que establece $AB/BC = A'B'/B'C'$. Aquí es el caso particular $AB = BC$, pero permite establecer el teorema de Tales cuando AB/BC es racional.

1.14. Definición. Un *trapecio* es un cuadrilátero convexo que tiene paralelos sólo dos lados opuestos.

- Los lados paralelos se llaman *bases* y los otros dos, se llaman *laterales* del trapecio.
- Si sus laterales son iguales, el trapecio se dice *isósceles*.
- El segmento que une los puntos medios de los laterales se llama *base media*. ✄

1.15. Teorema (9.9 en Pogorélov [1]). *En un trapecio la base media es paralela a las bases y es igual a la semisuma de las mismas.*

1.16. Definición. En un triángulo, el segmento que une los puntos medios de dos lados se llama *base media* del triángulo.

✎ En Pogorélov se lo denomina *línea media*, pero seguimos la usanza común en Argentina. ✄

1.17. Teorema (9.10 en Pogorélov [1]). *La base media del triángulo ABC que une los puntos medios de los lados AB y AC es paralela al lado BC y es igual a la mitad de ese lado.*

1.18. Teorema (9.11 en Pogorélov [1]). *Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto, llamado* baricentro *del triángulo.*

El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos que están en razón $2:1$ *contando desde el vértice.*

❦ Veamos una demostración algo distinta a la de Pogorélov, trabajando hacia «afuera» en vez de «adentro» del triángulo.

Sea ABC el triángulo, con puntos medios $A' \in BC$, $B' \in AC$. El rayo AA' pasa entre AB y AC (corta al segmento BC), luego corta al segmento BB' (B' en rayo AC) en, digamos P. Del mismo modo, el rayo BB' corta al segmento AA', y debe ser en P. Sea D tal que $ABDC$ es un paralelogramo (con diagonales AC y BD que se cortan en B'), el rayo DB pasa entre DA y DC. Sea A'' en la recta AD tal que $A'CA''A$ es un paralelogramo. De $BC = AD$ y $A'C = AA''$ resulta A'' punto medio de AD. $A''C$ corta a BD en P' (pues el rayo DB pasa entre DA y DC), y por 1.13 debe ser $PP' = P'D$, y del mismo modo $BP = PP'$. Nuevamente por 1.13 (con $AA' \parallel A''C$), $PB' = B'P'$, es decir $BP = 2PB'$. Si CC' es la otra mediana, cambiando AA' por CC' obtenemos que BB' y CC' se cortan en Q con $B'Q = (1/2)BB'$, pero entonces $P = Q$ y las medianas se cortan todas en el mismo punto.

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan, el cuadrilátero es convexo.

Ejercicio 1.2. ¿Pueden ser obtusos todos los ángulos de un cuadrilátero convexo?

Ejercicio 1.3. Si un cuadrilátero convexo tiene sus ángulos opuestos iguales (de a pares), entonces es un paralelogramo.

Ejercicio 1.4 (Varignon). Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero (no necesariamente convexo) son vértices de un paralelogramo o están alineados.

Ejercicio 1.5. Un cuadrilátero convexo con todos sus ángulos iguales es un rectángulo.

Ejercicio 1.6. En un paralelogramo se ha trazado la bisectriz de uno de sus ángulos. ¿En qué segmentos divide el lado mayor del paralelogramo, si sus lados miden 5 cm y 6 cm?

Ejercicio 1.7. Determinar los ángulos de un rombo si una de sus diagonales es igual al lado.

Ejercicio 1.8. Sea $ABCD$ un paralelogramo.

a) Ver que las bisectrices en A y C son paralelas; en cambio, las bisectrices en A y B se cortan a 90°.

b) Los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos de un paralelogramo son vértices de un rectángulo o se cortan en un único punto (y el paralelogramo es un rombo).

c) En el original del inciso anterior (Pogorélov, ejercicio 9.29) se dice que los vértices forman un cuadrado. Ver que esto no es correcto (dando un *contraejemplo*).

Ejercicio 1.9. La recta que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es paralela a las bases.

Ejercicio 1.10. Las rectas que contienen a las alturas de un triángulo se cortan en un punto (llamado *ortocentro* del triángulo).

Ejercicio 1.11. Construir un cuadrado de lado dado.

Ejercicio 1.12. Construir un trapecio dado sus lados.

Ejercicio 1.13. Dados los puntos A, B, C, que no están alineados, construir un punto P de modo que $ABPC$ sea un paralelogramo. ¿Cuántos paralelogramos hay que tienen a A, B, C como vértices?

Ejercicio 1.14.

a) Construir un triángulo dados los puntos medios de los lados.

✎ Si A, B, C son los vértices del triángulo, y P, Q, R son los puntos medios, se conocen los últimos y hay que encontrar los primeros.

b) Teniendo en cuenta el ejercicio 1.4, construir dos cuadriláteros (distintos) con los mismos puntos medios.

Referencias

[1] A. V. Pogorélov. *Geometría elemental*. MIR, Moscú, 1974.