

Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2010

Inversión

1. Potencia de punto respecto de circunferencia	1
1.1. Ejercicios	2
2. La circunferencia de Apolonio	2
2.1. Ejercicios	7
3. Inversión y circunferencias ortogonales	7
3.1. Ejercicios	11
4. Hileras armónicas	12
4.1. Ejercicios	13
5. Polos y polares	13
5.1. Ejercicios	16
6. Construcciones con regla solamente	16
7. Notas sobre la bibliografía	17
8. Bibliografía	17

1. Potencia de punto respecto de circunferencia

1.1. Teorema. *Consideremos una circunferencia c de centro O y radio r , un punto P y una recta ℓ que pasa por P y corta a c en Q y R (que podrían coincidir si ℓ es tangente a c). Entonces*

$$PQ \times PR = |PO^2 - r^2|. \quad (1)$$

☛ Si $P \in c$, alguna de las intersecciones coincide con P y $PQ \times PR = 0$, y si $P = O$, $PQ \times PR = r^2$.

Si $P \neq O$, sean A y A' las intersecciones de la recta PO con c . Entonces $PA \times PA' = r^2 - PO^2$ si P es interior y $PA \times PA' = PO^2 - r^2$ si P es exterior, estableciendo (1) si $\ell = PO$.

Supongamos ahora $\ell \neq PO$.

Si P es interior, $\angle ARQ = \angle AA'Q$ (por ángulos inscritos), de modo que $\angle ARP = \angle PA'Q$. Como además $\angle APR = \angle QPA'$ (por opuestos por el vértice), los triángulos APR y QPA' son semejantes, y $PA/PQ = PR/PA'$.

Si P es exterior a c , supongamos que $A' * A * P$ y $R * Q * P$ (en todo caso cambiando los nombres). Si ℓ no es tangente, nuevamente los triángulos APR y

QPA' son semejantes (pues $\angle AA'Q = \angle ARQ$ son inscriptos y $\angle APR = \angle A'PQ$ es común) de modo que $PA/PQ = PR/PA'$. Si ℓ es tangente a c , $Q = R$ y $PQ^2 = PO^2 - r^2$ por Pitágoras.

1.2. Definición. Con las notaciones del [teorema 1.1](#), la potencia de P respecto de c es la cantidad en la [ecuación \(1\)](#).

✎ La potencia depende de P y c pero no de ℓ , y puede calcularse como $|PO^2 - r^2|$.

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Dada una circunferencia c y un número $d > 0$, describir:

- El lugar geométrico de los puntos P tales que la longitud de la(s) tangente(s) a c es d .
- El lugar geométrico de los puntos P en el círculo, tales que su potencia respecto de c es d .

Ejercicio 1.2. Dados la recta ℓ y los puntos A y B , construir una circunferencia que pase por A y B y tal que ℓ sea tangente a ella. ¿Cuántas soluciones hay?

Ejercicio 1.3. A un lado de una carretera recta, formando un ángulo con ella, está situado un cartel. ¿En qué punto de la carretera habrá que ubicarse para ver el cartel al mayor ángulo posible?

Ejercicio 1.4. Dados los puntos A y B , $A \neq B$, y el número d , el conjunto de puntos M tales que $AM^2 - BM^2 = d$ es una recta perpendicular a la recta AB .

Ejercicio 1.5. Sean c y c' dos circunferencias no concéntricas (no tienen el mismo centro).

- Encontrar el conjunto de puntos para los cuales las tangentes trazadas a las circunferencias tienen igual longitud. *Sugerencia:* está contenido en una recta.
 - ✎ La recta se llama *eje radical* de las dos circunferencias.
- Construir con regla y compás el eje radical de c y c' .
- Ver que es posible elegir los ejes coordenados de modo que los centros tengan coordenadas $(a, 0)$ y $(a', 0)$, con $a < 0 < a'$, y las ecuaciones correspondientes de las circunferencias sean

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 2a'x + c = 0.$$

- Si los centros de tres circunferencias forman un triángulo, hay un punto cuya potencia respecto de las tres circunferencias es la misma.
 - ✎ Este punto se llama *centro radical* de las circunferencias.

2. La circunferencia de Apolonio

2.1. Teorema. Si la «cruz de bisectrices» de AC y BC corta a la recta AB en E y F , entonces

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BC}.$$

Recíprocamente, si E está en la recta AB y $AE/BE = AC/BC$, entonces E está en la cruz de bisectrices del ángulo $\angle ACB$.

☞ Ver los ejercicios 2.3 y 2.4 del apunte *Aplicaciones del área*.

La perpendicularidad entre las rectas que forman la «cruz de bisectrices» sugiere que hay una circunferencia involucrada, que —con las notaciones del teorema anterior— tiene diámetro EF y pasa por C : la proporción entre las distancias de cada punto en esta circunferencia a los puntos A y B es constante. Pero primero estudiamos la condición entre los puntos alineados A, B, E y F .

2.2. Lema. Sean A y B dos puntos distintos, y $k > 0$, y consideremos la ecuación

$$\frac{AM}{BM} = k, \quad (2)$$

con M en la recta AB .

- a) Si $k = 1$ la ecuación tiene exactamente una solución, el punto medio de AB .
 b) Si $k \neq 1$, la ecuación tiene exactamente dos soluciones, M_1 y M_2 , donde $A * M_1 * B$ y M_2 deja a A y B a un mismo lado. En este caso, si C es el punto medio de $M_1 M_2$, poniendo

$$r = \frac{k}{|k^2 - 1|} AB,$$

resulta

$$AC \times BC = r^2,$$

y C deja de un mismo lado a A y B .

☞ Como trabajamos en una recta, podemos hacer una correspondencia entre los puntos de esta recta y una recta real, donde el origen es 0 (cero) y los puntos A y B se corresponden con los puntos $-t$ y t ($t > 0$). La ecuación (2) se transforma en

$$|x + t| = k|x - t|.$$

Cuando $k = 1$ (y $t \neq 0$) tenemos la única solución $x = 0$, y cuando $k \neq 1$ las soluciones

$$x_1 = \frac{k-1}{k+1}t \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{k+1}{k-1}t.$$

x_1 queda entre $-t$ y t , mientras que x_2 resulta o bien mayor que t (si $k > 1$) o bien menor que $-t$ (si $k < 1$). También (siempre con $k \neq 1$), si c es el punto medio de x_1 y x_2 , resulta

$$\begin{aligned} c &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}t, \\ |x_1 - c| &= |x_2 - c| = \frac{2k}{|k^2 - 1|}t, \\ |c + t| |c - t| &= \frac{4k^2}{(k^2 - 1)^2}t^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Volviendo al enunciado, M es el punto medio de AB cuando $k = 1$. En otro caso tendremos M_1 (correspondiente a x_1) entre A y B , M_2 (correspondiente a x_2) y C (correspondiente a c) dejan a un mismo lado a A y B (estando ambos más cerca de A que de B si $k < 1$). Los restantes resultados se siguen de las ecuaciones (3).

2.3. Teorema. Dado $k > 0$, el lugar geométrico de los puntos M tales que

$$\frac{AM}{BM} = k,$$

es una circunferencia si $k \neq 1$ y la mediatriz del segmento AB si $k = 1$.

Más aún, cuando $k \neq 1$, si C es el centro de la circunferencia y r su radio, entonces:

- C está en la recta AB , dejando a A y B de un mismo lado,
- El diámetro de la circunferencia sobre la recta AB es de la forma M_1M_2 , donde M_1 está entre A y B , y M_2 deja de un mismo lado a A , B y C .
- $AC \times BC = r^2$.

☛ Consideramos sólo el caso $k \neq 1$, y damos dos versiones: una algebraica (y más formal) y otra geométrica (y no tan formal).

Versión algebraica. La condición $k = AM/BM$ puede escribirse como $AM^2 = k^2 BM^2$. Tomando coordenadas de modo que la recta AB sea el eje x y el origen el punto medio del segmento AB , podemos poner (imitando lo hecho en 2.2) $A = (-t, 0)$ y $B = (t, 0)$, donde $t > 0$. Poniendo $M = (x, y)$, la condición $AM^2 = k^2 BM^2$ es equivalente a

$$(x+t)^2 + y^2 = k^2((x-t)^2 + y^2). \quad (4)$$

Si M está en la recta AB será $y = 0$, y el estudio de la ecuación (4) se reduce al ya hecho en 2.2, donde —cuando $k \neq 1$ — vimos la existencia de M_1 y M_2 , las propiedades de su punto medio C , y la distancia $r = CM_1 = CM_2$.

Si $k \neq 1$, la ecuación (4) es de la forma $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta = 0$. Completando cuadrados se llega a algo de la forma $(x - \gamma)^2 + y^2 = \delta$ que es la ecuación de una circunferencia, un punto o el vacío. Sin embargo, como con $y = 0$ hay dos soluciones (los ya mencionados M_1 y M_2), la ecuación (4) es la ecuación de una circunferencia de centro C (el punto medio de M_1M_2) y radio r (determinado por la condición $AC \times BC = r^2$).

Versión geométrica. Supongamos que P es un punto tal que $AP = kBP$, donde P no está en la recta AB (i.e., $P \neq M_1, M_2$). Sea c la circunferencia que inscribe al triángulo ABP , y consideremos D la intersección de la tangente a c por P y la recta AB . D deja a un mismo lado a A y B (pues está en la tangente a c por P), y supongamos $A * B * D$ como en la figura 1.¹ En c , el ángulo $\angle BPD$ es semi-inscrito y el ángulo $\angle ABP$ es inscrito, y son iguales. De modo que los triángulos PAD y BPD son semejantes pues también comparten el ángulo en D , y debe ser

$$\frac{PA}{BP} = \frac{PD}{BD} = \frac{AD}{PD} = k. \quad (5)$$

Por un lado tenemos

$$k^2 = \frac{PD}{BD} \times \frac{AD}{PD} = \frac{AD}{BD},$$

que, como D deja a un lado a A y B , el mismo punto D se obtiene para cualquier valor de P (ver el ejercicio 3.2 del apunte *Axiomas de la geometría plana*). D estará más cerca de A que de B si $k < 1$, y más cerca de B que de A si $k > 1$.

Usando la ecuación (5) nuevamente (o por potencia), obtenemos

$$DP^2 = AD \times BD,$$

es decir, DP es independiente de P y P está en una circunferencia de centro D y radio $\sqrt{AD \times BD}$. Obtenemos de esta forma (salvo cuando P es M_1 o M_2) condiciones equivalentes a las ya encontradas.

¹ Si $B * A * D$ en vez de $A * B * D$, intercambiamos A y B y cambiamos k a $1/k$.

☛ Si se cortaran en un único punto, las tangentes correspondientes coincidirían y no serían perpendiculares.

Si $T \in c \cap c'$, como O está en la tangente a c' por T , debe ser O exterior a c' (pues $O \neq T$).

2.9. Corolario. Con las notaciones anteriores, las circunferencias de Apolonio con diámetros AB y M_1M_2 son ortogonales.

☛ Sean c y c' las circunferencias (AB diámetro de c y M_1M_2 diámetro de c'), con centros O y O' , y sea P un punto en la intersección. Refiriéndonos a la «interpretación geométrica» en la nota de la demostración de 2.3, vemos que $OP \perp O'P$.

Los resultados anteriores inducen dos definiciones que resultan ser importantes. En primer lugar, la relación entre los puntos A, B, M_1 y M_2 en 2.2 (y 2.3) sugiere la siguiente definición:

2.10. Definición. Se dice que los puntos alineados A, B, C y D forman una hilera armónica o directamente que son puntos armónicos, si

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}.$$

☞ Observar que el orden en que se dan los puntos es importante, y que los puntos deben estar alineados.

En segundo lugar, la relación del teorema 2.3.c) entre el radio de una circunferencia y el producto de las distancias desde dos puntos al centro sugiere esta otra definición:

2.11. Definición. Dada una circunferencia c de centro O y radio r , se dice que los puntos A y B son inversos el uno del otro si están en una misma semirrecta de origen O y

$$AO \times BO = r^2.$$

• c es la circunferencia de inversión.

☞ Necesariamente debe ser $O \neq A, B$. El inverso de O (respecto de c) no está definido. Sin embargo, puede ser $A = B$.

☞ Se determina una transformación definida sobre todo el plano exceptuado O que es biyectiva e involutiva.

✦ Representando los puntos del plano con números complejos, la inversión respecto de la circunferencia de centro $O = 0$ y radio $r = 1$, corresponde a la transformación $z \rightarrow (\bar{z})^{-1}$, donde \bar{z} es el conjugado de z .

La circunferencia de Apolonio, circunferencias ortogonales, inversión e hileras armónicas, son conceptos íntimamente relacionados y prácticamente equivalentes: el teorema 2.3 relaciona el diámetro de una circunferencia de Apolonio con puntos inversos, el corolario 2.6 relaciona una circunferencia de Apolonio con otra, el corolario 2.9 dice que estas circunferencias de Apolonio son ortogonales, y por la misma definición de circunferencias de Apolonio, la recta que pasa por los centros de estas circunferencias las corta formando una hilera armónica, y recíprocamente una hilera armónica determina los diámetros de dos circunferencias de Apolonio (respecto de distintos puntos) que serán ortogonales entre sí.

Más adelante veremos otras relaciones entre estos conceptos. Por ejemplo, el [teorema 3.6](#) relaciona circunferencias ortogonales con puntos inversos, el [teorema 4.2](#) relaciona puntos inversos con hileras armónicas, y el [corolario 4.3](#) completa el círculo, relacionando hileras armónicas con circunferencias ortogonales.

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.1. Dados los puntos A y B , y el punto C sobre la recta AB , construir la circunferencia de Apolonio respecto de A y B que pasa por C .

Ejercicio 2.2. Supongamos que tenemos una mesa de billar circular de centro O y circunferencia c , y los puntos A y B en un diámetro de c (ambos distintos del origen e interiores a la circunferencia). Consideremos un punto $T \in c$ que no está en la recta AB . Una bola inicialmente en A es impulsada de modo de rebotar en T y pasar por B .

- Construir B dados A y T . ¿Siempre se encuentra un B válido?
- Construir T dados A y B . ¿Cuántas soluciones hay?, ¿siempre existe T (para A y B cualesquiera)?

Ejercicio 2.3. Sean A, B, C y D puntos alineados, $A * B * C$ y $B * C * D$. Construir un punto M tal que los segmentos AB, BC y CD se vean bajo un mismo ángulo desde M .

3. Inversión y circunferencias ortogonales

Salvo indicación contraria, en esta sección indicamos por c la circunferencia de inversión, por O su centro y por r su radio.

3.1. Lema. Si P' es el inverso de P respecto de c , entonces:

- P es interior a c si y sólo si P' es exterior a c .
- $P = P'$ si y sólo si $P \in c$.
- Si $O = (0, 0)$ y $P = (x, y)$,

$$OP' = \frac{r^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad P' = \frac{r^2}{x^2 + y^2} P,$$

y en particular, si $P' = (x', y')$,

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}, \quad x'^2 + y'^2 = \frac{r^4}{x^2 + y^2}.$$

- ☞ Las dos primeras afirmaciones se deducen de la relación $OP \times OP' = r^2$. Por ejemplo, $OP < r \Leftrightarrow OP' > r$.

Para la última afirmación, basta observar que el punto P' está en la semirrecta OP y es un múltiplo positivo, digamos λ , de P , i.e., $P' = \lambda P$. De $OP \times OP' = r^2$ y $OP' = \lambda OP$ sigue $r^2 = OP \times OP' = \lambda OP^2 = \lambda(x^2 + y^2)$ de donde $\lambda = r^2/(x^2 + y^2)$.

3.2. Teorema. Si A y A' son dos puntos distintos en una semirrecta de origen O tales que A y A' son inversos entre sí respecto de la circunferencia c , entonces c es una circunferencia de Apolonio respecto de A y A' y coeficiente $\sqrt{OA/OA'}$.

- ✎ Es el recíproco del [teorema 2.3.c](#)).
- ☛ Supongamos que $OA' > OA$, i.e., $OA < r < OA'$ (el caso $OA > OA'$ se obtiene intercambiando A con A').

Sea BC el diámetro de c determinado por la recta AA' , con C en la semirrecta OA y B en la opuesta. De $r^2 = OA \times OA'$ y $r > OA$, podemos poner (ver el [corolario 2.2](#) del apunte [Aplicaciones del área](#)):

$$\frac{r}{OA'} = \frac{OA}{r} = \frac{r - OA}{OA' - r} = \frac{r + OA}{OA' + r} = \lambda,$$

para algún $\lambda > 0$, y también de la misma relación queda

$$\lambda^2 = OA/OA'. \tag{6}$$

Puesto que $OC = r$ y O, A, C y A' están en una recta en ese orden,

$$\frac{AC}{A'C} = \frac{OC - OA}{OA' - OC} = \frac{r - OA}{OA' - r} = \lambda.$$

Del mismo modo,

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{r + OA}{OA' + r} = \lambda.$$

El resultado se deduce ahora de [2.6](#), siendo $\lambda = \sqrt{OA/OA'}$ el coeficiente de la circunferencia de Apolonio (usando [\(6\)](#)).

Al invertir respecto de una circunferencia todos los puntos de una figura, obtenemos una nueva figura, en general no muy parecida a la original. Casos particularmente importantes son la inversión de rectas y circunferencias.

3.3. Teorema. *Sea ℓ una recta y F su imagen por una inversión respecto de la circunferencia c . Entonces:*

- a) Si $O \in \ell$ (y por lo tanto ℓ no se puede invertir completamente), $F = \ell \setminus \{O\}$.
- b) Si $O \notin \ell$, $F = c' \setminus \{O\}$, donde c' es una circunferencia que pasa por O , y tal que la tangente a c' por O es paralela a ℓ .

- ☛ Para *a*), si $P \in \ell$, $P \neq O$, y P' es su inverso, entonces P y P' están en la misma semirrecta de origen O , contenida en ℓ , i.e., $P' \in \ell$. Como la inversión es involutiva, el inverso P de $P' \in \ell$ está en ℓ ($P', P \neq O$).

Para *b*), consideremos la recta ℓ' paralela a ℓ por O . Guiándonos con la [figura 2](#), consideramos $R \in \ell$, la intersección de ℓ con la perpendicular a ℓ por O , y R' el inverso de R . Veamos que la circunferencia de diámetro OR' (salvo O) es la imagen de ℓ por la inversión.

Si $P \in \ell$ consideramos la recta OP y la perpendicular a ella por R' que la corta en Q (Q, R, R' y P están en el mismo semiplano de ℓ'). Los triángulos OPR y OQR' son semejantes pues son rectángulos (en R y Q) y comparten $\angle O$. Entonces

$$\frac{OP}{OR} = \frac{OR'}{OQ},$$

de donde $OP \times OQ = OR \times OR' = r^2$. Como Q está en la semirrecta OP , resulta Q el inverso de P . Que todo punto Q de c , excepto O , es inverso de algún P se deduce de la misma forma: dado Q se construye la recta OQ que corta a ℓ en P , $\angle OQR' = 90^\circ$ (por ángulo inscrito en c), y se usa la semejanza de los triángulos.

- ✎ Podemos pensar que la [figura 2](#) muestra cómo «proyectar» una circunferencia sobre una recta, y podríamos extender estas ideas a cualquier dimensión. No es casualidad que los temas que vemos en este apunte estén íntimamente relacionados con la «geometría proyectiva».

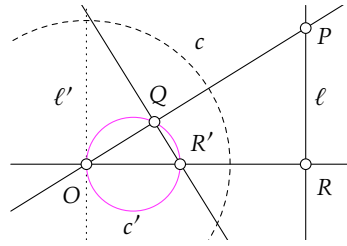


Figura 2: inversión de recta.

3.4. Teorema. Sea c' una circunferencia y F su imagen por una inversión respecto de la circunferencia c . Entonces:

- Si $O \in c'$ (y por lo tanto c' no puede invertirse completamente), $F = \ell \setminus \{O\}$, donde ℓ es una recta paralela a la tangente a c' por O . Además, $O \notin \ell$.
- Si $O \notin c'$, $F = c''$, donde c'' es una circunferencia que no contiene a O . Más aún, c' y c'' son homotéticas.

☛ El primer inciso es 3.3.b) (figura 2).

Veamos dos variantes para el segundo, una algebraica usando coordenadas y otra más geométrica.

Versión algebraica. Si $O = (0, 0)$, y c' tiene centro (a, b) y radio k , la ecuación de la circunferencia c' es

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = k^2,$$

que puede expresarse como

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + d = 0,$$

donde $d = a^2 + b^2 - k^2$. Multiplicando la última ecuación por $r^4/(x^2 + y^2)$, obtenemos

$$r^4 - 2ar^2 \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} - 2br^2 \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} + d \frac{r^4}{x^2 + y^2} = 0.$$

Usando 3.1.c), si (x', y') son las coordenadas del inverso de un punto $(x, y) \in c$,

$$r^4 - 2ar^2 x' - 2br^2 y' + d(x'^2 + y'^2) = 0.$$

Como $d \neq 0$ (pues $O \notin c$), dividiendo por d obtenemos la ecuación que satisfacen los puntos inversos de los puntos en c :

$$x'^2 + y'^2 - 2 \frac{ar^2}{d} x' - 2 \frac{br^2}{d} y' + \frac{r^4}{d} = 0,$$

que es la ecuación de una circunferencia de centro

$$(a', b') = \frac{r^2}{d} (a, b),$$

y radio r' tal que

$$r'^2 = a'^2 + b'^2 - \frac{r^4}{d} = \frac{r^4}{d^2} (a^2 + b^2) - \frac{r^4}{d} = \frac{r^4}{d^2} (d + k^2) - \frac{r^4}{d} = \frac{r^4 k^2}{d^2},$$

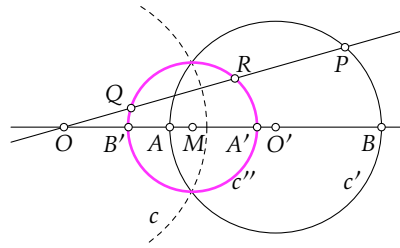


Figura 3: inversión de circunferencia.

i.e., $r' = (r^2/d)k$. En resumen, la inversión de c' es una circunferencia homotética con centro O y coeficiente r^2/d .

Versión geométrica. Supongamos que la circunferencia a invertir es c' , con centro O' y radio r' . Surgen distintos casos, pero acá miramos el caso en que $O \neq O'$ y la recta OO' corta en el diámetro AB a c' , con $O * A * B$, como en la figura 3.

Denotando por A' y B' los inversos de A y B (y entonces $O * B' * A'$), tomamos M el punto medio de $A'B'$. Hacemos una homotecia de centro O y coeficiente $\lambda = OM/OO'$. Mediante esta homotecia, $A \rightarrow B'$, $B \rightarrow A'$ y c' se transforma en una circunferencia c'' , de radio $r'' = \lambda r'$. En particular,

$$OB' = \lambda \times OA, \quad r^2 = OA' \times OA, \quad OA' \times OB' = OA' \times \lambda \times OA = \lambda r^2. \quad (7)$$

Queremos ver que la inversión de c' es c'' .

Si $P \in c$, $P \neq A, B$, trazamos la recta OP que corta a la circunferencia c'' en Q y R , donde —digamos— R es el homotético de P , es decir,

$$OR = \lambda \times OP.$$

Veamos que Q es el inverso de P . En efecto,

$$\begin{aligned} OQ \times OP &= OQ \times \frac{OR}{\lambda} && \text{por homotecia,} \\ &= \frac{OB' \times OA'}{\lambda} && \text{por potencia respecto de } c'', \\ &= r^2 && \text{por (7).} \end{aligned}$$

Observamos que cuando OP es tangente a c' , también es tangente a c'' y $Q = R$, pero el argumento sigue siendo válido.

Ⓛ Aunque el centro de c'' está en la semirrecta de origen O que pasa por el centro de c' , el centro de c' no se invierte en el centro de c'' : con las notaciones anteriores, el inverso del centro tiene coordenadas

$$\frac{r^2}{a^2 + b^2} (a, b),$$

(suponiendo $(a, b) \neq (0, 0)$) y —para que coincida con el centro de c'' — tendría que ser

$$d = a^2 + b^2,$$

pero $d = a^2 + b^2 - k^2$ y $k \neq 0$ (pues es el radio de c').

3.5. Corolario. La inversión es una transformación conforme, i.e., preserva ángulos.

- ✦ En los cursos de funciones de variable compleja se estudian funciones conformes sobre los complejos. Acá estamos diciendo esencialmente que para $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, la transformación $z \rightarrow (\bar{z})^{-1}$ es conforme.
- ☞ Sean ℓ y $\tilde{\ell}$ dos rectas que se cortan en P formando ángulos de α y su suplementario, β , con $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Supongamos que las rectas no pasan por el centro O de la circunferencia c de inversión. Entonces ℓ y $\tilde{\ell}$ se transforman en dos circunferencias, c' y \tilde{c} , a las que se les ha quitado O , y tanto c' como \tilde{c} pasan por O . Más aún, sus tangentes en O son paralelas a ℓ y $\tilde{\ell}$ y por lo tanto forman los mismos ángulos α y β . Como $\ell \neq \tilde{\ell}$, $c' \neq \tilde{c}$, estas circunferencias no son tangentes (en O), sus respectivos centros son distintos, y se cortan en otro punto, digamos Q , que es el inverso de P . Los ángulos que forman las tangentes a c' y \tilde{c} en Q también coinciden con α y β pues la figura formada por c' y \tilde{c} es simétrica respecto de las rectas que pasa por sus centros.

Si alguna de ℓ y $\tilde{\ell}$ pasan por O , entonces tendremos que considerar el ángulo formado por una recta y una circunferencia, pero es similar al anterior.

El caso en que tanto ℓ como $\tilde{\ell}$ pasan por O (y $\ell \neq \tilde{\ell}$) puede considerarse como un caso «límite», aunque el ángulo formado por sus inversas no está definido (pues no contienen a O).

3.6. Teorema. Sean c y c' dos circunferencias de centros O y O' . Supongamos que P y Q son la intersección de una recta por O con la circunferencia c' . Entonces P y Q son inversos entre sí respecto de c si y sólo si $c \perp c'$.

- ☞ Cuando $P = Q$ y la recta OP es tangente a c' , el resultado se reduce a decir que P es su propio inverso (respecto de c y por lo tanto $P \in c$) si y sólo si $c \perp c'$.
- ☞ Si Q es el inverso de P respecto de c , P y Q están en una misma semirrecta de origen O , O es exterior a c' y puede trazarse una recta OT tangente a c' con $T \in c'$. Entonces (por potencia) tenemos $OT^2 = OP \times OQ = r^2$, y por lo tanto $OT = r$ y $T \in c$. Entonces $T \in c \cap c'$ y $OT \perp O'T$, i.e., c y c' son ortogonales.

Recíprocamente, si $c \perp c'$, hay dos puntos en $c \cap c'$. Si T es uno de estos puntos, debe ser $OT \perp O'T$, OT tangente a c' (en T), y O exterior a c' . Nuevamente por potencias, $OP \times OQ = OT^2 = r^2$, y P y Q son inversos entre sí respecto de c (P y Q están en una misma semirrecta de origen O pues O es exterior a c').

3.7. Corolario. Si c y c' son dos circunferencias distintas, entonces $c \perp c'$ si y sólo si la inversa de c' respecto de c coincide con c' .

- ☞ Es claro que la inversa de c es c pero $c \not\perp c$.
- ☞ Supongamos que $c \perp c'$, $P \in c'$, y Q es el inverso de P respecto de c . Queremos ver que $Q \in c'$. Pero si R es el otro punto en la intersección de la recta OP con c' , R es el inverso de P (por 3.6, aún si $R = P$). Por lo tanto $Q = R \in c'$.
Recíprocamente, supongamos que c' es su propia inversa respecto de c . Tomemos una recta que pase por O y corte a c' en dos puntos distintos, digamos P y Q . Si P es inverso de sí mismo (respecto de c), Q también debe ser inverso de sí mismo y P y Q en c . Si esto pasa para más de una recta que pasa por O , tendremos tres o más puntos en $c \cap c'$ y debe ser $c = c'$. Como suponemos $c \neq c'$, podemos encontrar una recta por O que corte a c' en dos puntos distintos, uno inverso del otro y usar 3.6 para obtener $c \perp c'$.

3.1. Ejercicios

Ejercicio 3.1. Completar la demostración geométrica del teorema 3.4 para los casos a) $O = O'$ y b) $O \neq O'$ y $A * O * B$.

Ejercicio 3.2. ¿Por qué en la demostración de 3.7 no se puede considerar $T \in c'$ tal que OT es tangente a c' como se hace en 3.6?

Ejercicio 3.3. Sean c una circunferencia, y $P \notin c$. Construir una circunferencia c' de centro P tal que al realizar la inversión respecto de c' , c queda invariante. ¿Y si P es el centro de c ?

Ejercicio 3.4. Dadas las circunferencias c_1 y c_2 , y el punto P no en ellas, construir una circunferencia que pase por P y sea tangente a c_1 y c_2 . *Sugerencia:* usar el ejercicio anterior.

4. Hileras armónicas

4.1. Lema. Si A, B y C son tres puntos distintos, entonces si C no es el punto medio de AB , existe un único D tal que A, B, C, D es una hilera armónica.

En consecuencia, si A, B, C, P y A, B, C, Q son hileras armónicas, entonces $P = Q$.

☛ La ecuación (2) del lema 2.2 tiene dos soluciones, una de las cuales es $M = C$ y la otra es el punto D buscado.

4.2. Teorema. Si c es una circunferencia y P y Q son puntos distintos tales que la recta PQ corta a c en el diámetro AB , entonces los puntos A, B, P, Q forman una hilera armónica si y sólo si P y Q son inversos uno del otro respecto de c .

☞ El caso límite es $P = Q$, en este caso tendremos también $P = A$ o $P = B$.

☛ Llamemos O al centro de c y r a su radio.

Si A, B, P, Q es una hilera armónica, debe ser

$$\frac{PA}{QA} = \frac{PB}{QB} = k,$$

para algún $k > 0$, $k \neq 1$. Por lo tanto, c es la circunferencia de Apolonio respecto de P y Q con coeficiente k , y (por 2.3) $OP \times OQ = r^2$, i.e., P y Q son inversos el uno del otro respecto de c .

Recíprocamente, si P y Q son inversos respecto de c , por 3.2 c es una circunferencia de Apolonio respecto de P y Q , y en particular

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{BP}{PQ},$$

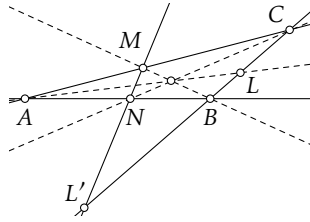
y los puntos A, B, P, Q forman una hilera armónica.

4.3. Corolario. Los puntos alineados A, B, P, Q forman una hilera armónica si y sólo si las circunferencias de diámetros AB y PQ son ortogonales.

☞ Comparar con 2.9.

☛ Sea c la circunferencia de diámetro AB y c' la de diámetro PQ . Por 4.2, A, B, P, Q forman una hilera armónica si y sólo si P y Q son inversos el uno del otro respecto de c . Por 3.6, esto pasa si y sólo si $c \perp c'$.

El siguiente es un teorema fundamental de geometría proyectiva en dos dimensiones y juega un rol decisivo en la construcción 6.2 de tangentes a una circunferencia. Por prácticamente única vez en el apunte, no aparecen circunferencias involucradas en el enunciado o demostración.

Figura 4: esquema del [teorema 4.4](#).

4.4. Teorema. Si ABC es un triángulo, L , M y N son puntos cualesquiera en las rectas BC , CA y AB (respectivamente) tales que AL , BM y CN son concurrentes, y la recta MN corta a la recta BC en L' , entonces B, C, L, L' forman una hilera armónica.

☞ Nos orientamos con la [figura 4](#). Por el teorema de Ceva,

$$\frac{BL}{LC} \frac{CM}{MA} \frac{AN}{NB} = 1,$$

y por el teorema de Menelao,

$$\frac{BL'}{L'C} \frac{CM}{MA} \frac{AN}{NB} = 1,$$

por lo que

$$\frac{BL}{LC} = \frac{BL'}{L'C},$$

y entonces o bien $L = L'$ o bien B, C, L, L' forman una hilera armónica.

Pero no puede ser $L = L'$ ya que, siendo AL , BM y CN concurrentes o bien sólo uno o bien los tres puntos L , M y N están en los lados del triángulo ABC , mientras que la recta MN puede cortar a los lados en ninguno o exactamente dos de los lados (ver los lemas [1.2](#) y [1.6](#) del apunte [Teoremas de Ceva y Menelao](#)).

4.1. Ejercicios

Ejercicio 4.1. Si A, B, C, D forman una hilera armónica, con B y C entre A y D , entonces los segmentos AB , AC y AD están en progresión armónica, i.e.,

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \right).$$

Ejercicio 4.2. Justificar la siguiente construcción del punto D de modo que A, B, C, D formen una hilera armónica: sean ℓ_A y ℓ_B dos rectas paralelas por A y B , y sea ℓ_C una recta por C que corta a ℓ_A y ℓ_B en P y Q . Si $R \in \ell_B$ es tal que $R \neq Q$ y $BR = BQ$, entonces la recta PR corta a la recta AB en D . *Sugerencia:* usar la semejanza de los triángulos APC y BQC , y de los triángulos APD y BRD .

☞ Esta construcción permite hacer el [ejercicio 2.1](#) de forma sencilla.

5. Polos y polares

En la primera parte de esta sección, tomada del libro de Coxeter y Greitzer [\[1\]](#), vemos cómo establecer una correspondencia entre puntos y rectas, e

intercambiar colinealidad y concurrencia, similar a la dualidad en «geometría proyectiva». Concluimos con resultados tomados del libro de Shively [3], mostrando la relación con hileras armónicas.

5.1. Definición. Dados una circunferencia de inversión c de centro O y un punto P , $P \neq O$, la *polar de P* es la recta perpendicular a OP que pasa por el inverso de P respecto de c .

5.2. Definición. Dados una circunferencia de inversión c de centro O y una recta ℓ , $O \notin \ell$, sea Q la intersección de ℓ y una perpendicular a ℓ por O . El *polo de ℓ* es el punto inverso de Q respecto de c .

5.3. Lema. Sean c una circunferencia de inversión de centro O , P un punto distinto de O , y ℓ una recta que no pasa por O . Entonces ℓ es la polar de P si y sólo si P es el polo de ℓ .

☞ Sea P' el inverso de P respecto de c .

Si ℓ es la polar de P , la intersección de ℓ con la recta OP es P' y $\ell \perp OP$. Por lo tanto, P es el polo de ℓ . Recíprocamente, si P es el polo de ℓ , la intersección de ℓ con la recta OP es el punto P' y $\ell \perp OP$, i.e., ℓ es la polar de P .

Es usual denotar con letras minúsculas a las polares de los puntos, e.g., a es la polar de A , p la polar de P , etc., convención que adoptamos.

☞ ¡Habrà que tener cuidado cuándo c denota una circunferencia o cuándo r es un radio, y no son polares de C o R !

5.4. Lema. Sea c una circunferencia de inversión de centro O , y consideremos los puntos del plano U , V y W distintos de O , y sus polares u , v y w (respectivamente).

- $U \in c \Leftrightarrow U \in u$. Además, $U \in c$ si y sólo si u es la tangente a c por U .
- $U \in v \Leftrightarrow V \in u$.
- U y V están en w si y sólo si W es la intersección de u y v .

☞ Sea U' el inverso de U respecto de c , y recordemos que $U \in c$ si y sólo si $U = U'$ (lema 3.1). Como u es perpendicular a OU y contiene a U' , $U \in u$ es equivalente a $U = U'$, i.e., a $U \in c$. Si $U \in c$, u es la recta tangente a c por U (pues la tangente es perpendicular a OU y pasa por $U' = U$).

Recíprocamente, si u es tangente a la circunferencia en, digamos, Q , la perpendicular a u que pasa por O es la recta OQ y Q debe ser el inverso de U . Dado que $Q \in c$, Q es su propio inverso y entonces $Q = U$, y por lo tanto $U \in c$.

Supongamos ahora que $U \in v$ y llamemos V' al inverso de V . Tracemos la recta OU , la perpendicular a ésta que pasa por V , y llamemos H al punto de intersección de estas rectas. Entonces los triángulos $UV'O$ y VHO son semejantes (comparten el ángulo en O y son rectángulos en V' y H). Por lo tanto

$$\frac{UO}{VO} = \frac{V'O}{HO},$$

de donde $UO \times HO = VO \times V'O = r^2$ donde r es el radio de c , y por lo tanto H es el inverso de U y VH (que es perpendicular a OU) es la polar de U .

☞ Comparar con 3.3 y la figura 2 en donde los puntos R, R', P, Q se llaman ahora V', V, U, H , y la recta ℓ es ahora v . Como en ese caso, podemos decir que H está en la semirrecta OU porque U y H están en un mismo semiplano respecto de la recta paralela a v que pasa por O .

Entonces $U \in v \Rightarrow V \in u$, pero cambiando V por U y v por u , vemos que vale también la recíproca.

Finalmente, por los incisos anteriores, U y V están en w si y sólo si tanto $w \in u$ como $w \in v$, i.e., si y sólo si $W \in u \cap v$.

✎ Vale la pena citar a Coxeter y Greitzer [1, pág. 133] a propósito de que $B \in a \Rightarrow A \in b$:

Fijando A y a , mientras que varían B y b , deducimos que las polares de todos los puntos de una recta a (que no pase por O) son rectas que pasan por su polo A . En otras palabras, las polares de un conjunto de puntos alineados es un conjunto de rectas concurrentes. Este proceso de conservación de la concurrencia, en el que los puntos y las rectas se transforman en sus polares y polos, se llama *reciprocidad*. Conduce, naturalmente, al *principio de dualidad* que establece que, para cualquier configuración de puntos y rectas, con determinados puntos situados en determinadas rectas, existe una configuración dual de rectas y puntos, con determinadas rectas que pasan por determinados puntos. Por el dual del «cuadrángulo completo» $ABCD$ (que consiste en cuatro puntos, cualesquiera tres de ellos no colineales, y sus rectas de unión AD, BD, CD, BC, CA y AB) es un «cuadrilátero completo» $abcd$ (que consiste en cuatro rectas, cualesquiera tres de ellas no concurrentes, y sus seis pares de puntos de intersección $a \cap d, b \cap d, c \cap d, b \cap c, c \cap a, a \cap b$).

5.5. Teorema. Sean c una circunferencia de inversión, P un punto exterior a c y p su polar, y sean U y V dos puntos (distintos) en c .

Entonces si U y V están en p , las rectas PU y PV son tangentes a c (en U y V respectivamente).

Recíprocamente, si U y V son puntos de las tangentes a c por P , p es la recta UV .

✎ Si $U \in p$, U es su propio inverso. Su polar u contiene a P y es tangente a c (lema 5.4). Como también contiene a U , u es la recta PU . Es decir, PU es tangente a c . De la misma forma para V .

Por otro lado, si la recta PU es tangente a c , entonces PU es la polar u de U . Del mismo modo para la polar v de V . Entonces P es la intersección de las polares u y v , y por 5.4, U y V están en p , y por lo tanto la determinan.

5.6. Teorema. Sean c la circunferencia de inversión, P un punto exterior a c y p su polar, ℓ una recta por P que corta a c en A y B , y sea Q en el segmento AB .

Entonces A, B, Q, P es una hilera armónica si y sólo si $Q \in p$.

✎ Sea O el centro de inversión, y sea P' el inverso de P .

Si Q está en la recta OP , entonces $Q \in p$ es equivalente a $Q = P'$. Por 4.2, esto es equivalente a que A, B, P, Q formen un hilera armónica.

Supongamos entonces que $Q \in p$ no está en la recta OP , y sea c' la circunferencia de diámetro PQ (ver figura 5).

Si $Q \in p$, entonces p es la recta $P'Q$ (perpendicular a OP) y c' contiene a P' y P . Por 3.6 esto es equivalente a $c \perp c'$. Nuevamente por el mismo teorema, ahora con la recta AB que corta a c' y pasa por su centro, A y B son inversos entre sí respecto de c' . Por 4.2 esto implica que A, B, P, Q forman una hilera armónica.

Recíprocamente, si A, B, P, Q forman una hilera armónica, por 4.2 A y B son inversos el uno respecto del otro respecto de c' , por 3.6 debe ser $c \perp c'$. Por el mismo teorema la recta OP corta a c' en P' . Entonces $\angle QP'P = 90^\circ$ pues PQ es diámetro de c' , las rectas OP y QP' son ortogonales, y $Q \in p$.

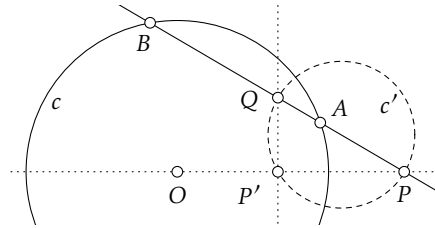


Figura 5: esquema del [teorema 5.6](#).

5.1. Ejercicios

Ejercicio 5.1. La polar de un punto A respecto de una circunferencia c de centro O ($A \neq O$) es el eje radical de las circunferencias c y la de diámetro OA .

Ejercicio 5.2. Uno de los ángulos formados por las polares de A y B es igual a $\angle AOB$.

6. Construcciones con regla solamente

En esta sección vemos la posibilidad de realizar algunas construcciones usando sólo regla (y no compás).

Empezamos con un ejemplo en el que se usan las propiedades de concurrencia y colinealidad de los teoremas de Ceva y Menelao (ver el apunte [Teoremas de Ceva y Menelao](#)).

6.1. Construcción. *Dados una recta ℓ y los puntos A, B, C y M , con A y B en ℓ , $C \notin \ell$, y M el punto medio del segmento AB , construir una recta paralela a ℓ que pase por C .*

✎ En forma análoga se puede construir M dada una recta paralela a ℓ por C .

✎ Trazamos la recta AC , y consideramos D en esta recta de modo que C esté entre A y D . Llamemos E a la intersección de las rectas DM y BC , y sea F la intersección de las rectas AE y BD . Entonces la recta CF es paralela a ℓ .

En efecto, en el triángulo ABD tenemos los puntos $C \in AD$, $F \in BD$ y $M \in AB$, y las rectas AF , BC y DM son concurrentes (en E). Por el teorema de Ceva, y usando que $AM = MB$,

$$\frac{AC}{CD} \frac{DF}{FB} = 1,$$

lo que implica que los triángulos ADB y CDF son semejantes, y por lo tanto $CF \parallel AB$.

Si permitimos que, usando sólo regla, queden también determinadas las intersecciones de una circunferencia con cualquier recta, tenemos la siguiente construcción notable de tangentes exteriores a una circunferencia, con la que ni siquiera necesitamos conocer el centro de ella.

6.2. Construcción. *Supongamos que P es un punto exterior a una circunferencia c , y que realizamos los siguientes pasos:*

1. Trazamos dos rectas por P que cortan a c en A, B y C, D respectivamente. Para fijar ideas, digamos que $P * A * B$ y $P * C * D$.

2. Construimos E , intersección de las rectas AC y BD , y F , intersección de las rectas AD y BC .
3. Sean Q y R las intersecciones de la recta EF con c .

Entonces las rectas PQ y PR son tangentes a c (en Q y R).

☞ Hay que tener cuidado con las posiciones de las rectas PA y PC de modo que las subsiguientes intersecciones existan: la construcción no siempre es posible para cualesquiera posiciones.

☞ La construcción que presentamos es válida también para cónicas (parábolas, elipses o hipérbolas).

Esto surge de la reciprocidad mencionada en la [sección 5](#), mediante la cual se puede pensar a toda cónica como el «recíproco» de una circunferencia, y de esta manera definir polares no sólo respecto de circunferencias sino también de cónicas, siendo verdaderos la mayoría de los resultados que hemos presentado en la [sección 5](#) para cónicas.

☞ Sean M y N las intersecciones de la recta EF con las rectas AB y CD respectivamente.

Mirando al triángulo EDC y los puntos $N \in CD$, $A \in CE$ y $B \in DE$, vemos que las rectas EN , DA y CB son concurrentes (en F) y la recta AB corta a la recta CD en P . Por [4.4](#), D, C, N, P forman una hilera armónica. Por [5.6](#), N está en la polar de P . De la misma forma, M está en la polar de P , y por lo tanto la recta MN es la polar de P .

Pero la recta MN es la recta EF , y por [5.5](#), esta recta corta a c en los puntos por donde pasan las tangentes desde P a la circunferencia c .

7. Notas sobre la bibliografía

El tema de potencia está tomado de Coxeter y Greitzer [1], aunque aparece en muchos libros. La exposición sobre circunferencia de Apolonio y la «cruz de bisectrices» toma ideas de Vasiliev y Gutenmájér [4] y Pedoe [2]. Sirve como buena introducción a los temas de inversión y circunferencias ortogonales, basados en Pedoe [2], e hileras armónicas, basados en Pedoe [2] y Shively [3]. Tópicos de polos y polares están tomados de Coxeter y Greitzer [1] y Shively [3].

En todos los casos nuestra presentación difiere de la que se hace en la bibliografía mencionada, especialmente en cuanto a la profundidad (acá vemos muchos menos resultados).

8. Bibliografía

- [1] H. S. M. COXETER Y S. L. GREITZER. *Retorno a la Geometría, La Tortuga de Aquiles n.º 1*. DLS-EULER editores, Madrid, 1993.
- [2] D. PEDOE. *Geometry: A Comprehensive Course*. Dover, New York, 1988.
- [3] L. S. SHIVELY. *Introducción a la geometría moderna (2da. ed.)*. Compañía Editorial Continental S.A., México, 1966.
- [4] N. B. VASÍLIEV Y V. L. GUTENMÁJÉR. *Rectas y curvas*. MIR, Moscú, 1980.