Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2010

Longitud de la circunferencia y área del círculo

1. Quebradas y polígonos 2
1.1. Ejercicios 3

2. Longitud de la circunferencia 4

3. Polígonos regulares inscriptos y circunscriptos 6

4. Área del círculo 8

5. Longitud de arco y área del sector circular 10

6. Radianes 11

7. Bibliografía 12

Sabemos «desde siempre» que la longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$. Pero ¿qué es π? También sabemos «desde siempre» que π se define como el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Pero entonces, ¿qué es la longitud de la circunferencia?

Sabemos qué es la longitud de un segmento, y para definir longitudes de otras figuras recurrimos a polígonos que de alguna manera se parezcan a la circunferencia. Por ejemplo, en la figura 1 vemos polígonos regulares de 8, 16 y 32 lados. A medida que aumentamos la cantidad de lados, los polígonos regulares se parecen cada vez más a una circunferencia, y parece natural definir la longitud de la circunferencia o el área del círculo como «límites» de los valores correspondientes para polígonos regulares.

En este apunte estudiaremos propiedades de los polígonos convexos inscriptos o circunscriptos a circunferencias, para luego poder definir apropiadamente la longitud de la circunferencia y el área del círculo.

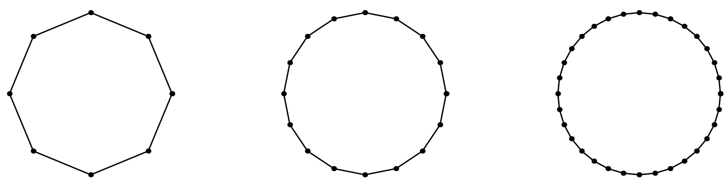

Figura 1: polígonos regulares de 8, 16 y 32 lados.

En *Los Elementos* de Euclides [1, 2] no aparece el número π, o cómo encontrar la longitud de la circunferencia o el área del círculo. La única referencia parece ser Euclides XII.1 y XII.2, donde se establece la proporción entre áreas de polígonos o círculos semejantes.

✎ El símbolo π, correspondiente a la primera letra de «perímetro», fue introducido por W. Jones (1675–1749) en 1707, y popularizado por L. Euler (1707–1783) en 1737.

1. Quebradas y polígonos

El material de esta sección corresponde a §15 en Pogorélov [3], y omitimos demostraciones.

1.1. Definición. Dados $n > 2$ puntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ se llama *quebrada* a la figura formada por los puntos y los segmentos $A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ y *polígono* a la quebrada $A_1, A_2, \dots, A_n$ y el segmento A_nA_1.

✎ Podemos pensar a un polígono como una quebrada «cerrada».

- Los puntos $A_1, \dots$ se llaman *vértices* de la quebrada o polígono.
- Los segmentos $A_1A_2, \dots$ son sus *lados*.
- Dos vértices son *contiguos* o *adyacentes* si quedan unidos por un lado. En un polígono, cada vértice es contiguo a exactamente dos vértices.
- Los puntos A_1 y A_n son los *extremos* de la quebrada.
- La *longitud* de la quebrada es la suma $A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$.
- El *perímetro* del polígono es la suma $A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n + A_nA_1$.
- Una *diagonal* de un polígono es un segmento que une dos vértices no contiguos.
- El polígono es *convexo* si está situado en un semiplano respecto a cada una de las rectas $A_1A_2, \dots, A_nA_1$, y no tiene más puntos comunes con estas rectas que el segmento $A_1A_2, \dots, A_nA_1$ correspondiente.

1.2. Corolario. *La longitud de una quebrada no es menor que la longitud del segmento que une sus extremos.*

1.3. Teorema. *Si los extremos de la quebrada $B_1B_2 \dots B_n$ se hallan en diferentes semiplanos respecto a una recta, la quebrada corta a la recta.*

1.4. Teorema. *Si una recta tiene tres puntos comunes con un polígono convexo, contiene a uno de sus lados.*

1.5. Teorema. *En el polígono convexo $A_1A_2 \dots A_n$, la diagonal A_1A_p $(2 < p < n)$ lo divide en dos polígonos convexos, $A_1 \dots A_p$ y $A_pA_{p+1} \dots A_n$. Estos polígonos están en distintos semiplanos respecto de la recta A_1A_p, y la semirrecta A_1A_p pasa entre las semirrectas A_1A_2 y A_1A_n.*

1.6. Corolario. *Si A es vértice de un polígono convexo, B y C son sus vértices adyacentes, y AP es una semirrecta entre las semirrectas AB y AC, entonces la semirrecta AP está en los mismos semiplanos, respecto de las rectas AB y AC, que el polígono.*

1.7. Definición. Si A es vértice de un polígono convexo, y B y C son los vértices adyacentes, llamamos *ángulo interno* o *interior* al ángulo $\angle BAC$.

- Se llama *ángulo externo* o *exterior* al ángulo adyacente a un ángulo interno (del polígono convexo).

1.8. Teorema. *En un polígono convexo, la suma de los ángulos externos es* $360°$. *Si el polígono tiene* n *vértices, la suma de los ángulos internos es* $(n-2)\times 180°$.

1.9. Definición. Un polígono convexo es *regular* si sus lados son iguales y sus ángulos internos son iguales.

1.10. Corolario. *En un polígono regular con* n *vértices, cada ángulo interior mide*

$$\frac{n-2}{n}\,180°.$$

1.11. Proposición. *Si dos polígonos regulares tienen* n *vértices y sus lados son iguales, entonces los polígonos son iguales (i.e., podemos transformar uno en otro mediante una isometría).*

1.12. Teorema. *En un polígono regular las mediatrices de los lados y las bisectrices de los ángulos internos son ejes de simetría.*

1.13. Definición. Un polígono está *inscripto en una circunferencia* si sus vértices están sobre la circunferencia. También decimos que la circunferencia *circunscribe al polígono*.

- Un polígono está *circunscripto a una circunferencia* si sus lados son tangentes a la circunferencia. También decimos que la circunferencia *está inscripta en el polígono*.
- El radio de una circunferencia inscripta en un polígono regular se llama *apotema*.

1.14. Teorema. *Todo polígono regular se puede inscribir en una circunferencia y circunscribir en otra, en cada caso de forma única.*

✎ Los centros de las circunferencias inscripta y circunscripta coinciden. Si el polígono regular tiene n lados, naturalmente queda dividido en n triángulos isósceles que tienen como vértice al centro de las circunferencias.

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Si los vértices de una quebrada no se encuentran todos sobre una recta, la longitud de la quebrada es mayor que la distancia entre sus extremos.

Ejercicio 1.2. Construir un pentágono dados los puntos medios de los lados.

✎ Comparar con el ejercicio 1.14 del apunte de *cuadriláteros*.

Ejercicio 1.3. Teniendo en cuenta el teorema 1.14:

a) Construir un pentágono y un hexágono no regulares pero con una circunferencia inscripta.

b) Ídem con una circunferencia circunscripta.

c) Construir un hexágono con todos sus lados iguales, que tenga una circunferencia inscripta, pero que no sea regular.

d) Ver que si un polígono tiene n lados todos iguales y una circunferencia inscripta, entonces es regular si n es impar.

e) Ver que si un polígono tiene n lados, todos iguales, y está inscripto en una circunferencia, entonces el polígono es regular.

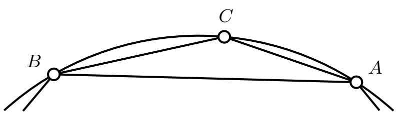

Figura 2: agregando un vértice al polígono inscripto.

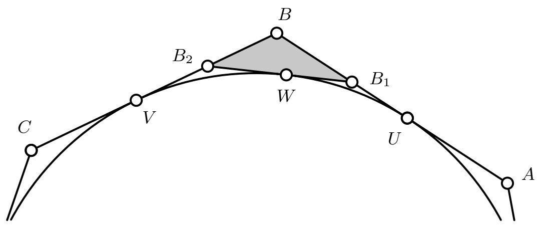

Figura 3: «rebanando» un triángulo al polígono circunscripto.

2. Longitud de la circunferencia

El material aquí está basado en la primera parte de §17 de Pogorélov [3], con pocos agregados.

En lo que sigue, consideramos una circunferencia c de centro O y radio r (siempre la misma, salvo indicación contraria).

2.1. Lema. *Sea P un polígono convexo inscripto en la circunferencia c. Entonces agregando un vértice (entre medio de otros dos consecutivos), el perímetro se incrementa.*

❦ Nos orientamos con la figura 2. Los vértices A y B son consecutivos, y el perímetro de P originalmente es una suma de términos, $p = AB + \cdots$.

Al agregar el vértice C el perímetro del nuevo polígono es $p' = AC + CB + \cdots$, donde los restantes términos no han sido afectados. Como en el triángulo ABC es $AB < AC + CB$, resulta $p' > p$.

2.2. Lema. *Sea P un polígono convexo circunscripto en la circunferencia c. Entonces agregando un punto de tangencia (entre medio de otros dos consecutivos), el perímetro disminuye.*

✎ Podemos pensar que hemos «rebanado» un triángulo, como el sombreado en la figura 3.

❦ Nos orientamos con la figura 3. Supongamos que $A, B, C, \ldots$ son los vértices del polígono original, con A y C adyacentes a B. Sean U el punto de tangencia para AB, y V para BC. Agregando el punto de tangencia W sobre c (entre U y V), se determinan dos nuevos vértices, B_1 y B_2. Descartando el vértice B, queda el polígono circunscripto de vértices $A, B_1, B_2, C, \ldots$

El perímetro p del polígono original es de la forma

$$p = AB + BC + \cdots = AB_1 + B_1B + BB_2 + B_2C + \cdots,$$

mientras que el perímetro del nuevo polígono es

$$p' = AB_1 + B_1B_2 + B_2C + \cdots.$$

Siendo $B_1B_2 < B_1B + BB_2$, resulta $p' < p$.

2.3. Teorema. *Sea P un polígono convexo inscripto en la circunferencia c y Q uno circunscripto. Entonces el perímetro de P es menor que el de Q.*

❦ Si los vértices de P son $U, V, W, \dots$, y los vértices de Q son $A, B, C, \dots$, surgen varios casos:

i) Los vértices de P son exactamente los puntos de tangencia de los lados de Q, digamos U es el punto de contacto de AB, V el de contacto de BC, etc. En este caso el perímetro de P es $p = UV + VW + \cdots$ mientras que el de Q es

$$q = AB + BC + \cdots = AU + UB + BV + VC + CW + \cdots .$$

Al formarse los triángulos $UBV, VCW, \dots$, tenemos $UB + BV > UV$, $VC + CW > VW, \dots$, y por lo tanto $q > p$.

ii) Si los vértices de P no incluyen a los puntos de tangencia de Q, los agregamos con el procedimiento de 2.1, aumentando el perímetro original. Por otra parte, si Q no tiene como puntos de tangencia a los vértices del nuevo polígono inscripto, los agregamos mediante el procedimiento de 2.2, disminuyendo el perímetro del polígono circunscripto original, y llegamos al caso anterior, donde los vértices de P son exactamente los puntos de tangencia de Q.

2.4. Corolario. *Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los números que son perímetros de polígonos convexos inscriptos, y sea $\mathcal{B}$ el conjunto de todos los números que son perímetros de polígonos convexos circunscriptos. Entonces*

$$\sup \mathcal{A} \leq \inf \mathcal{B}.$$

2.5. Definición. La *longitud de la circunferencia* se define como el supremo de los perímetros de los polígonos convexos inscriptos.

✎ Con las notaciones de 2.4, la longitud de la circunferencia es $\sup \mathcal{A}$.

2.6. Teorema. *Sean c y c' circunferencias de radios r y r' respectivamente, y sean ℓ y ℓ' sus longitudes. Entonces*

$$\frac{\ell}{r} = \frac{\ell'}{r'}.$$

❦ Si O es el centro de c y O' el de c', los polígonos convexos inscriptos en c se transforman en polígonos convexos inscriptos en c' mediante una traslación en O-O' seguida de una homotecia de centro O' y coeficiente r'/r y recíprocamente, y los perímetros de los transformados son los de los originales multiplicados por r'/r. Consecuentemente, si $\mathcal{A}$ son los perímetros de los polígonos convexos inscriptos en c y $\mathcal{A}'$ los de los inscriptos en c', debe ser $\sup \mathcal{A}' = (r'/r) \times \sup \mathcal{A}$.

2.7. Definición. El número π se define como el cociente

$$\frac{\text{longitud de } c}{2r},$$

común a todas las circunferencias c de radio r.

2.8. Corolario. *La longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$.*

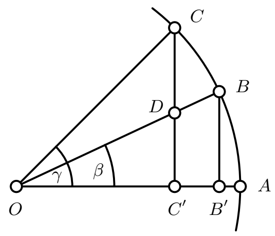

Figura 4: segmentos determinados por distintos ángulos y la circunferencia.

3. Polígonos regulares inscriptos y circunscriptos

Veremos acá que basta tomar polígonos regulares para definir la longitud de la circunferencia, y que vale la igualdad en 2.4.

3.1. Lema. *Sea x y y números reales positivos.*

a) *Si $x < 1$ y $y < 1$, entonces $x < y$ si y sólo si $x/\sqrt{1-x^2} < y/\sqrt{1-y^2}$.*

b) *Si $0 < x < 1$, $(1-x)^2 < 1-x^2$, por lo tanto $1-x < \sqrt{1-x^2}$.*

c) *Si $0 < x \le 1/2$, $\frac{1}{1-x} \le 1+2x$.*

d) *Si $0 < x \le 1/2$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \le 1+2x$.*

❦ *a)* Siendo $0 < x, y < 1$, es $x/\sqrt{1-x^2} < y/\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow x \times \sqrt{1-y^2} < y \times \sqrt{1-x^2}$ $\Leftrightarrow x^2 \times (1-y^2) < y^2 \times (1-x^2) \Leftrightarrow x^2 < y^2 \Leftrightarrow x < y$.

b) $1-x^2-(1-x)^2 = 2x \times (1-x) > 0$, y siendo $1-x > 0$ es $\sqrt{(1-x)^2} = 1-x$.

c) $(1+2x)(1-x) = 1+x-2x^2 = 1+2x \times (1/2-x) \ge 1$.

d) se deduce de los dos anteriores.

3.2. Lema. *Sean A, B y C puntos en la circunferencia, de modo que OB pasa entre los lados de $\angle AOC \le 90°$. Sean B' y C' los pies de las perpendiculares a OA por B y C respectivamente (ver figura 4). Entonces $BB' < CC'$.*

✎ En esencia, el lema dice que el *seno* (que veremos más adelante) es creciente entre 0° y 90°.

❦ Sea D la intersección de la semirrecta OB con el segmento CC'. Como OB pasa entre los lados de $\angle C'OC$ es $C'D < C'C$. Los triángulos ODC' y OBB' son semejantes (son rectángulos en C' y B' y comparten el ángulo en O), y $C'D/B'B = C'O/B'O$. Entonces

$$\frac{B'B}{B'O} = \frac{C'D}{C'O} < \frac{C'C}{C'O}.$$

Como $r^2 = C'C^2 + C'O^2$, $C'O = \sqrt{r^2 - C'C^2} = r \times \sqrt{1-(C'C/r)^2}$, y de modo similar, $B'O = r \times \sqrt{1-(B'B/r)^2}$. Por lo tanto

$$\frac{B'B}{B'O} = \frac{BB'/r}{\sqrt{1-(B'B/r)^2}} < \frac{C'C}{C'O} = \frac{CC'/r}{\sqrt{1-(C'C/r)^2}},$$

y por 3.1.*a)* es $BB'/r < CC'/r$, o $BB' < CC'$.

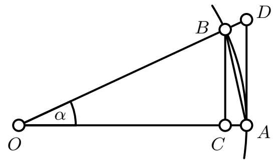

Figura 5: segmentos determinados por un ángulo y la circunferencia.

3.3. Lema. *Sea $\alpha = \angle AOB < 90°$, con A y B en c. Sea C el pie de la perpendicular a OA que pasa por B, D la intersección del rayo OB con la perpendicular a OA por A (ver figura 5). Entonces $BC < AB < AD$.*

❦ El triángulo ACB es rectángulo en C, y su hipotenusa AB es mayor que el cateto BC, i.e., $BC < AB$. El triángulo AOC es isósceles ($AO = BO = r$), por lo tanto $\angle OBA < 90°$ y $\angle ABD > 90°$. Como a mayor ángulo se opone mayor lado, y $\angle ABD > \angle BDA$, resulta $AB < AD$.

3.4. Lema. *Sea α_0 el ángulo formado tomando $AD = r/4$ en la figura 5. Entonces, con las notaciones anteriores, si $0° < \alpha < \alpha_0$,*

$$BC < r/4 \qquad y \qquad AD \le BC \times (1 + 2 \times BC/r).$$

✎ *Resulta* $\alpha_0 \approx 14{,}0362°$.

❦ Siendo $BC < AD = r/4$ cuando $\alpha = \alpha_0$, si $0° < \alpha \le \alpha_0$ será $BC < r/4$ (por 3.2).

Los triángulos OCB y OAD son semejantes (son rectángulos y comparten el ángulo en O). Entonces

$$\frac{AD}{BC} = \frac{OA}{OC} = \frac{r}{OC}.$$

Por Pitágoras, $OC = \sqrt{r^2 - BC^2} = r \times \sqrt{1 - (BC/r)^2}$, por lo tanto (usando 3.1.*d)*),

$$AD = r \times \frac{BC}{OC} = \frac{BC}{\sqrt{1 - (BC/r)^2}} \le BC \times (1 + 2 \times BC/r).$$

3.5. Lema. *Sea α_0 como en 3.4 y sea $n_0 = \lceil 360°/\alpha_0 \rceil$ (el primer entero no menor que $360°/\alpha_0$). Para $n \in \mathbb{N}$, con $n \ge n_0$, sean P_n y P'_n respectivamente los polígonos regulares de n lados inscripto y circunscripto en c, y sean ℓ_n y ℓ'_n las longitudes de sus lados (respectivamente). Entonces*

a) $\ell_n \le r/2$ *y* $\ell_n < \ell'_n \le \ell_n \times (1 + \ell_n/r)$.

b) $\ell_{2n} < \dfrac{\ell_n}{2} \times (1 + \ell_n/r) < \dfrac{3}{4} \times \ell_n$.

c) Si $n > m \ge n_0$ *entonces* $\ell_n < \ell_m$.

d) Para todo $x > 0$, $\ell_n < x$ *si* n *es suficientemente grande.*

❦ Consideremos un lado BB' de P_n y definamos $\beta = \angle BOB'$. Entonces $\beta = 360°/n \le 360°/n_0 \le \alpha_0$. Si C es el punto medio de BB', resulta $OC \perp BB'$. Poniendo $\alpha = \angle BOC = \beta/2$, tenemos $\alpha < \alpha_0$. De modo similar, si DD' es un lado de P'_n, y A es el punto medio de DD' tendremos $\angle DOA = \alpha$. Estamos entonces en las condiciones de 3.3, 3.4 y la figura 5, obteniendo *a)* con $BC = \ell_n/2, AD = \ell'_n/2$.

Para *b*), observamos que —con las notaciones anteriores— $\ell_{2n} = AB$ y entonces

$$\ell_{2n} < AD = \frac{\ell'_n}{2} \leq \frac{\ell_n}{2} \times (1 + \ell_n/r) < \frac{3}{4} \times \ell_n,$$

pues $1 + \ell_n/r < 3/2$.

c) resulta de 3.2 pues el ángulo α correspondiente a n es menor que el correspondiente a m, y por lo tanto el segmento BC correspondiente a n es menor que el correspondiente a m.

d) también se deduce de 3.2: bastará tomar —con las notaciones de 3.4— n suficientemente grande de modo que $AD < x/2$ (pues $\ell_n < 2 \times AD = \ell'_n$).

3.6. Teorema. *Sean p_n y p'_n los perímetros de los polígonos regulares de n lados inscriptos y circunscriptos a la circunferencia c. Entonces a medida que n crece $p_n - p'_n$ se acerca a* 0.

❦ Usando las notaciones anteriores, $p'_n = n \times \ell'_n$ y $p_n = n \times \ell_n$. Entonces por 3.5,

$$0 < p'_n - p_n = n \times (\ell'_n - \ell_n) \leq n \times (\ell_n \times (1 + \ell_n/r) - \ell_n) = n \times \ell_n \times \frac{\ell_n}{r} = p_n \times \frac{\ell_n}{r},$$

pero $p_n \leq \text{ínf}\, \mathcal{B}$ por 2.4, de modo que $0 < p'_n - p_n \leq (\text{ínf}\, \mathcal{B}) \times \frac{\ell_n}{r}$ que puede hacerse tan pequeño como se quiera tomando n suficientemente grande.

3.7. Teorema. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como en 2.4. Entonces*

$$\sup \mathcal{A} = \text{ínf}\, \mathcal{B}.$$

❦ Por 2.4, sabemos que $\sup \mathcal{A} \leq \text{ínf}\, \mathcal{B}$. Para ver la igualdad usamos la propiedad de completitud de los reales, sabiendo que los perímetros de los polígonos regulares inscriptos están en $\mathcal{A}$ y el de los regulares circunscriptos están en $\mathcal{B}$, y que éstos difieren en tan poco como se quiera (por 3.5.*d*))

✎ Para los que hayan visto Cálculo (límites y derivadas): lo que hemos hecho es esencialmente demostrar que $\text{lím}_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, ya que $\ell_n/r = \operatorname{sen}(360°/n)$ y $\text{lím}_{n \to \infty} n \times \operatorname{sen}(360°/n) = 2\pi$, o

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2\pi} \times \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 1.$$

4. Área del círculo

Esta sección y la siguiente están basadas en la última parte de §17 de Pogorélov [3].

4.1. Teorema.

a) *Agregando un vértice (entre medio de otros dos consecutivos) a un polígono convexo inscripto en la circunferencia, el área se incrementa.*

b) *Agregando un punto de tangencia (entre medio de otros dos consecutivos) a un polígono convexo circunscripto en la circunferencia, el área disminuye.*

c) *Si P es un polígono convexo inscripto en una circunferencia y Q es uno circunscripto, el área de P es menor que la de Q.*

d) *Sea $\tilde{\mathcal{A}}$ el conjunto de todas las áreas de los polígonos convexos inscriptos, y sea $\tilde{\mathcal{B}}$ el conjunto de todas las áreas de los polígonos convexos circunscriptos. Entonces*

$$\sup \tilde{\mathcal{A}} \leq \text{ínf}\, \tilde{\mathcal{B}}.$$

❦ Se siguen las mismas ideas que en las demostraciones de 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4, aunque las demostraciones resultan más sencillas pues se pueden comparar áreas usando inclusiones.

4.2. Definición. Llamamos *área del círculo* al supremo de las áreas de los polígonos convexos inscriptos en la circunferencia.

✎ Con las notaciones de 4.1, el área es $\sup \tilde{\mathcal{A}}$.

4.3. Teorema. *El área del círculo de radio r es πr^2.*

❦ Sea a el área del círculo y $p = 2\pi r$ la longitud de su circunferencia.

Consideremos un polígono regular inscripto de n lados. Si su lado es ℓ_n y su perímetro p_n, entonces el área es

$$a_n = n\,\frac{1}{2}\,\ell_n h_n = \frac{1}{2}\,p_n h_n,$$

donde h_n es la *apotema*, el segmento OC de la figura 5 cuando $BC = \ell_n/2$. Siguiendo las notaciones de esa figura, por Pitágoras tenemos

$$h_n = \sqrt{OB^2 - BC^2} = r\sqrt{1 - \left(\frac{\ell_n}{2r}\right)^2}.$$

Usando 3.1.*c*), podemos poner $h_n \geq r\left(1 - \frac{\ell_n}{2r}\right)$, y por lo tanto

$$a_n \geq \frac{1}{2}\,r p_n\left(1 - \frac{\ell_n}{2r}\right).$$

Por 3.6 y 3.7, para cualquier $x > 0$ (tan pequeño como se quiera, menor que 1), tomando n suficientemente grande tendremos $p_n \geq p - x$. Pero también podemos tomar n suficientemente grande de modo que $\ell_n/2r < x$ y entonces

$$a \geq a_n \geq \frac{1}{2}\,r p_n\left(1 - \frac{\ell_n}{2r}\right) \geq \frac{1}{2}\,r\,(p - x)\,(1 - x) \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}\,r\,(p - (1 + p)x) \geq \frac{1}{2}\,rp - \frac{1}{2}\,r\,(1 + p)x.$$

Puesto que x es positivo pero arbitrariamente próximo a 0, debe ser

$$a \geq \frac{1}{2}\,rp = \frac{1}{2}\,2\pi r r = \pi r^2. \tag{1}$$

Por otro lado, considerando el polígono regular circunscripto, de área a_n', lado ℓ_n' y perímetro p_n', debe ser

$$a_n' = n\,\frac{1}{2}\,\ell_n' r = \frac{1}{2}\,r p_n'.$$

Por 4.1 sabemos que

$$a_n' \geq \operatorname{ínf} \tilde{\mathcal{B}} \geq \sup \tilde{\mathcal{A}} = a,$$

y por lo tanto $r p_n'/2 \geq a$ para todo n. Puesto que a medida que n crece p_n' decrece a $p = 2\pi r$, debe ser

$$\pi r^2 \geq a,$$

que junto con la desigualdad (1) implica el resultado.

4.4. Corolario. *Sean $\tilde{\mathcal{A}}$ y $\tilde{\mathcal{B}}$ como en 4.1. Entonces*

$$\sup \tilde{\mathcal{A}} = \operatorname{ínf} \tilde{\mathcal{B}}.$$

❦ Hecho en nuestra demostración de 4.3.

5. Longitud de arco y área del sector circular

5.1. Definición. Dados n puntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ se llama *quebrada* a la figura formada por los puntos y los segmentos $A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$.

- Los puntos $A_1, \dots$ se llaman *vértices* de la quebrada,
- los segmentos $A_1A_2, \dots$ son sus *lados* ,
- los puntos A_1 y A_2 son los *extremos* de la quebrada,
- la *longitud* de la quebrada es la suma $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n$.

5.2. Lema. *La longitud de una quebrada no es menor que la longitud del segmento que une sus extremos.*

5.3. Definición. Una quebrada de vértices $A_1, A_2, \dots, A_k$ se dice *convexa* si el polígono con los mismos vértices lo es.

5.4. Definición. La *longitud de un arco de circunferencia* es el supremo de las longitudes de las quebradas convexas con vértices en el arco.

5.5. Lema. *Si el punto C divide al arco AB en los arcos AC y CB, entonces la longitud del arco AB es la suma de las longitudes de los arcos AC y CB.*

❦ Observemos primeramente que siempre podemos extender a la quebrada «inscripta» en un arco de modo que los extremos del arco sean también vértices de la quebrada, ya que el proceso eventualmente aumenta el perímetro.

Sean ℓ la longitud del arco AB, ℓ_1 la del arco AC y ℓ_2 la del arco CB, y sean $\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{\mathcal{A}}_1$ y $\tilde{\mathcal{A}}_2$ los conjuntos de longitudes de las quebradas convexas en cada caso.

Si Q_1 y Q_2 son quebradas convexas con vértices en los arcos AC y CB respectivamente, con vértices $A, \dots, C$ y $C, \dots, B$, entonces la quebrada Q con vértices $A, \dots, C, \dots, B$ está «inscripta» en el arco AB. Además si q_1 es la longitud de la quebrada Q_1, q_2 la de Q_2 y q la de Q, será $q = q_1 + q_2$, y tendremos sucesivamente

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &\le \sup \tilde{\mathcal{A}} = \ell, \\ \sup \tilde{\mathcal{A}}_1 + q_2 &= \ell_1 + q_2 \le \ell, \\ \ell_1 + \sup \tilde{\mathcal{A}}_2 &= \ell_1 + \ell_2 \le \ell. \end{aligned} \tag{2}$$

Recíprocamente, dado $x > 0$ podemos encontrar una quebrada convexa Q «inscripta» en el arco AB tal que su longitud q es mayor que $\ell - x$. Inclusive podemos suponer que los vértices de Q son $A, \dots, C, \dots, B$, pues en todo caso agregamos los vértices A, B y C incrementando su longitud. Puesto que las quebradas Q_1 y Q_2 de vértices $A, \dots, C$ y $C, \dots, B$, y longitudes q_1 y q_2 respectivamente, están entre las elegibles para encontrar ℓ_1 y ℓ_2, tendremos

$$\ell - x < q = q_1 + q_2 \le \ell_1 + \ell_2,$$

i.e., $\ell - x \le \ell_1 + \ell_2$, y como x es positivo pero arbitrario, debe ser $\ell \le \ell_1 + \ell_2$, que junto con (2) implican el resultado.

5.6. Corolario. *Si el punto C está en el arco AB, entonces la longitud del arco AC es menor que la del AB.*

❦ Las longitudes son no-negativas.

5.7. Teorema. *En una circunferencia de radio r, la longitud ℓ del arco AB con ángulo central α (medido en grados) es*

$$\ell = \frac{\pi r}{180°}\,\alpha.$$

❦ Si $\alpha = 360°/n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, podemos expresar a la circunferencia como suma de n arcos iguales, cada uno con la misma longitud, de modo que $2\pi r = n \times \ell$, o

$$\ell = \frac{2\pi r}{n} = \frac{2\pi r}{360°/\alpha} = \frac{\pi r}{180}\,\alpha.$$

Si $\alpha = (m/n)\,360°$, con m y n en NN, sumamos m arcos iguales de longitud $2\pi r/n$, obteniendo

$$\ell = m \times \frac{2\pi r}{n} = \frac{2\pi r\alpha}{360°} = \frac{\pi r}{180°}\,\alpha.$$

Si $\alpha/360°$ es irracional, dado $x > 0$ podemos encontrar racionales m_1/n_1 y m_2/n_2 de modo que

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{\alpha}{360°} < \frac{m_2}{n_2},$$

y $m_2/n_2 - m_1/n_1 < x$. También podemos encontrar arcos A_1B_1 y A_2B_2, con ángulos centrales de $(m_1/n_1)\,360°$ y $(m_2/n_2)\,360°$ tales que el primero esté contenido en el ángulo central α y el segundo lo contenga. Consecuentemente (usando también 5.6) debe ser

$$2\pi r\left(\frac{\alpha}{360°} - x\right) < 2\pi r\,\frac{m_1}{n_1} = \ell_1 < \ell < \ell_2 = 2\pi r\,\frac{m_2}{n_2} < 2\pi r\left(\frac{\alpha}{360°} + x\right),$$

y como esto vale para cualquier $x > 0$, debe ser

$$\frac{2\pi r\alpha}{360°} = \ell.$$

5.8. Definición. Se llama *sector circular* de una circunferencia a la región del círculo delimitada por los lados de un ángulo central y el arco correspondiente.

5.9. Definición. Se llama *área* de un sector circular al supremo de las áreas de los polígonos convexos uno de cuyos vértices es el centro de la circunferencia y los restantes están sobre el arco correspondiente.

5.10. Teorema. *El área de un sector circular con ángulo central α (medido en grados) en una circunferencia de radio r es*

$$\pi r^2\,\frac{\alpha}{360°}.$$

❦ Análogo a lo hecho para la longitud del arco.

6. Radianes

6.1. Definición. La *medida en radianes* de un ángulo central en una circunferencia de radio r se define como el cociente

$$\frac{\ell}{r},$$

donde ℓ es la longitud del arco correspondiente. Equivalentemente, podemos definirla como

$$\frac{\pi}{180°}\,g,$$

donde g es la medida en grados del ángulo central.

✎ La medida en radianes no tiene una denominación análoga al «°» usada con la medida en grados. Es como π, que se define como el cociente de la longitud de la circunferencia sobre el diámetro, y que podemos interpretar como la medida en radianes de un ángulo central correspondiente a la semicircunferencia (y mide 180°).

✎ De la definición resulta que si el ángulo central α se mide en radianes, tendremos $\ell = r \times \alpha$.

Si pensamos en un móvil recorriendo la circunferencia y queremos medir la distancia que recorre, al realizar más de una vuelta vemos que no tenemos correspondencia entre el recorrido y el ángulo central correspondiente. O, de otra forma, si vamos enrollando una cuerda alrededor de la circunferencia, como un «yoyó», al principio tenemos una correspondencia entre la longitud de la cuerda y el ángulo central, pero al superar la vuelta, ya carece de sentido. Para contemplar estas situaciones es conveniente considerar ángulos mayores que 180° o ángulos centrales mayores que 360°. En vez de considerar ángulos, parece más sencillo mirar a la longitud del «arco» que ahora podría ser mayor que una circunferencia. Tomando entonces puntos inicial y final sobre la circunferencia, consideramos la medida del «ángulo» correspondiente como

$$\alpha = \ell/r \text{ (radianes)},$$

donde ℓ es la longitud recorrida y r el radio de la circunferencia.

En el caso de un móvil recorriendo la circunferencia a velocidad constante, en el sentido que recorre arcos de igual longitud en una misma cantidad de tiempo, tendremos que también se recorren ángulos iguales en una misma cantidad de tiempo. La velocidad medida en términos de ángulos se llama *velocidad angular* y es muy común en la medición de mecanismos giratorios, como la unidad de «revoluciones por minuto» (RPM) para motores.

7. Bibliografía

[1] T. L. Heath. *The thirteen books of Euclid's Elements*. Dover Publications, 1956.

[2] D. E. Joyce. *Euclid's Elements*. Clark University, 1996. URL http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html. Ver también http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm.

[3] A. V. Pogorélov. *Geometría elemental*. MIR, Moscú, 1974.