

Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2010

Movimientos rígidos

1. Isometrías	2
1.1. Ejercicios	4
2. Simetría o reflexión respecto de una recta	4
2.1. Ejercicios	7
3. Simetría respecto de un punto o central	8
3.1. Ejercicios	9
4. Traslación paralela	9
4.1. Ejercicios	11
5. Rotación	11
5.1. Ejercicios	14
6. Paridad de isometrías	15
6.1. Ejercicios	16
7. Orientación en el plano	16
7.1. Ejercicios	17

Una forma de estudiar matemáticamente un objeto es mediante las funciones a o desde ese objeto que preservan determinadas propiedades.

En el caso de geometría euclidiana, una clase de estas funciones son las que van del plano (o el espacio) en sí mismo preservando distancias, funciones que se llaman isometrías o movimientos rígidos, y que estudiamos en este apunte.

Siguiendo el programa de Erlangen de Klein [3] (quien a su vez siguió ideas de Sophus Lie) algunos autores basan la construcción de la geometría en movimientos rígidos, de modo que varios de los teoremas de este apunte se convierten en axiomas y recíprocamente, varios de los axiomas (o partes de ellos) que usamos pasan a ser teoremas.

Este apunte se basa en la presentación de Pogorélov [6, §10], pero difiere en varias partes, especialmente para evitar algunas imprecisiones en el tratamiento de traslaciones y rotaciones, para lo cual tomamos material de los libros de Martin [5] y Yaglom [8].

Estas imprecisiones vienen en su mayor parte de no considerar segmentos o ángulos dirigidos explícitamente, y nuestra solución intermedia es apelar a las simetrías (centrales o axiales) para representarlas. En una presentación menos

axiomática que la de Pogorélov, los ángulos dirigidos se introducen apelando a los sentidos «horario» y «antihorario» o a la medición de ángulos módulo 360° .

- ✎ Los axiomas de Birkhoff [2] sí incluyen la medición de ángulos módulo 360° , variantes de los cuales se encuentran en artículos como el de MacLane [4] y libros como el de Beatley y Birkhoff [1] o SMSG [7].

En los originales, tanto Birkhoff [2] como MacLane [4] deben apelar a la continuidad (el concepto de análisis matemático o topología) para poder obtener el equivalente al «axioma de Pasch» y la separación entre semirrectas (ver el [teorema 2.8](#) y los axiomas II, III y IV del apunte de axiomas).

Un poco para relacionar nuestra presentación con, por ejemplo, ángulos dirigidos, agregamos a la presentación de Pogorélov una sección sobre la paridad de movimientos ([sección 6](#)) y otra sobre orientación en el plano ([sección 7](#)).

Una de las ventajas de esta presentación a medias entre la de Pogorélov y una «a la Klein», es que aparecen naturalmente nociones de grupos no conmutativos.

Finalmente, siguiendo a Pogorélov, no tratamos las *simetrías con deslizamiento*, que son de importancia (entre otros) en el estudio de diseños geométricos. Estos movimientos se expresan como la composición de una traslación y una simetría axial, es decir cuando la composición de tres simetrías axiales no es una simetría axial (ver, e.g., el [corolario 6.4](#)).

1. Isometrías

1.1. Definición. Una función del plano en sí mismo es un *movimiento rígido* o simplemente *movimiento* si conserva las distancias, i.e., si X y Y son dos puntos del plano que se corresponden con X' e Y' respectivamente, entonces $XY = X'Y'$.

- ✎ Recordar que $XY = 0$ si $X = Y$.
- ✎ Pogorélov pide además que la transformación sea biunívoca, lo que es innecesario según veremos en el [teorema 1.9](#).
- Movimientos rígidos también se denominan *isometrías*. ✂

1.2. Lema. *La transformación identidad del plano en sí mismo, indicada por I , es un movimiento.*¹

- ✎ Recordemos que la identidad sobre el conjunto A es la aplicación $I_A : A \rightarrow A$ tal que $I_A(x) = x$ para todo $x \in A$ (ver el apunte *Notaciones*).

En este apunte la indicamos sencillamente por I , ya que sólo consideramos funciones definidas en todo el plano, y no hay mucha posibilidad de confusión.

1.3. Lema. *La composición de isometrías es una isometría.*

- ✎ Si mediante una transformación $P \rightarrow P'$ y $Q \rightarrow Q'$, y mediante otra $P' \rightarrow P''$ y $Q' \rightarrow Q''$, debe ser $PQ = P'Q'$ por la primera isometría, y $P'Q' = P''Q''$ por la segunda. Entonces $PQ = P''Q''$ y la composición es una isometría. Repitiendo el argumento, se ve que la composición de cualquier cantidad de isometrías es también una isometría.

1.4. Teorema. *Si, por efecto de una isometría, tres puntos A , B y C sobre una recta se transforman en los puntos A' , B' y C' respectivamente, entonces éstos están sobre una recta. Más aún, si $A * B * C$ entonces $A' * B' * C'$.*

¹ O sea que ¡nos movemos si no nos movemos!

- ☞ Si los puntos están en una recta, uno de ellos está entre los otros dos. Digamos $A * B * C$. Entonces $AC = AB + BC$ (por el axioma III.2) y por la isometría es $A'C' = A'B' + B'C'$. Por el teorema 4.18 del apunte de axiomas, debe ser $A' * B' * C'$ y por lo tanto A' , B' y C' están alineados.

1.5. Corolario. *Todo isometría transforma rectas en rectas, semirrectas en semirrectas y segmentos en segmentos.*

- ☞ Recordar que para demostrar la igualdad de conjuntos hay que demostrar dos inclusiones.
- ☞ Consideremos por ejemplo el caso de un segmento AB , donde $A \rightarrow A'$ y $B \rightarrow B'$ mediante la isometría. El teorema 1.4 dice que si $A * C * B$ y $C \rightarrow C'$ por la isometría, entonces $A' * C' * B'$.
Falta ver que si $A' * D * B'$ entonces existe E tal que $A * E * B$ tal que $E \rightarrow D$. Por el axioma IV.1 existe E en la semirrecta AB tal que $AE = A'D$. Por 3.4 del apunte de axiomas, resulta $A * E * B$, y la imagen de E por la transformación debe ser D (nuevamente por IV.1 en la semirrecta $A'B'$).

1.6. Corolario. *Si por una isometría dos puntos A y B permanecen fijos, todos los puntos de la recta AB permanecen fijos.*

- ☞ Usamos la desigualdad triangular como en la demostración de 1.4.

1.7. Corolario. *Si por una isometría tres puntos no alineados permanecen fijos, todos los puntos del plano permanecen fijos por esa isometría (i.e., es la transformación identidad).*

- ☞ Sean A, B, C los puntos no alineados que permanecen fijos, y sea P un punto arbitrario del plano. Por 1.6, todos los puntos de las rectas AB, AC, BC quedan fijos. Si P está en alguna de esas rectas, entonces P permanece fijo.
En otro caso consideremos un punto M del segmento AB (por ejemplo el punto medio). La recta MP corta al triángulo ABC en algún otro punto por el axioma de Pasch (teorema 2.8 en el apunte de axiomas), llamemos Q a esa intersección. Entonces M y Q permanecen fijos y por lo tanto todos los puntos de la recta MQ , entre ellos P .

1.8. Proposición. *Toda isometría transforma triángulos en triángulos iguales a los originales.*

- ☞ Considerar el triángulo formado por el vértice y un punto en cada lado del ángulo y sus imágenes y usar LLL.

1.9. Teorema. *Una isometría es una transformación biunívoca sobre el plano.*

- ☞ El resultado nos asegura que para demostrar que una transformación es una isometría basta ver que conserva las distancias, a diferencia de la presentación en Pogorélov con la cual deberíamos demostrar también que la transformación es biunívoca.
- ☞ Si la isometría transforma A en A' y B en B' , con $A \neq B$, debe ser $0 < AB = A'B'$ y por lo tanto $A' \neq B'$, i.e., la isometría es inyectiva.
Para ver que es suryectiva, consideramos un triángulo ABC su imagen $A'B'C'$, y un punto P' del plano.
Razonamos como en la demostración de 1.7: si P' está en alguna de las rectas $A'B', A'C'$ o $B'C'$ entonces es imagen de algún punto P en las rectas AB, AC o BC respectivamente, en otro caso consideramos un punto M' en el segmento $A'B'$, otro punto Q' en el triángulo $A'B'C'$ tal que Q' está en la recta $P'M'$, Q' es imagen de algún Q en el triángulo ABC , y toda la recta $Q'M' = P'M'$ es imagen de la recta QM .

1.10. Corolario. *Toda isometría tiene una transformación inversa (i.e., componiendo las dos obtenemos la identidad), que es una isometría.*

- ✎ Si la isometría es T , su inversa se indica por T^{-1} .
- ✎ En cursos de álgebra se estudia la teoría de grupos. Los resultados anteriores muestran que las isometrías forman un *grupo* donde la operación (equivalente a la suma para números) es la composición de funciones y el elemento neutro (equivalente al 0 para números con la suma) es la transformación identidad I . A diferencia de los números, el grupo no es conmutativo. Como las isometrías forman un grupo, se puede estudiar geometría desde un punto de vista algebraico.
- 🔗 Por ser una transformación biunívoca, la isometría tiene una transformación inversa, i.e., si $P \rightarrow P'$ por la transformación original, entonces $P' \rightarrow P$ por la transformación inversa. Pero si mediante la inversa $A \rightarrow B$ y $C \rightarrow D$, por la original debe ser $B \rightarrow A$, $D \rightarrow C$, y $BD = AC$, i.e., la inversa es una isometría.

1.11. Proposición. *Si dos transformaciones son tales que las imágenes de los puntos no alineados A, B y C son respectivamente A', B' y C' , entonces las transformaciones coinciden.*

O, de otra forma, las imágenes de un triángulo caracterizan a la transformación.

- ✎ Este es un resultado de unicidad. El de existencia es 2.9.
- 🔗 Supongamos que haya dos isometrías, digamos T_1 y T_2 que transforman el triángulo ABC en el $A'B'C'$. $T_2^{-1} \circ T_1$ es una isometría (por 1.10 y 1.3) que deja fijos a los puntos no alineados A, B y C . Por 1.7, $T_2^{-1} \circ T_1 = I$ y debe ser $T_1 = T_2$.

1.12. Definición. Dos figuras F y F' se dicen *iguales* si existe una isometría que transforma una en otra.

- ✎ Como en otros casos, sería más adecuado poner *congruencia* en vez de *igualdad*, pero seguimos a Pogorélov.
- ✎ Recordemos que para nosotros *figura* es sencillamente un subconjunto del plano. ➤

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Demostrar el corolario 1.5 para el caso de rectas y semirrectas.

Ejercicio 1.2. Una isometría transforma un ángulo en otro igual (con la misma medida).

2. Simetría o reflexión respecto de una recta

2.1. Definición. Dados un punto X y una recta ℓ , llamamos *simétrico de X respecto a ℓ* al punto X' obtenido de la siguiente forma:

- i) si $X \in \ell$, entonces $X' = X$,
 - ii) si $X \notin \ell$, consideramos p la perpendicular a ℓ que pasa por X y tomamos X' como el punto sobre p tal que está en el semiplano respecto de ℓ que no contiene a X y tal que $\text{dist}(X, \ell) = \text{dist}(X', \ell)$.
- ✎ Cuando $A \neq B$, o equivalentemente si $A \notin \ell$, decir que B es el simétrico de A respecto de la recta ℓ es lo mismo que decir que ℓ es la mediatriz del segmento AB . ➤

2.2. Definición. La transformación definida sobre todo el plano que a cada punto X le hace corresponder su simétrico respecto a la recta ℓ se llama *simetría axial con eje ℓ* , y la indicamos por σ_ℓ .

- También se llama *reflexión especular respecto de la recta ℓ* ,
- o simplemente *simetría respecto a ℓ o reflexión en ℓ* . ☞

2.3. Lema. Si r es una recta y $\sigma_r(P) = P'$ entonces $P = P'$ si y sólo si $P \in r$.
En particular, si para dos rectas r y s vale $\sigma_r = \sigma_s$, entonces $r = s$.

- ☞ Si $P \in r$, por definición $P = P'$, y si $P \notin r$, P y P' están en distintos semiplanos respecto de r (y por lo tanto son distintos).

Para la segunda parte si $P \in r \setminus s$ debe ser $P = \sigma_r(P) = \sigma_s(P) \neq P$.

2.4. Teorema. La simetría respecto a cualquier recta es una isometría.

- ☞ Sea ℓ el eje de simetría. Tenemos que ver que si $\sigma_\ell(P) = P'$ y $\sigma_\ell(Q) = Q'$ entonces $PQ = P'Q'$. Hay varios casos:

- i) $P, Q \in \ell$. Usamos 2.3.
- ii) $P \in \ell, Q \notin \ell$ (o viceversa). Si R es el pie de la perpendicular a ℓ por Q , y $R \neq P$, los triángulos rectángulos PRQ y PRQ' son iguales y $PQ = P'Q'$. Si $P = R$, entonces por la definición de simetría axial, resulta $PQ = P'Q'$.
- iii) $P \notin \ell, Q \notin \ell$. Sean R y S los pies de las perpendiculares a ℓ por P y Q respectivamente. Si $R \neq S$, como en el inciso anterior vemos que los triángulos rectángulos PRS y $P'SR$ son iguales, $PS = P'S$ y $\angle PSR = \angle P'SR$. El mismo resultado vale cuando $R = S$ entendiendo que $\angle aa = 0^\circ$.

$\angle PSQ = 90^\circ \pm \angle PSR$ dependiendo de si P y Q están en distintos semiplanos respecto de ℓ o el mismo. Del mismo modo, $\angle P'SQ' = 90^\circ \pm \angle P'SR$. Entonces $\angle PSQ = \angle P'SQ'$. Los triángulos PSQ y $P'SQ'$ tienen $PS = P'S$ (por definición de la simetría), $QS = Q'S$ y los ángulos en S iguales, por lo tanto son iguales (LAL) y $PQ = P'Q'$.

- ☞ Pogorélov omite la discusión de los casos en que P y Q están en distintos semiplanos respecto de r .

2.5. Lema. Sea r una recta. Entonces:

- a) σ_r es involutiva, i.e., $\sigma_r \circ \sigma_r = I$.
- b) Si a es un rayo de origen $O \in r$, y b es la imagen de a por σ_r , r contiene a la bisectriz de $\angle ab$.²

- ☞ a) Sale de la «simetría» de la definición.
- b) Sean $A \in a, B = \sigma_r(A) (B \in b)$, y M el punto medio del segmento AB ($M = A$ si $A = B$). $O \in r$ y $\sigma_r(O) = O$. Además, $OA = OB$ pues σ_r es una isometría. Si $a = b$, debe ser $A = B = M$ y $\sigma_r(M) = M$. Si $a \neq b$ (y entonces $A \neq B$), el triángulo AOB es isósceles en O y si M es el punto medio del segmento AB , OM es bisectriz de $\angle ab$. Como σ_r es una involución, la imagen por σ_r del segmento AB es el segmento AB y siendo σ_r una isometría (por 2.4) el punto medio M es tal que $\sigma_r(M) = M$. En cualquier caso, $\sigma_r(M) = M$ y $M \in r$ (por 2.3). Entonces el rayo OM (que es bisectriz de $\angle ab$) está contenido en r .

2.6. Corolario. Dados los rayos a y b , existe una única reflexión σ_r tal que la imagen de a por la reflexión es b .

² Convenimos en que la bisectriz de $\angle aa$ es a .

- ☛ Si $a = b$ tomamos r como la recta que los contiene, en otro caso tomamos la recta r que contiene a la bisectriz de $\angle ab$ (ver [ejercicio 2.3.b](#)). La unicidad se deduce de [2.5](#).

2.7. Lema. Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos iguales. Entonces pueden encontrarse tres o menos simetrías axiales tales que su composición transforma A en A' , B en B' y C en C' .

- ☛ Cuando $A = A'$, $B = B'$ y $C = C'$, podemos usar la composición de cualquier simetría axial y su inversa (que es una simetría axial por [2.5](#)).
Supongamos que $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$ (el caso en que alguno o varios de ellos coinciden queda como ejercicio). Mediante la reflexión respecto de la mediatriz de AA' , $A \rightarrow A'$, y digamos $B \rightarrow B''$, $C \rightarrow C''$. Si $B' \neq B''$, como $A'B' = AB = A'B''$, el triángulo $A'B'B''$ es isósceles con base $B'B''$. La mediatriz s de $B'B''$ contiene a A' y la reflexión en s transforma B'' en B' dejando a A' fijo. Supongamos que por esta segunda simetría $C'' \rightarrow C'''$. Como los triángulos $A'B'C'$ y $A'B'C''$ son iguales, si $C''' \neq C'$ la recta $C'C'''$ debe ser perpendicular a la recta $A'B'$, y la reflexión en esta recta mantiene a A' y B' fijos mientras que transforma C''' en C' . Es decir, componiendo las simetrías axiales respecto de la mediatriz de AA' , la mediatriz de $B'B''$, y la recta $A'B'$ transforma $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$ y $C \rightarrow C'$.

2.8. Proposición. Toda isometría puede ponerse como composición de no más de tres simetrías axiales.

- ☞ La descomposición no es única. Por ejemplo, la transformación identidad I puede escribirse de muchas formas distintas como la composición de cualquier simetría axial con sí misma.
- ☞ Desde el punto de vista de grupos (mencionados en las notas del corolario [1.10](#)), el resultado dice que las simetrías axiales son generadores del grupo de transformaciones.
En general, y como hacemos nosotros, se pueden estudiar primero las propiedades de los generadores, y luego ver cómo se mantienen o cambian vía la operación del grupo (en nuestro caso la composición).
- ☛ Tomemos tres puntos no alineados A, B, C y sus imágenes A', B', C' mediante la transformación. Por [2.7](#), podemos encontrar una composición de simetrías axiales que transforman $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$ y $C \rightarrow C'$, pero esta composición debe coincidir con la isometría original por [1.11](#).

2.9. Proposición. Dados los triángulos iguales ABC y $A'B'C'$, existe una única isometría que transforma $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$ y $C \rightarrow C'$.

- ☛ Para la existencia podemos considerar la composición de simetrías axiales en [2.7](#). La unicidad es [1.11](#).

2.10. Proposición. Si una isometría deja fijos (al menos) dos puntos, entonces o es la identidad o es una reflexión.

- ☛ Si A y B son puntos que quedan fijos por la isometría T , todos los puntos de la recta r por A y B también quedan fijos (por [1.6](#)). Si $T \neq I$, consideremos $P \notin r$ tal que $P' = T(P)$ es distinto de P . Sea Q la intersección de r y la recta PP' , y $R \neq Q$ en r . Los triángulos RQP y RQP' son iguales y como $P \neq P'$, P y P' están en distintos semiplanos respecto de r , $\angle RQP = \angle RQP' = 90^\circ$ y $P' = \sigma_r(P)$. Las imágenes de P , Q y R por T y por σ_r coinciden, y por [2.9](#) debe ser $T = \sigma_r$.
☞ Comparar con la demostración de [2.5](#).

2.11. Proposición.

- a) Si la isometría T deja fijo únicamente al punto O y c es una recta por O , entonces existe una única recta m por O tal que $T = \sigma_m \circ \sigma_c$.
- b) Si las rectas a , b y c se cortan en un único punto O y $T = \sigma_a \circ \sigma_b$, entonces existe una única recta m que pasa por O y tal que $T = \sigma_m \circ \sigma_c$.

En ambos casos m es la recta que contiene a la bisectriz de un rayo de c y su imagen por T .

☛ Acá vemos la existencia, la unicidad en ambos casos queda como ejercicio.

- a) Sea $P \in c$, $P \neq O$. Si $P' = T(P)$, siendo T una simetría y $T(O) = O$, $OP = OP'$ y la mediatriz m del segmento PP' contiene a O (porque o bien $P * O * P'$ o bien los puntos O , P y P' no están alineados y el triángulo OPP' es isósceles). Entonces $\sigma_m(T(P)) = \sigma_m(P') = P$ y $\sigma_m(T(O)) = O$, la isometría $\sigma_m \circ T$ deja fijos dos puntos (O y P) y debe ser una reflexión o la identidad (por 2.10). Si fuera la identidad, T sería la inversa de σ_m y por lo tanto $T = \sigma_m$, que deja fijos a más de un punto. Entonces $\sigma_m \circ T$ es una reflexión que deja fijos a O y P , i.e., $\sigma_m \circ T = \sigma_c$, y $T = \sigma_m \circ \sigma_m \circ T = \sigma_m \circ \sigma_c$.

- b) $T = \sigma_a \circ \sigma_b$ deja fijo al punto O . Si dejara fijo a otro punto, T sería la identidad o una reflexión σ_s .

Si $\sigma_a \circ \sigma_b = I$ debe ser $a = b$ y podemos tomar $r = c$.

Si $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_s$, tomemos $B \in b \setminus a$, de modo que $B' = \sigma_s(B) = \sigma_a(B) \neq B$ (pues $B \notin a$), a y s deben ser las mediatrices del segmento BB' , y por lo tanto iguales. Entonces $\sigma_b = \sigma_a \circ \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_a \circ \sigma_s = I$ lo que es imposible.

Por lo tanto si $a \neq b$, T deja fijo únicamente a O y podemos usar el inciso anterior.

2.12. Corolario. Si las rectas a , b y c son concurrentes, $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ es una simetría axial.

☛ Existe m tal que $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_m \circ \sigma_c$, por lo tanto $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_m \circ \sigma_c \circ \sigma_c = \sigma_m$.

2.13. Definición. Si la simetría respecto a la recta a transforma la figura F en sí misma, la figura se dice *simétrica respecto a a* , y a es el *eje de simetría* de la figura. ☞

Ejemplo 2.1. Un rombo es simétrico respecto de cualquiera de las rectas que contienen a sus diagonales.

☛ Basta ver que los vértices del rombo se transforman en vértices, ya que segmentos se transforman en segmentos (por 1.5). Pero esto se deduce de que las diagonales se cortan en el punto medio (un rombo es un paralelogramo) y lo hacen perpendicularmente (por 1.6 y 1.11 del apunte *Cuadriláteros*).

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.1. Supongamos que a y b son rectas que se cortan. ¿Es lo mismo hacer una simetría respecto de a seguida de una respecto de b , que hacer primero una simetría respecto de b seguida de una respecto de a ? ¿Y si las rectas no se cortan?


Ejercicio 2.2. Demostrar la unicidad en la [proposición 2.11](#).

Ejercicio 2.3.

- a) La mediatriz es eje de simetría de un segmento.
- b) La recta que contiene a la bisectriz es eje de simetría de un ángulo.
- c) Se puede transformar un segmento en otro igual usando a lo sumo dos simetrías axiales.
- d) Encontrar una isometría que se pueda expresar como composición de tres simetrías axiales en (al menos) dos formas distintas.

Ejercicio 2.4. Si a y b son ejes de simetría de una figura, la recta simétrica de a respecto de b también es eje de simetría.


Ejercicio 2.5.

- a) Si O es el incentro del triángulo ABC , ver que $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$. Como consecuencia, ningún triángulo tiene dos bisectrices perpendiculares entre sí.
- b) Construir el triángulo ABC dados el punto A y las rectas que contienen a las bisectrices correspondientes a B y C (que se cortan en O).
Sugerencia: Los simétricos de A respecto de las rectas que contienen a las bisectrices están en la recta BC .
 También puede resolverse usando rotaciones (que vemos un poco más adelante) rotando la recta AO con centro en A un ángulo de $\frac{1}{2} \angle A = \angle \ell_2 \ell_3 - 90^\circ$ hacia cada lado, donde ℓ_2 y ℓ_3 son las rectas que contienen a las bisectrices de $\angle B$ y $\angle C$ respectivamente.


Ejercicio 2.6. Consideremos una recta ℓ y dos puntos, A y B que no están en ella. Encontrar un punto $C \in \ell$, tal que $AC + BC$ sea mínima. *Sugerencia:* considerar primero el caso en que A y B están sobre distintos semiplanos respecto de ℓ .

3. Simetría respecto de un punto o central

3.1. Definición. Dados un punto X y un punto O , llamamos *simétrico de X respecto a O* al punto X' obtenido de la siguiente forma:


- i) si $X = O$, entonces $X' = X$,
- ii) si $X \neq O$, entonces tomamos X' el punto sobre la semirrecta complementaria al rayo OX tal que $OX = OX'$. 

3.2. Definición. La transformación definida sobre todo el plano que a cada punto X le hace corresponder su simétrico respecto a punto O se llama *simetría respecto del punto O* o *simetría central de centro O* .

- Indicamos la simetría con centro O por σ_O . 

3.3. Lema. *Supongamos que las rectas perpendiculares a y b se cortan en O . Entonces*

$$\sigma_O = \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a.$$

 Veamos la igualdad $\sigma_O = \sigma_a \circ \sigma_b$, la otra es similar. Sea $P' = \sigma_b(P)$, $P'' = \sigma_a(P')$. Si $P \in a$, $\sigma_O(P) = P' = P'' \in a$. Si $P \in b$, $P' = P$ y $P'' = \sigma_O(P)$. En otro caso, sean $B \in b$ la proyección de P en b y $A \in a$ la proyección de P' en a . Los triángulos rectángulos PBO , $P'BO$, $P'AO$ y $P''AO$ son iguales, $PO = P'O = P''O$ y

$$\angle POP'' = \angle POB + \angle BOP' + \angle P'OA + \angle AOP'' = 2(\angle BOP' + \angle P'OA) = 2 \times 90^\circ$$

es llano, de modo que $P'' = \sigma_O(P)$.

3.4. Corolario. Una simetría central es una isometría.

☞ Usar 3.3 y 1.3.

3.5. Definición. Si la simetría respecto al punto O transforma la figura F en sí misma, la figura se dice *simétrica respecto a O* , y O es el *centro de simetría* de la figura. ☞

Ejemplo 3.1. Un paralelogramo es simétrico respecto del punto de intersección de sus diagonales.

☞ Como en el [ejemplo 2.1](#), basta ver que los vértices se transforman en vértices, pero esto se deduce de que las diagonales se cortan en sus puntos medios (por 1.6 del apunte *Cuadriláteros*).

3.1. Ejercicios

Ejercicio 3.1. Una simetría central es una involución.

Ejercicio 3.2. Supongamos que P y Q son dos puntos distintos. ¿Es lo mismo hacer una simetría respecto de P seguida de una respecto de Q , que hacer primero una simetría respecto de Q seguida de una respecto de P ?

Ejercicio 3.3. Hacer la construcción del [ejercicio 1.13](#) del apunte de cuadriláteros usando una simetría respecto del punto medio de la diagonal AC .

Ejercicio 3.4. Una simetría central transforma rectas en rectas paralelas a las originales.

Ejercicio 3.5. Ningún triángulo tiene centro de simetría.

Ejercicio 3.6. Si A y B , $A \neq B$, son centros de simetría de una figura, entonces también es centro de simetría el punto A' simétrico de A respecto de B . Por lo tanto, la figura tiene infinitos centros de simetría.

☞ O , no puede haber una figura con exactamente dos centros de simetría, ni con tres, ni con...

Encontrar una figura (que no sea todo el plano) con esta propiedad.

4. Traslación paralela

La idea de traslación paralela es la de mover el plano (pensemos en una hoja de papel sobre una mesa) según una línea recta «sin girarlo», y la definición dada por Pogorélov como «el movimiento rígido en el que los puntos se desplazan a una misma distancia según rectas paralelas» es intuitivamente correcta pero un poco difícil de manejar formalmente.

La noción se puede formalizar mediante la usualmente llamada *ley del paralelogramo*: fijando A y B , la transformación asociada asigna a cada punto P el punto P' tal que $PABP'$ es un paralelogramo. A su vez, esta eventual definición es inconveniente cuando A , B y P están alineados, y debemos dar una definición que sirva también en este caso.

Una posibilidad es considerar como P' al simétrico de A respecto del punto medio del segmento BP . Otra posibilidad, que seguimos acá, es escribirla como composición de simetrías centrales.

4.1. Definición. Dados dos puntos A y B , sea M el punto medio del segmento AB .³ La *traslación paralela en A - B* o simplemente *traslación en A - B* , indicada por τ_{AB} , es la transformación definida por

$$\tau_{AB} = \sigma_M \circ \sigma_A.$$

✎ Observar que no es la definición en Pogorélov. ➤

4.2. Lema. Sean A y B dos puntos del plano y M es su punto medio. Entonces:

- a) τ_{AB} es una isometría.
- b) $\tau_{AB}(A) = B$.
- c) Si $A = B$, $\tau_{AB} = I$.
- d) La inversa de una traslación es una traslación.
- e) Si $A \neq B$, r es la recta AB , $a \perp r$ tal que $A \in a$, y $m \perp r$ tal que $M \in m$, debe ser $\tau_{AB} = \sigma_m \circ \sigma_a$. Es decir, una traslación se puede poner como la composición de dos simetrías axiales respecto de rectas paralelas (y recíprocamente).

- ✎ a) Usar 3.4 y 1.3.
- b) $\tau_{AB}(A) = \sigma_M(\sigma_A(A)) = \sigma_M(A) = B$.
- c) Si $A = B$, entonces $M = A$ y σ_A es una involución.
- d) $\tau_{AB}^{-1} = (\sigma_M \circ \sigma_A)^{-1} = \sigma_A^{-1} \circ \sigma_M^{-1} = \sigma_A \circ \sigma_M = \tau_{MC}$ donde C es el simétrico de M respecto de A .
- e) Por 3.3 podemos poner $\sigma_A = \sigma_r \circ \sigma_a$ y $\sigma_M = \sigma_m \circ \sigma_r$. Entonces $\tau_{AB} = \sigma_M \circ \sigma_A = \sigma_m \circ \sigma_r \circ \sigma_r \circ \sigma_a = \sigma_m \circ \sigma_a$ pues $\sigma_r \circ \sigma_r = I$ (por 2.5).

4.3. Proposición. Sean A y B puntos distintos del plano, r la recta AB , C y D tales que $D = \tau_{AB}(C)$.

Entonces:

- a) Si $C \notin r$, el cuadrilátero $CABD$ es un paralelogramo.
- b) Si $C \notin r$, $\tau_{AB} = \tau_{CD}$.
- c) Para todo C , $CD = AB$, $CD \parallel AB$ y $\tau_{AB} = \tau_{CD}$.
- d) La inversa de τ_{AB} es τ_{BA} .

✎ a) recupera la «ley del paralelogramo» que mencionamos al principio de esta sección.

✎ Una forma de leer $\tau_{AB} = \tau_{CD}$ en b) y c) es: si mediante una traslación en A - B , el punto C se transforma en D , entonces las traslaciones paralelas en A - B y en C - D coinciden, o bien existe una única traslación que transforma C en D .

✎ a) Sean M el punto medio del segmento AB , $Q = \sigma_A(C)$ de modo que $\sigma_M(Q) = D$, y $R = \sigma_M(C)$. Por construcción, las diagonales del cuadrilátero $CQRD$ se cortan en su punto medio (que es M) y por lo tanto es convexo y un paralelogramo (por el ejercicio 1.1 y el teorema 1.7 del apunte Cuadriláteros).

σ_M es una isometría y transforma el punto medio del segmento CQ (que es A) en el punto medio del segmento RD . Como $B = \sigma_M(A)$, B es el punto medio del segmento RD . Entonces $CABD$ también es un paralelogramo.

b) Consideremos un punto Q que no está ni en r ni en la recta CD , y sean $R = \tau_{AB}(Q)$ y $S = \tau_{CD}(Q)$. Por el inciso anterior, $CABD$, $QABR$ y $QCDS$ son paralelogramos, pero entonces $R = S$. Hacemos esto para tres Q no alineados y usamos 1.11.

³ Convenimos en que el punto medio de AA es A .

- c) Se deduce del anterior si C no está en la recta r . Para C en esta recta, consideremos $E \notin r$ y $F = \tau_{AB}(E)$. Por el inciso anterior, $\tau_{AB} = \tau_{EF} = \tau_{CD}$, y en particular $CD = EF = AB$.
- d) La inversa de una traslación es una traslación (por 4.2.d), y τ_{BA} es la única que aplica B en A .

4.1. Ejercicios

Ejercicio 4.1. Sea ℓ la recta por A y B ($A \neq B$). Entonces por una traslación en A - B :

- a) Rectas paralelas a ℓ permanecen fijas (i.e., se transforman en sí mismas).
 b) La imagen correspondiente a una recta m secante con ℓ es paralela a m .


Ejercicio 4.2. Dos simetrías axiales, realizadas sucesivamente respecto a dos rectas paralelas, equivalen a una traslación paralela.

Ejercicio 4.3. $\tau_{AB} = \tau_{BA}$ si y sólo si $A = B$. En particular, cuando $A \neq B$ la traslación en A - B no es involutiva.

Ejercicio 4.4. Si $ABCD$ es un paralelogramo, $\sigma_A \circ \sigma_B = \sigma_D \circ \sigma_C$.

Ejercicio 4.5. La composición de dos traslaciones es una traslación. *Sugerencia:* si las traslaciones son en A - B y en C - D , podemos poner $\tau_{CD} = \tau_{BE}$ para algún E .

Ejercicio 4.6. La composición de traslaciones es *conmutativa*, i.e., aplicar una traslación seguida de una segunda, es lo mismo que aplicar inicialmente la segunda y luego la primera.

 Comparar con el [ejercicio 2.1](#).

Ejercicio 4.7. Un río, cuyas costas son líneas paralelas, separa las ciudades A y B (no necesariamente sobre las costas), y se desea construir un puente MN sobre el río (perpendicular a éste). ¿Cómo deben ubicarse los puntos M y N sobre las costas de modo de minimizar el camino $AMNB$?

Ejercicio 4.8. Dada una recta ℓ y un número positivo d , encontrar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a ℓ es d .

Ejercicio 4.9. Dadas dos rectas secantes y una distancia d , encontrar el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las distancias del punto a las rectas es d . *Ayuda:* a) resulta ser un rectángulo, b) mirar el [ejercicio 5.4](#) del apunte de axiomas.

5. Rotación

Como en el caso de las traslaciones paralelas, las rotaciones son sencillas de entender: poner un dedo en el centro de una hoja de papel sobre la mesa y girar la hoja. También como en el caso de traslación, la definición de rotación dada por Pogorélov es difícil de manejar formalmente, por lo que trataremos de seguir los pasos de la [sección 4](#).

Una diferencia importante entre traslaciones y rotaciones es que mientras mantengamos el mismo centro las rotaciones son esencialmente objetos de dimensión 1 (la circunferencia), mientras que una traslación en A - B , aún cuando

mantengamos fijo A , depende de la distancia AB y la dirección en que ubiquemos B y es un objeto de dimensión 2. Claro que las rotaciones tienen la complicación de que al sumar ángulos podemos superar los 180° y debemos tener esto en cuenta.

Notación: Por conveniencia, en esta sección usamos las siguientes notaciones:

- a^* indica la recta que contiene al rayo a .
- Para una transformación T del plano en sí mismo y un subconjunto A del plano indicamos por $T(A)$ la imagen de A por T ,

$$T(A) = \{y : \text{existe } x \in A \text{ con } y = T(x)\}.$$

Por ejemplo, si T es una isometría y r es una recta, $T(r)$ es una recta. \gg

5.1. Definición. Dadas las semirrectas a y b con un origen común, sea m la bisectriz de $\angle ab$. La *rotación en a - b* , indicada por ρ_{ab} , es la transformación definida por

$$\rho_{ab} = \sigma_{m^*} \circ \sigma_{a^*}.$$

- El vértice de $\angle ab$ es el *centro* de la rotación.
- El *ángulo de la rotación* es $\angle ab$.
- \gg Hay dos rotaciones con el mismo ángulo y centro: ρ_{ab} y ρ_{ba} .
- \gg Como en el caso de traslaciones, la definición de rotación es distinta a la de Pogorélov.
- \gg No es necesario explicitar el centro, pero toda rotación tiene asociado uno.
- \gg Recordemos que usamos las convenciones $\angle aa = 0^\circ$ y que a es la bisectriz de $\angle aa$. \gg

5.2. Lema. Sean a y b dos semirrectas de origen O . Entonces

- a) ρ_{ab} es una isometría.
- b) $\rho_{ab}(O) = O$ y (siendo ρ_{ab} isometría) $OP = O\rho_{ab}(P)$ para todo P .
- c) Para todo $A \in a$, $\rho_{ab}(A) \in b$, y $b = \rho_{ab}(a)$ (la imagen de a por ρ_{ab}).
- d) Si $a = b$, $\rho_{ab} = I$.
- e) Si $\angle ab = 180^\circ$, $\rho_{ab} = \sigma_O$.
- f) La inversa de una rotación es una rotación.

\gg Miramos sólo algunos incisos, los otros son sencillos o similares a 4.2. Suponemos que m es la bisectriz de $\angle ab$.

- e) Como $\angle ab$ es llano tiene dos bisectrices, pero en cualquier caso la recta m^* que las contiene es perpendicular a la recta a^* que contiene a a , y el resultado es consecuencia de 3.3.
- f) $\rho_{ab}^{-1} = (\sigma_{m^*} \circ \sigma_{a^*})^{-1} = \sigma_{a^*}^{-1} \circ \sigma_{m^*}^{-1} = \sigma_{a^*} \circ \sigma_{m^*} = \rho_{mn}$ donde $n = \sigma_{a^*}(m)$, i.e., tal que a es bisectriz de $\angle mn$.

5.3. Proposición. Si una isometría deja fijo exactamente un punto, entonces es una rotación con centro en ese punto.

Recíprocamente, una rotación en a - b con $a \neq b$ deja fijo exactamente un punto (el origen de $\angle ab$). En consecuencia o bien una rotación deja exactamente un punto fijo o bien deja a todos los puntos fijos (y es la identidad).

☛ Para la primer parte, usar 2.11 y la definición que dimos de rotación.

Para la segunda parte, si la rotación $\rho_{ab} = \sigma_{m^*} \circ \sigma_{a^*}$ deja fijo más de un punto, por 2.10 o bien $\rho_{ab} = I$ o bien $\rho_{ab} = \sigma_c$ para alguna recta c .

Si $\rho_{ab} = \sigma_{m^*} \circ \sigma_{a^*} = I$, $\sigma_{m^*} = \sigma_{a^*}$ y $m^* = a^*$ (por 2.3), pero como m es bisectriz de $\angle ab$, m y a no pueden ser rayos opuestos, y debe ser $a = m = b$. Si $\rho_{ab} = \sigma_{m^*} \circ \sigma_{a^*} = \sigma_c$, c deja fijo el vértice de $\angle ab$ y (por 2.12) $\sigma_{m^*} \circ \sigma_{a^*} \circ \sigma_c = I$ es una simetría axial, lo que es imposible (I deja todos los puntos fijos y una simetría axial no).

5.4. Lema. Sean r y t rectas que se cortan en O . Entonces $\sigma_r \circ \sigma_t$ es una rotación.

☛ Sea $S = \sigma_r \circ \sigma_t$, y supongamos $r \neq t$ (en otro caso $S = I$ que es una rotación).

Sean a un rayo de t de origen O y sea $b = \sigma_r(a)$ de modo que la bisectriz m de $\angle ab$ está contenida en r . Entonces $\rho_{ab} = \sigma_{m^*} \circ \sigma_{a^*} = \sigma_r \circ \sigma_t$

5.5. Proposición. Consideremos rayos a , b , c y d con un origen común O , y sea m la bisectriz de $\angle ab$.

a) Si $d = \rho_{ab}(c)$ entonces $\rho_{ab} = \rho_{cd}$.

b) Hay una única rotación que transforma a en b .

c) $\rho_{ab}^{-1} = \rho_{ba}$, y en particular $\rho_{ab} = \sigma_{b^*} \circ \sigma_{m^*}$.

d) $\rho_{bc} \circ \rho_{ab}$ es una rotación y $\rho_{ac} = \rho_{bc} \circ \rho_{ab}$. Además, si t es la bisectriz de $\angle bc$ se tiene $\rho_{ac} = \sigma_{t^*} \circ \sigma_{m^*}$.

e) Sean t la bisectriz de $\angle bc$ y $d = \sigma_{t^*}(a)$. Entonces $d = \rho_{ab}(c) = \rho_{ac}(b)$.

f) Si $d = \rho_{ab}(c)$ entonces $\angle ab = \angle cd$ (y $\angle ac = \angle bd$).

☞ e) y f) forman el equivalente a la «ley del paralelogramo» para una traslación.

La bisectriz t en e) juega el rol del punto medio E de BC en las traslaciones: si $D = \sigma_E(A)$ vale $D = \tau_{AB}(C) = \tau_{AC}(B)$.

En f) estamos diciendo el equivalente a que lados opuestos tienen igual medida.

☛ a) Sea m la bisectriz de $\angle ab$. Por 2.11.b), $\rho_{ab} = \sigma_{m^*} \circ \sigma_{a^*} = \sigma_{n^*} \circ \sigma_{c^*}$, donde n es la bisectriz de $\angle cd$. Entonces $\rho_{cd} = \sigma_{n^*} \circ \sigma_{c^*} = \rho_{ab}$.

b) La rotación ρ_{ab} transforma a en b . Para ver que es única, supongamos que $\rho_{cd}(a) = b$, y consideremos los casos $a = b$ y $a \neq b$.

Si $a = b$, la rotación que transforma a en a deja fijos a más de un punto y entonces debe ser la identidad (por 5.3). Desde ya que $\rho_{ab} = I$ (por 5.2.d)).

Supongamos que $a \neq b$, y que u y v son rayos con origen común O' tales que $T = \rho_{uv}(a) = b$. T debe dejar fijo O (pues es el origen común de a y b) y no puede dejar fijo otro punto (pues $b = T(a) \neq a$ y usamos 5.3). Entonces $O' = O$ y por a) de $\rho_{uv}(a) = b$ tenemos $\rho_{uv} = \rho_{ab}$.

c) La transformación inversa de ρ_{ab} es una rotación (por 5.2.f)) que transforma el rayo b en a , ρ_{ba} también transforma b en a y entonces $\rho_{ab}^{-1} = \rho_{ba}$.

Además $\rho_{ba} = \sigma_{m^*} \circ \sigma_{b^*}$ y $\rho_{ab} = \rho_{ba}^{-1} = (\sigma_{m^*} \circ \sigma_{b^*})^{-1} = \sigma_{b^*}^{-1} \circ \sigma_{m^*}^{-1} = \sigma_{b^*} \circ \sigma_{m^*}$.

☞ O podríamos usar directamente 2.11.b).

d) Veamos que $S = \rho_{bc} \circ \rho_{ab}$ es una rotación.


☞ Aquí debemos tener cuidado si la suma de las medidas de los ángulos supera 180° .

Por c) podemos poner $\rho_{ab} = \sigma_{b^*} \circ \sigma_{m^*}$, y por lo tanto $S = \rho_{bc} \circ \rho_{ab} = \sigma_{t^*} \circ \sigma_{b^*} \circ \sigma_{b^*} \circ \sigma_{m^*} = \sigma_{t^*} \circ \sigma_{m^*}$ que por 5.4 es una rotación (con centro O) que transforma a en b (primero a en b y luego b en c).

La rotación ρ_{ac} también transforma a en c , y por **a)** debe ser igual a S , i.e., $\rho_{ac} = \rho_{bc} \circ \rho_{ab}$.

- e)** $\rho_{ac} = \sigma_{t^*} \circ \sigma_{m^*}$ (por **d)** y $\rho_{ac}(b) = \sigma_{t^*}(\sigma_{m^*}(b)) = \sigma_{t^*}(a) = d$. Del mismo modo, si u es la bisectriz de $\angle ac$ tendremos $\rho_{ab} = \sigma_{t^*} \circ \sigma_{u^*}$ y $\rho_{ab}(c) = d$.
- f)** Por **e)** podemos poner $\rho_{ac}(b) = d$. La isometría ρ_{ac} transforma $\angle ab$ en $\angle cd$, y por lo tanto deben tener la misma medida. De la misma forma usando ρ_{ab} se ve que $\angle ac = \angle bd$.

Para concluir esta sección, observemos que las definiciones y demostraciones sobre rotaciones en Pogorélov son distintas de las que damos acá pero equivalentes:


- La primera parte de la **proposición 5.3** es el enunciado del teorema 10.5 en Pogorélov. Aquí la demostración es sencilla por la definición que damos de rotación.
 - **5.5.f)** es la definición de rotación de Pogorélov.
 - El corolario del teorema 10.5 de Pogorélov es nuestra definición de rotación.
 - La demostración del teorema 10.5 en Pogorélov es equivalente a nuestras demostraciones de **5.5.e)** y **f)**.
 - **5.5.e)** puede ilustrarse como la figura 75 (pág. 74) en Pogorélov.
-  En la demostración del teorema 10.5 de Pogorélov no es claro que desde el punto D se pueda cortar a los rayos en únicos puntos, por ejemplo si alguno está contenido en la recta OD .

5.1. Ejercicios

Ejercicio 5.1. Una simetría axial no puede escribirse como composición de traslaciones, rotaciones o simetrías centrales.

Ejercicio 5.2. Si una recta ℓ se transforma mediante una rotación en la recta ℓ' , ¿cómo se relacionan los ángulos en que se cortan ℓ y ℓ' con el ángulo de la rotación? ¿Y si $\ell \parallel \ell'$?

Ejercicio 5.3.

- a)** La composición de rotaciones de un mismo centro es una rotación (con el mismo centro). *Sugerencia:* cuando los ángulos tienen un lado común se puede usar **5.5.d)**.
- b)** En el inciso anterior, ¿cómo se relacionan los ángulos de las rotaciones originales con el de la rotación resultante?
-  Atención si la suma de las medidas de los ángulos supera 180° .

Ejercicio 5.4. Las rectas a, b, c, d satisfacen $a \perp b$ y $c \perp d$. Si a y c se cortan, ver que b y d se cortan formando los mismos ángulos que forman a y c .

Ejercicio 5.5. Dadas tres rectas paralelas, construir un triángulo equilátero con un vértice en cada una de ellas.

Ejercicio 5.6. Sean dados el punto A y una circunferencia. Encontrar el lugar geométrico de los vértices M de triángulos equiláteros AMN cuando N varía sobre la circunferencia.

Ejercicio 5.7. Dado el cuadrado $ABCD$, construir P sobre BC y Q sobre CD de modo tal que el triángulo APQ sea equilátero.

Ejercicio 5.8. Dada una recta y un punto A no en ella, encontrar el lugar geométrico de los vértices D de los cuadrados $ABCD$ con B en la recta dada.

6. Paridad de isometrías

La [proposición 2.8](#) nos dice que basta conocer las propiedades de las simetrías axiales para conocer las propiedades de todas las isometrías. Podemos hacer una primera clasificación de las isometrías según la cantidad de simetrías axiales necesarias para representarlas.

6.1. Definición. Una isometría es *par* si puede escribirse como la composición de un número par de simetrías axiales y es *impar* en otro caso. \asymp

En esta sección nos preocuparemos por ver que no existe una isometría que sea par e impar a la vez, dando sentido a la definición anterior. La presentación está basada en el libro de Martin [5, cap. 7].

6.2. Lema. Sean P un punto y a y b rectas. Entonces existen rectas c y d con $P \in c$ tales que $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c$.

☞ Si las rectas a y b se cortan en un punto, usamos [2.11](#). Si $a \parallel b$, consideramos $c \parallel a$ y $r \perp a$ tales que c y r se cortan en P . Sea $Q \in b \cap r$, $R \in a \cap r$, $S = \sigma_R(Q)$, entonces por [4.2.e](#)) es $\sigma_a \circ \sigma_b = \tau_{QS}$. Si $P' = \tau_{QS}$ tenemos $\tau_{QS} = \tau_{PP'}$ (por [4.3.c](#)). Usando nuevamente [4.2.e](#)), $\tau_{PP'} = \sigma_d \circ \sigma_c$ donde $d \parallel c$ y d contiene al punto medio de PP' . Es decir, $\sigma_a \circ \sigma_b = \tau_{QS} = \tau_{PP'} = \sigma_d \circ \sigma_c$ con $P \in c$.

6.3. Proposición. Sean a , b , c y d cuatro rectas. Entonces existen dos rectas v y w tales que

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_d = \sigma_v \circ \sigma_w.$$

☞ Sea $P \in d$. Por [6.2](#) existen rectas r y s , con $P \in s$ tales que $\sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_r \circ \sigma_s$. Usando nuevamente [6.2](#), podemos encontrar rectas u y v tales que $P \in u$ y $\sigma_a \circ \sigma_r = \sigma_t \circ \sigma_u$. Las rectas u , s y d son concurrentes en P , y por [2.12](#) existe w tal que $\sigma_u \circ \sigma_s \circ \sigma_d = \sigma_w$. En total tenemos

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_d = \sigma_a \circ \sigma_r \circ \sigma_s \circ \sigma_d = \sigma_v \circ \sigma_u \circ \sigma_s \circ \sigma_d = \sigma_v \circ \sigma_w.$$

6.4. Corolario. Toda isometría par se puede poner como composición de dos reflexiones y toda isometría impar es una reflexión o la composición de tres reflexiones. Además, ninguna isometría puede ser par e impar a la vez.

☞ Si una isometría se escribe como la composición de n reflexiones, con $n \geq 4$, entonces puede ponerse como la composición de $n-2$ reflexiones (por ejemplo agrupando las 4 últimas y usando [6.3](#)), lo que demuestra la primera parte.

Para la segunda parte, una simetría par de la forma $\sigma_a \circ \sigma_b$ es la identidad (si $a = b$) que deja fijos todos los puntos, una rotación (si a y b se cortan en un único punto) que deja fijo exactamente un punto, o una traslación (si $a \parallel b$) que no deja fijo ningún punto, y $\sigma_a \circ \sigma_b$ no puede ser una reflexión que deja fijos exactamente a los puntos de una recta.

Si $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_c \circ \sigma_d \circ \sigma_e$, entonces $\sigma_a = \sigma_c \circ \sigma_d \circ \sigma_e \circ \sigma_b = \sigma_r \circ \sigma_s$ para algún par de rectas (por [6.3](#)), y ya hemos visto que una reflexión no puede ponerse como la composición de dos reflexiones.

6.1. Ejercicios

Ejercicio 6.1. La transformación identidad puede pensarse como una traslación en $A-A$ o una rotación en $\angle aa$. Pero no puede pensarse como una simetría axial o central: ¿por qué?

Ejercicio 6.2. La composición de dos movimientos:

- a) Es par si ambos son pares o si ambos son impares.
 - b) Es impar si uno de ellos es par y el otro no.
- ✎ Es como la regla de los signos para el producto de números: « $+$ \times $+$ = $+$ », « $+$ \times $-$ = $-$ », etc.

7. Orientación en el plano

Cuando consideramos la traslación paralela en $A-B$ estamos dando un orden a los puntos, e implícitamente dando una orientación en la recta AB donde la orientación *positiva* es la de la semirrecta AB y la *negativa* la de la semirrecta opuesta a la AB . Esto induce una orientación en toda recta paralela a la recta $a = AB$: si $a' \parallel a$ y $A' \in a'$, considerando la imagen B' de la traslación en $A-B$, resultará $A'B' = a'$ y podemos definir la orientación positiva en a' como la de la semirrecta $A'B'$.

La discusión anterior es esencialmente en dimensión 1 (rectas o rectas paralelas), pero para llevar las ideas al plano (de dimensión 2) debemos tener en cuenta no sólo semirrectas sino también semiplanos.

7.1. Lema. Dadas las semirrectas a y b , y semiplanos correspondientes α y β , existe una única isometría que transforma a en b y α en β .

✎ Ejercicio 7.1.

7.2. Definición (Orientación en el plano). Dadas las semirrectas a y b , y semiplanos correspondientes α y α' , decimos que (a, α) y (b, β) tienen *igual orientación* si la isometría en el [lema 7.1](#) es par, y en otro caso que tienen *distinta orientación*.

✎ Cambia la orientación si «miramos la hoja desde el otro lado» o «damos vuelta la hoja». Ver el [ejercicio 7.2](#). ✎

7.3. Definición (Sentido de rotaciones). Dadas las semirrectas a y b de origen O , y las semirrectas a' y b' de origen O' , consideremos α el semiplano de a que contiene a b y α' el semiplano de a' que contiene a b' . Decimos que ρ_{ab} y $\rho_{a'b'}$ tienen *el mismo sentido* o *la misma orientación* si (a, α) y (a', α') tienen la misma orientación. ✎

Del mismo modo podemos definir la orientación de triángulos o poligonales convexas en general. Por ejemplo, los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen la misma orientación si las rotaciones ρ_{ab} y $\rho_{a'b'}$ tienen el mismo sentido, donde a, b, a', b' son respectivamente las semirrectas $AB, AC, A'B'$ y $A'C'$.

Si tomamos arbitrariamente una semirrecta a_0 y un semiplano α_0 correspondiente, podemos definir como *orientación positiva* al par (a_0, α_0) , y como *orientación negativa* al par (a_0, α'_0) , donde α'_0 es el otro semiplano correspondiente a a_0 , y podemos hablar triángulos orientados positiva o negativamente o el sentido de ángulos.

Así, cuando usamos coordenadas cartesianas (x, y) , normalmente consideramos el rayo $a_0 = \{(x, y) : x > 0\}$ y α_0 como el semiplano que contiene a la semirrecta $b_0 = \{(x, y) : y > 0\}$.

Graficando los ejes coordenados con la semirrecta a_0 (de x positivos) hacia la derecha y la semirrecta b_0 (de y positivos) hacia arriba, definimos el sentido positivo o «antihorario» el de la rotación $\rho_{a_0 b_0}$, y el negativo o «antihorario» el de $\rho_{b_0 a_0}$.

Estos conceptos están relacionados con la forma concreta (física) de graficar, y muchas veces se pone la semirrecta de y positivos hacia abajo (por ejemplo cuando se trabaja en monitores de computadoras o con la gravedad en física).

Los ángulos heredan la orientación dada por (a_0, α_0) (o a_0 y b_0), midiéndose el ángulo $\angle ab$ como positivo si ρ_{ab} tiene el mismo sentido que $\rho_{a_0 b_0}$, y en negativo si no. Claro que lo correcto en este caso es medirlo módulo 360° .

7.1. Ejercicios

Ejercicio 7.1.

- Demostrar el [lema 7.1](#).
- Ver que si a y b son rectas (en vez de semirrectas) y α y β son semiplanos correspondientes, entonces hay (en realidad infinitas) isometrías pares e isometrías impares que transforman a en b y α en β .

Ejercicio 7.2. Si los semiplanos determinados por la semirrecta a son α y α' , entonces (a, α) y (a, α') tienen distinta orientación.

Ejercicio 7.3. Supongamos que las semirrectas a , b y c tienen asociados los semiplanos α , β y γ , y que:


- (a, α) y (b, β) tienen la misma orientación, y
- (b, β) y (c, γ) tienen la misma orientación,

entonces (a, α) y (c, γ) tienen la misma orientación. *Sugerencia:* ver el [ejercicio 6.2](#).


Ejercicio 7.4. Si componemos dos rotaciones (no necesariamente con el mismo centro), la transformación resultante es otra rotación o una traslación paralela (o la identidad).

Si el movimiento resultante es una rotación, ¿cómo se relacionan los ángulos de las rotaciones con el ángulo de la rotación resultante?, ¿cómo se relacionan los centros?


¿Y si el movimiento resultante es una traslación paralela?

 Relacionar con los ejercicios [5.2](#), [5.3](#) y [5.4](#).

Ejercicio 7.5. Si se componen tres rotaciones en un mismo sentido, y la suma de las medidas de los ángulos correspondientes es 360° , la composición (de las tres) es una traslación (o la identidad).

 No se supone que las rotaciones tengan el mismo centro.

Ejercicio 7.6. Las simetrías axiales cambian orientaciones, mientras que traslaciones y simetrías centrales las preservan.

 En el plano, como estamos trabajando acá. En tres dimensiones, las simetrías centrales no preservan la orientación.

Ejercicio 7.7. Dado un triángulo ABC , se construyen sobre sus lados (y externamente) tres triángulos equiláteros. Entonces los circuncentros de estos triángulos equiláteros forman otro triángulo equilátero.

Sugerencia: Rotando 120° (sucesivamente y en el mismo sentido) alrededor de los circuncentros da la identidad. El segmento formado por un circuncentro y su imagen por las rotaciones respecto de los otros centros, tiene como mediatriz al segmento formado por los otros circuncentros.

✍ A veces el triángulo formado por los circuncentros se denomina *de Napoleón*.

Referencias

- [1] R. BEATLEY Y G. BIRKHOFF. *Basic Geometry*. Chelsea Publishing Co., 1940.
- [2] G. BIRKHOFF. A set of postulates for plane geometry (based on scale and protractors). *Annals of Mathematics*, 33:329–345, 1932.
- [3] F. KLEIN. A comparative review of recent researches in geometry. *Bull. New York Math. Soc*, 2:215–249, 1892–1893. Ver http://math.ucr.edu/home/baez/erlangen/erlangen_tex.pdf.
- [4] S. MACLANE. Metric postulates for plane geometry. *The American Mathematical Monthly*, 66:543–555, 1959.
- [5] G. E. MARTIN. *Transformation Geometry. An introduction to symmetry*. Springer-Verlag, 1982.
- [6] A. V. POGORÉLOV. *Geometría elemental*. MIR, Moscú, 1974.
- [7] SMSG. *Geometry*. Yale University Press, 1961.
- [8] I. M. YAGLOM. *Geometric Transformations I*. Mathematical Association of America, 1962.