Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2010

Entrando en calor

Acá nos ponemos de acuerdo en notaciones, repasamos algunos conceptos, e introducimos algunos que tal vez no sean conocidos pero que son fundamentales para el trabajo futuro.

La idea es mirar por arriba el material del apunte y hacer los ejercicios propuestos, volviendo a releer los temas si hubiera alguna dificultad, ya sea con los ejercicios o con apuntes posteriores.

Empecemos por algunas notaciones:

Letras. Usamos letras como a, A, y también griegas (pocas) como α, para designar objetos. Por completitud y para referencia mostramos el alfabeto griego en el cuadro 1 en el apéndice (no es necesario aprenderlo ni mucho menos).

Cuando «se nos acaba el alfabeto» usamos *primas*, como A', A'', A''' (leídas como «A prima», «A segunda», «A tercera»), o *subíndices* como A_1, A_2 («A sub uno», «A sub dos»), o combinando ambas como A'_1 (indistintamente «A prima sub uno» o «A sub uno prima»). Otras veces ponemos rayas, tildes (virgulillas) o similares, como en $\bar{a}$, $\tilde{a}$, a^*.

Notas. Además de las notas al pie de página, intercalamos en el texto distintas notas en letras más pequeñas.

Aclaraciones, curiosidades, historia:

✎ La letra griega « Υ » (ípsilon) dio origen a nuestra «y griega».

Notas más avanzadas:

✈ Para cuando volamos por las nubes.

Indicaciones de demostraciones:

❦ A medida que avancemos iremos reemplazando demostraciones formales por indicaciones de los pasos a seguir a modo de nota.[1]

Algunos símbolos no matemáticos.

□ indica el fin de una demostración.

✎ Al escribir en papel podemos usar «Q. E. D.», del latín *quod erat demostrandum* (lo que se quería demostrar), inmediatamente después del punto final, poniendo algo como

> [...] pero esto es lo mismo que decir que $a = 0$. Q. E. D.

O directamente sin la abreviatura,

> [...] pero esto es lo mismo que decir que $a = 0$, como queríamos demostrar.

✂ (la cortamos acá) indica el fin de definiciones o notaciones.

Algunas abreviaturas.

a.C. antes de Cristo.

e.g. (del latín *exampli gratia*) debe leerse como «por ejemplo».

i.e. (del latín *id est*) debe leerse como «esto es» o «o sea», etc.

1. Lógica

Las matemáticas se diferencian de otras ciencias por las demostraciones, en las cuales se establecen relaciones entre proposiciones lógicas.

Proposiciones lógicas. Son afirmaciones de las cuales podemos decir que son verdaderas o falsas,[2] como «este lápiz es rojo» o «todo entero es par».

Una proposición *debe* ser verdadera o falsa, pero *no puede ser verdadera y falsa simultáneamente*.

no (negación), y (conjunción), o (disyunción). Se usan para operar con proposiciones.

- «no p» es verdadera si p es falsa.
- «p y q» es verdadera si tanto p como q lo son.
- «p o q» es verdadera si alguna de p o q lo es.

  ✎ En matemáticas «o» es equivalente al «y/o» que se usa en el lenguaje común.

Por ejemplo, la negación de «este lápiz es rojo» es «no (este lápiz es rojo)» —donde pusimos paréntesis por claridad— o más informalmente «no es cierto que este lápiz sea rojo», o directamente «este lápiz no es rojo».

[1] ¡Pero en los exámenes habrá que hacer las demostraciones formales!

[2] Sin meternos en honduras: en ciertas circunstancias existen proposiciones lógicas para las cuales no se puede decidir si son verdaderas o falsas.

De modo similar, «este lápiz es rojo y largo» podría ponerse más formalmente como «(este lápiz es rojo) y (este lápiz es largo)».

✎ Los símbolos $\neg$, $\wedge$, $\vee$ indican «no», «y», «o» respectivamente.

✎ Muchas veces (pero no siempre) la negación de una propiedad dada por un símbolo se expresa tachando el símbolo: $a = b$ (a es igual a b) se niega poniendo $a \neq b$ (a es distinto de b).

Más adelante veremos otros símbolos con esta propiedad, como:

$\Rightarrow$	(implica)	$\not\Rightarrow$	(no implica)
$\in$	(pertenece)	$\notin$	(no pertenece)
$\subset$	(incluido)	$\not\subset$	(no incluido)
$<$	(menor)	$\not<$	(no es menor)
$\parallel$	(paralela)	$\nparallel$	(no paralela)

La negación de una conjunción es una disyunción, y la de una disyunción es una conjunción, según las leyes de De Morgan (1806–1871):

1.1. Propiedad (leyes de De Morgan para proposiciones lógicas).

- *«no (p y q)» es equivalente a «(no p) o (no q)».*
- *«no (p o q)» es equivalente a «(no p) y (no q)».*

Así, la negación de «este lápiz es rojo y largo» puede ponerse como «(este lápiz no es rojo) o (este lápiz no es largo)».

Existe y para todo. Una pregunta básica en matemáticas es si existen o no objetos con determinadas propiedades, es decir, si una afirmación de la forma

$$\text{existe } t \text{ tal que } p(t)$$

es verdadera o falsa.

Por ejemplo, en la proposición

$$\text{existe un número entero } n \text{ tal que } n = n + 1, \tag{1}$$

la variable se llama n y la proposición $p(n)$ es «n es un número entero y $n = n+1$».

La negación de la proposición (1) es

$$\text{no existe un número entero } n \text{ tal que } n = n + 1,$$

que podemos poner en la forma «para todo n entero no $(n = n + 1)$», o más sencillamente,

$$\text{para todo } n \text{ entero se cumple que } n \neq n + 1.$$

Al negar una proposición con «existe» aparece «para todo» (y recíprocamente). Así, las expresiones

$$\text{para todo } t \text{ vale } p(t)$$

y

$$\text{no existe } t \text{ tal que } p(t) \text{ sea falsa}$$

son equivalentes.

✎ A veces se usan los símbolos $\neg$ para «no», $\exists$ para «existe», $\forall$ para «para todo», y $\nexists$ para «no existe».

Hay que tener un poco de cuidado cuando se usan «existe» o «para todo». Por ejemplo,

todo entero es par o es impar

es verdadera, y no es lo mismo que

(todo entero es par) o (todo entero es impar)

que es falsa (pues cada expresión entre paréntesis es falsa).

Implicaciones. La palabra «entonces» al decir

si yo camino *entonces* me muevo, (2)

en matemáticas se puede reemplazar por «implica»,

yo camino *implica* me muevo. (3)

eliminando a veces la palabra «si» (como en este caso). También podemos usar el símbolo « $\Rightarrow$ »:

yo camino $\Rightarrow$ me muevo. (4)

En la proposición «$p \Rightarrow q$», p es la *hipótesis* o *premisa* , i.e., suposiciones que se hacen sobre algunos objetos, q es la *tesis* o *conclusión*, i.e., propiedades y relaciones que deben cumplir los objetos sobre los que se está trabajando, y la nueva proposición «$p \Rightarrow q$» se llama *implicación*.

✎ Algunos autores llaman a p el *antecedente* y a q el *consecuente*.

> Decir que «$p \Rightarrow q$» es verdadera es equivalente a decir que «p y (no q)» es falsa.

En particular, si p es falsa, es decir si partimos de una premisa falsa, la implicación $p \Rightarrow q$ es siempre verdadera, no importa si q es verdadera o no.

De este modo, tanto «$(0 = 1) \Rightarrow (2 = 3)$» como «$(0 = 1) \Rightarrow (2 \neq 3)$» son proposiciones verdaderas. En ambos casos la premisa es falsa ($0 = 1$), mientras que la conclusión es falsa en el primer caso ($2 = 3$) y verdadera en el segundo ($2 \neq 3$).

También podríamos poner la frase (2) al revés, sin «entonces»:

me muevo *si* yo camino. (5)

En este caso, la palabra «si» se indica en matemáticas por el símbolo $\Leftarrow$:

me muevo $\Leftarrow$ yo camino. (6)

Así como $\Leftarrow$ es el «recíproco» de $\Rightarrow$, en matemáticas se usa *sólo si* como «recíproco» de «si»:

yo camino *sólo si* me muevo. (7)

Es decir, para nosotros casi siempre «entonces», «implica», « $\Rightarrow$ », «sólo si», «por lo tanto», «debe ser» y «necesariamente», son sinónimos (como en los ejemplos (2), (3), (4) y (7)). En cambio «si» y « $\Leftarrow$ » a veces son sinónimos (como en los ejemplos (5) y (7)), y otras veces no (en el ejemplo (2) no pondríamos «$\Leftarrow$ yo camino $\Rightarrow$ me muevo», expresión sin sentido).

✎ «Por lo tanto» a veces se indica con el símbolo «$\therefore$». Menos común es el símbolo «$\because$» para indicar «porque».

En general puede ser que $p \Rightarrow q$ pero $q \not\Rightarrow p$, como en

$$\text{hombre} \Rightarrow \text{mortal} \quad \text{(todos los hombres son mortales)}$$

(donde entre paréntesis indicamos una versión más informal) que es verdadera, pero

$$\text{mortal} \Rightarrow \text{hombre} \quad \text{(todos los mortales son hombres)}$$

es falsa (los canguros también son mortales).

Para ver que una implicación es falsa, basta dar un *contrajemplo*, i.e., un ejemplo donde «p y no q» es verdadera. En el ejemplo anterior, el canguro es un ejemplo de mortal (p) que no es hombre (no q).

✎ Intercambiaremos «implica», «todo», «cada», «para todo» y «cualquiera» sin ningún tipo de pudor. Así, para nosotros serán equivalentes:

- si h es hombre entonces h es mortal
- hombre $\Rightarrow$ mortal
- todo hombre es mortal
- cada hombre es mortal
- cualquiera que sea el hombre h, h es mortal
- para todo hombre h, h es mortal

En algunos casos tenemos tanto el «si» como el «sólo si». Por ejemplo, cuando x es un número real tenemos que tanto

$$x = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 0 \quad \text{(si } x \text{ es 0 entonces su cuadrado también lo es)}$$

como

$$x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \quad \text{(si el cuadrado de } x \text{ se anula entonces } x \text{ también)}$$

son verdaderas. En estos casos podemos resumir ambas implicaciones usando «si y sólo si», simbolizado con «$\Leftrightarrow$»,

$$x = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 0 \quad (x \text{ es 0 } \textit{si y sólo si} \text{ su cuadrado lo es}).$$

En definiciones, e.g.,

un número entero es par si es múltiplo de 2,

el «si» debe entenderse como «si y sólo si»: si un número entero es múltiplo de 2 entonces es par, y si un número entero es par entonces es múltiplo de 2.

Teoremas, lemas, etc. Son enunciados de la forma $p \Rightarrow q$. Aunque pueden ponerse bajo el nombre genérico de *teoremas* (o sencillamente implicaciones), en general *teorema* se reserva para los resultados principales, llamando *lemas* a resultados menores previos que conducen a resultados más importantes, y *corolarios* a las consecuencias más o menos sencillas de resultados principales como teoremas, por ejemplo, casos particulares.

✎ Muchas veces los enunciados de los corolarios son más importantes, en el sentido de que se usan más, que los teoremas de los cuales son consecuencia, y por otra parte hay lemas famosos de los cuales se deducen teoremas no tan importantes.

En fin, que la importancia de un resultado es bastante subjetivo y no hay criterios uniformes para llamar a algo lema o teorema o corolario.

A veces todos estos enunciados o resultados se engloban simplemente con la palabra *proposición*, evitando mayores complicaciones.

Demostraciones. La *demostración* es una serie o cadena de razonamientos que conducen a establecer la verdad de una proposición de la forma $p \Rightarrow q$.

Hay muchas formas de escribir una misma demostración, y un resultado puede tener demostraciones conceptualmente distintas (como veremos con el teorema de Pitágoras).

Hay diversas técnicas para demostrar «$p \Rightarrow q$»: podemos usar una técnica directa, o demostrar el *contrarecíproco* «(no q) $\Rightarrow$ (no p)», o usar la técnica denominada *reducción al absurdo* o *por contradicción*, demostrando que «p y (no q)» es falso (o absurdo o contradictorio), como en la demostración del lema 1.2.

Enunciados y demostraciones. Veamos un ejemplo de cómo enunciaremos resultados y escribiremos sus demostraciones.

1.2. Lema. *Si a es un número real positivo, entonces $-a$ es negativo.*

Demostración. Razonando por contradicción, supongamos que $a > 0$ y $-a \geq 0$.

Sumando miembro a miembro las inecuaciones

$$\begin{aligned} a &> 0 \\ -a &\geq 0 \end{aligned}$$

obtenemos

$$a + (-a) > 0,$$

pero como $a+(-a) = 0$, llegamos a $0 > 0$ que es falso. Esta contradicción proviene de suponer que $a > 0$ y $-a \geq 0$. □

✎ Algunos autores dividen explícitamente la proposición (teorema, lema o corolario) «$p \Rightarrow q$» en dos partes: la hipótesis (p) que se supone verdadera, y la tesis (q). Por ejemplo,

Hipótesis: a es un número real positivo.

Tesis: $-a$ es negativo.

Este esquema ayuda al principio, pero nosotros no lo usaremos.

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Siendo que una proposición es verdadera o su negación lo es (pero no ambas simultáneamente), ver que si p y q son proposiciones entonces una (y sólo una) de las siguientes es verdadera (y las restantes falsas):

$$p \text{ y } q, \quad p \text{ y (no } q), \quad (\text{no } p) \text{ y } q, \quad (\text{no } p) \text{ y (no } q).$$

Sugerencia: considerar las cuatro posibilidades p verdadera y q verdadera, p verdadera y q falsa, etc.

2. Conjuntos

En general pensamos que una figura plana está compuesta por puntos, curvas, tal vez incluyendo la región encerrada por ellas. Más ampliamente, una figura será para nosotros un conjunto de puntos en el plano.

✎ La geometría euclidiana plana también se denomina *planimetría*.

✈ En realidad no tenemos por qué pensar que los puntos son elementos de un conjunto llamado recta. Podríamos pensar que puntos, rectas y planos son objetos que tienen ciertas relaciones entre ellos. En geometría proyectiva se ve que muchas veces se pueden intercambiar «punto» con «recta» y obtener un resultado válido. Por ejemplo: «dos puntos distintos determinan una recta» y «dos rectas distintas determinan un punto» (en proyectiva todas las rectas se intersecan).

Otros conjuntos particularmente importantes para nosotros son los numéricos: los *enteros*, $0, 1, -1, 2, -2, \dots$, denotados por $\mathbb{Z}$; los *racionales*, cocientes de enteros con denominador no nulo, denotados por $\mathbb{Q}$; y los *reales*, que completan la recta «sin dejar agujeros», indicados por $\mathbb{R}$. Los *naturales* son los enteros positivos, $1, 2, 3, \dots$, y se indican con $\mathbb{N}$.

✎ En algunos casos resulta más cómodo considerar que 0 es natural, y tomar $\mathbb{N}$ como todos los enteros no negativos: hay que tener cuidado en saber cuál convención se está usando.

Suponemos conocidos estos conjuntos numéricos así como las operaciones de suma, resta, producto, etc.; el orden ($>$, $<$, $\geq$, $\leq$), y las relaciones entre ellos (como $a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b$; $(a + b) \times c = ac + bc$, o $a > b \Rightarrow a + c > b + c$), que veremos con más detalle en el apunte sobre números reales.

Repasemos algunos conceptos de la teoría de conjuntos.

Pertenencia. Los conjuntos están constituidos por elementos. Si el elemento x está en (o *pertenece a* o *es un elemento de*) el conjunto A, ponemos $x \in A$. Los conjuntos se indican generalmente con letras mayúsculas y sus elementos en minúsculas, ambas cursivas.

✎ Aunque se parecen, son distintos los símbolos $\in$ (pertenece) y ϵ (épsilon griega), o su variante ε.

Cuando un conjunto se describe caracterizando los elementos que lo componen, ponemos esta descripción entre llaves. Así, $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ es el conjunto de números racionales positivos.

Otras veces podemos enumerar los elementos, como en $\{3, 5, 8\}$, o dejar con puntos suspensivos *si queda clara la descripción*, como en

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

que *parece indicar* que A es el conjunto de los números enteros que son positivos e impares.

Relaciones entre conjuntos. Si A y B son dos conjuntos y todos los elementos de A están también en B, es decir si

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B,$$

decimos que A está *incluido* o *contenido* en B y lo indicamos como

$$A \subset B \quad \text{o} \quad B \supset A.$$

En este caso decimos también que A *es un subconjunto* de B o *una parte* de B.

Dos conjuntos son *iguales* cuando los elementos de uno son elementos del otro y recíprocamente. Es decir,

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \text{ y } B \subset A.$$

✎ Por lo tanto, para demostrar que un conjunto es igual a otro en general hay que demostrar las dos inclusiones.

✎ Usamos el signo « = » con dos sentidos distintos.

Uno para definir el conjunto, como en $A = \{1, 2, 3\}$, y otro para expresar que los dos conjuntos a ambos lados de la igualdad tienen los mismos elementos, como en $\{1, 2, 3\} = \{x : x \text{ es entero positivo menor que } 4\}$.

Algunos autores hacen distinciones entre estos dos usos (y ciertamente se hace al programar en la computadora), poniendo símbolos como « := » para las definiciones.

Siguiendo la costumbre usual, nosotros no haremos esta distinción en la notación.

A veces ponemos $A \subsetneq B$ o $A \subsetneqq B$ para indicar que $A \subset B$ pero $A \neq B$.

Operaciones. Pensamos que los elementos con los que trabajamos están en un *conjunto universal*, por ejemplo el plano o $\mathbb{R}$. En contrapartida, el *conjunto vacío* es el conjunto que no tiene elementos, y se indica por $\emptyset$.

Dados dos conjuntos A y B, obtenemos otros conjuntos mediante las operaciones de *unión*

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\},$$

e *intersección*

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Dos conjuntos A y B son *disjuntos*[3] si no tienen elementos comunes (en símbolos, $A \cap B = \emptyset$). Si $A \cap B \neq \emptyset$, decimos que A *corta* o *interseca* a B.

A veces es conveniente considerar la *diferencia de conjuntos*, definida como

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Por ejemplo, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es el conjunto de números *irracionales*.

Producto cartesiano. Dados dos conjuntos no vacíos A y B, el *producto cartesiano* es el conjunto $A \times B$ formado con los pares ordenados de la forma (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$.

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 4\}$,

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}.$$

[3] Según la Real Academia Española, lo correcto es *disyuntos*, pero seguimos la costumbre en nuestro país. A propósito, el «o» en lógica a veces se llama *disyunción*, pero el «y» es la *conjunción*.
En fin, si nos vamos a poner estrictos, el nombre del curso debería ser Geometría *euclidiana* plana (y no *euclídea*).

El orden en los pares es importante: $(1,2) \neq (2,1)$. En el ejemplo anterior, $(1,4) \in A \times B$ pero $(4,1) \notin A \times B$.

Hay una clara correspondencia entre los conceptos de lógica y los de teoría de conjuntos: «$\Rightarrow$» se relaciona con la inclusión, «$\Leftrightarrow$» con la igualdad entre conjuntos, «y» con la intersección, «o» con la unión, y «no» con la diferencia de conjuntos.

Así, las leyes de De Morgan para lógica (propiedad 1.1) se transforman en relaciones para conjuntos:

2.1. Propiedad (leyes de De Morgan para conjuntos). *Si A y B son subconjuntos del conjunto universal U, entonces*

- $U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$.
- $U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B)$.

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.1. Demostrar que dados dos conjuntos A y B,

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \qquad \text{y} \qquad A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B),$$

y que los conjuntos que intervienen en los miembros derechos son disjuntos (en cada caso).

3. Funciones

Si A y B son conjuntos no vacíos, una *función* o *aplicación* de A en B, denotada por $f : A \to B$, es una regla que para cada $a \in A$ asigna un único $b \in B$, indicado por $f(a) = b$. A es el *dominio* y B es el *codominio* de la función.

La regla puede darse mediante una expresión más o menos sencilla, como

$$f(x) = x^2,$$

o algo más complicado como el *valor absoluto*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

También podemos definir una función mediante una tabla si el dominio es finito, como $f : \{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$ definida por

x	$f(x)$
1	5
2	4
3	4

$f : A \to B$ es:

- *suryectiva* o *sobre* si todo $b \in B$ es *imagen* por f de algún punto de A, i.e.

  $$\text{para todo } b \in B \text{ existe } a \in A \text{ tal que } b = f(a).$$

  ✎ Es un problema de *existencia*.

- *inyectiva* o *uno a uno*, si puntos distintos de A tienen imágenes distintas, i.e.,
$$a, a' \in A,\ a \neq a' \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(a'),$$
o el equivalente
$$a, a' \in A,\ f(a) = f(a') \quad \Rightarrow \quad a = a'.$$
✎ Es un problema de *unicidad*.
- *biyectiva* o *biunívoca* si es a la vez suryectiva e inyectiva.
✎ Es un problema de *existencia* y *unicidad*.

La función no es sólo la «regla», si no que también incluye al dominio y codominio. Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} && \text{y} \quad f(x) = |x|, \\ &g : \mathbb{Z} \to \{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0\} && \text{y} \quad g(x) = |x|, \\ &h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} && \text{y} \quad h(x) = |x|, \end{aligned} \tag{8}$$

entonces f es biyectiva, g no es inyectiva pero es suryectiva, y h no es ni suryectiva ni inyectiva.

✎ Muchas veces —cuando no lleva a confusión— no indicamos el dominio y el codominio, como en el caso del valor absoluto, que podría considerarse como de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$, o de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$, o de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Una función sencilla en la que dominio y codominio coinciden es la *identidad* $\mathrm{I}_A : A \to A$, definida como $\mathrm{I}_A(x) = x$ para $x \in A$. Es claro que I_A es biyectiva.

Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$, podemos definir su *composición* $g \circ f : A \to C$ por $g \circ f(a) = g(f(a))$.

✎ La composición de funciones no es «conmutativa» (en general). Por ejemplo si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ están definidas por $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2$, entonces
$$g \circ f(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1, \qquad f \circ g(x) = x^2 + 1.$$

Si $f : A \to B$ es biyectiva, podemos definir su *inversa* $f^{-1} : B \to A$ por

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{tal que} \quad b = f(a).$$

En este caso se cumple que f^{-1} es también biyectiva y

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{I}_A \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{I}_B.$$

3.1. Ejercicios

Ejercicio 3.1. Demostrar las afirmaciones que siguen a las ecuaciones (8).

Ejercicio 3.2. Demostrar que

a) $x \leq |x|$ y $x^2 = |x|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Si $x, y \in \mathbb{R}$,[4] entonces $|xy| = |x||y|$. En particular, $|x| = |-x|$. *Sugerencia*: considerar los (cuatro) casos $x \geq 0$ y $y \geq 0$, $x \geq 0$ y $y < 0$, etc.

[4] Ponemos $a, b \in A$ en vez de la versión más formal $a \in A$ y $b \in A$.

c) La *desigualdad triangular* para reales:

$$|x+y| \le |x| + |y| \quad \text{para cualesquiera } x, y \in \mathbb{R}.$$

d) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, definimos la distancia entre ellos por $\operatorname{dist}(x,y) = |x-y|$.

✎ O sea, $\operatorname{dist}(:)\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

i) $\operatorname{dist}(x,y) = \operatorname{dist}(y,x)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

ii) $\operatorname{dist}(x,y) \le \operatorname{dist}(x,z) + \operatorname{dist}(z,y)$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$ (otra versión de la desigualdad triangular).

Ejercicio 3.3. Supongamos que $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h = g \circ f$. Demostrar que

a) Si f y g son inyectivas, h también lo es.

b) Si f y g son suryectivas, h también lo es.

c) Si f y g son biyectivas, h también lo es.

Ejercicio 3.4. Demostrar que si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces

a) f^{-1} está bien definida, i.e., para todo $b \in B$ existe un único $a \in A$ tal que $f^{-1}(b) = a$,

b) f^{-1} es biyectiva.

Ejercicio 3.5. Demostrar que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0, \\ x+1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

es suryectiva pero no inyectiva. *Sugerencia*: hacer una tabla o un gráfico.

Ejercicio 3.6. Demostrar que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x/(1+|x|)$ es inyectiva pero no suryectiva. *Sugerencia*: hacer una tabla o un gráfico.

4. Relaciones de equivalencia

Una *relación* entre los conjuntos no vacíos A y B es cualquier subconjunto no vacío del producto cartesiano $A \times B$. A se llama el *dominio* y B el codominio de la relación, como en las funciones. De hecho, muchas veces las funciones se presentan como relaciones.

El orden es un ejemplo de relación entre números reales. Como subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, consideraríamos (a,b) en la relación si $a \le b$.

Acá nos interesan las relaciones *de equivalencia* en un conjunto A. Poniendo $a \equiv b$ si a y b son equivalentes, para ser una relación de equivalencia «$\equiv$» debe satisfacer las siguientes propiedades:

- Para todo $a \in A$, $a \equiv a$ (*reflexividad*).
- Si $a, b \in A$ y $a \equiv b$, entonces $b \equiv a$ (*simetría*).
- Si $a, b, c \in A$ son tales que $a \equiv b$ y $b \equiv c$, entonces $a \equiv c$ (*transitividad*).

La igualdad (en cualquier conjunto) es un ejemplo de relación de equivalencia.

Toda relación de equivalencia está asociada a una partición, i.e., una familia de conjuntos disjuntos cuya unión da todo.

Por ejemplo, si en $\mathbb{N}$ tomamos el conjunto A de los número pares y el conjunto B de los impares, A y B forman una partición de $\mathbb{N}$. La relación subyacente aquí es

$$x \equiv y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \text{ es múltiplo (entero) de } 2. \tag{9}$$

4.1. Ejercicios

Ejercicio 4.1. Demostrar que la relación « $\equiv$ » definida en la ecuación (9) es de equivalencia.

5. Nociones de geometría

Suponemos conocidos conceptos tales como:

Punto: Se denota con letras mayúsculas (cursivas), como A.

Recta: Se denota con letras minúsculas (cursivas), como a; si pasa por los puntos A y B, a veces la indicamos por AB.

✎ Las notaciones de teoría de conjuntos y de planimetría chocan entre sí: en geometría tiene sentido poner $A \in a$ (e.g., el punto A está en la recta a), mientras que en conjuntos más bien pondríamos $a \in A$ (e.g., el elemento a pertenece al conjunto A). Trataremos de mantener ambas tradiciones, confiando en que no habrá confusiones para el lector atento.

Semirrecta o rayo: Se denota con letras minúsculas cursivas, como las rectas. Si tiene origen en A y pasa por B, a veces ponemos AB (primero el origen). Observar que es la misma notación que para la recta por A y B, pero para semirrectas el orden indicado es importante.

Segmento: En general lo indicamos por los extremos, e.g., AB (igual que en rectas y semirrectas). Pero también mediante letras cursivas minúsculas, como a.

✎ A veces se usan las notaciones $\overline{AB}$ para el segmento, $\overrightarrow{AB}$ para la semirrecta, y $\overleftrightarrow{AB}$ para la recta. Aunque es más formal que lo que hacemos, es una sobreabundancia de notación, y dificulta la lectura y escritura. Nosotros no haremos estas distinciones, tratando de dejar claro en cada caso a qué nos referimos.

✎ a y BC pueden indicar tanto una recta, una semirrecta o un segmento.

Ángulo: Si está comprendido entre las semirrectas a y b de origen O, lo indicaremos por $\angle ab$, o $\angle O$ si no surgen confusiones. También podemos poner $\widehat{ab}$ o $\widehat{O}$. Si A es un punto de a y B uno de b, también pondremos $\angle AOB$ (o $\widehat{AOB}$) donde el segundo punto mencionado es el vértice (y por lo tanto el orden es importante). También es usual denotar los ángulos por letras griegas como α.

Triángulo: Denotaremos con ABC al triángulo de vértices A, B y C.

✎ A veces se usa la notación $\triangle ABC$, pero normalmente omitiremos « $\triangle$ ».

Figuras como triángulos y polígonos en general también se indican con letras mayúsculas, como T o F.

Circunferencia: Normalmente se indican con letras minúsculas, como c (a diferencia de otras figuras, que se indican con mayúsculas). Es posible ver indicado el radio por r, R o ρ (la «r» griega).

También supondremos conocidos el uso de regla (graduada), para trazar rectas y medir segmentos; compás, para circunferencias; y transportador, para medir ángulos. En el gabinete usaremos un software de geometría dinámica,[5] pero en los exámenes *no* usaremos la computadora, así que es recomendable practicar también con regla y compás.

5.1. Ejercicios

Ejercicio 5.1.

a) Dibujar dos puntos y denominarlos A y B.

b) Trazar una recta por ellos y llamarla ℓ.

c) Dibujar una perpendicular a ℓ por A, y llamarla r.

d) Dibujar un tercer punto C, que no esté en las rectas trazadas (ni en ℓ ni en r).

e) Trazar una perpendicular a ℓ que pase por C.

f) Trazar la recta t que pasa por A y C.

g) Trazar la paralela a t que pasa por B.

Ejercicio 5.2.

a) Trazar una recta y tres puntos en ella.

b) Denominar los puntos con A, B y C, de modo que el punto B esté entre A y C.

c) Medir los segmentos AB, AC y BC y comparar la longitud de AC con la suma de las longitudes de AB y BC.

Ejercicio 5.3.

a) Dibujar un punto O en el plano.

b) Dibujar dos semirrectas con origen en O, llamarlas a y b.

c) Marcar el ángulo $\alpha = \angle ab$ que forman a y b (el «más chico») y medirlo.

d) Construir una tercer semirrecta, c, también con origen O e «interior» al ángulo α.

e) Medir los ángulos $\angle ac$ y $\angle bc$ y comparar la suma de sus medidas con la del ángulo α.

Ejercicio 5.4. Tomar un punto cualquiera y trazar a partir de él una semirrecta. Construir en esta semirrecta un segmento de 5 cm (a partir del origen) y un ángulo de 45° («apoyado» sobre la semirrecta, hay dos posibilidades).

Ejercicio 5.5. Construir un triángulo ABC arbitrario, un punto A' (distinto de A, B y C), y luego un triángulo $A'B'C'$ congruente al ABC (i.e., los lados correspondientes tienen igual longitud).

Ejercicio 5.6.

[5] Nosotros usaremos Geogebra (`http://www.geogebra.org`) en el gabinete, pero hay muchos otros softwares que también son gratis.

a) Dibujar dos puntos A y B en el plano.

b) Trazar la circunferencia c con centro A que pasa por B.

c) Trazar la circunferencia con centro en B que contiene a A.

d) Las dos circunferencias se cortan en C y D: denominar estos puntos.

e) Trazar las circunferencias con centros en C y D que pasan por A. Estas dos circunferencias cortan a c en dos nuevos puntos. Llamarlos E (para la circunferencia con centro en C) y F.

f) Trazar las circunferencias c_1 y c_2 con centros en E y F respectivamente, y que pasan por A.

g) c, c_1 y c_2 se cortan en A y otro punto: llamarlo G.

h) Trazar una circunferencia con centro G que pase por A. Tendría que aparecer una «flor» de seis pétalos: reconocerla.

i) Unir con segmentos puntos consecutivos sobre la circunferencia: BC, CE, EG, GF, FD, DB. Aparecerá el «hexágono regular».[6] Verificar que esto es así midiendo los lados (todos tienen que tener longitud igual a los radios de la circunferencia) y ángulos $\angle BCE$, $\angle CEG$, etc. que deben medir 120°.

j) Unir mediante segmentos puntos alternados sobre la circunferencia: BE, EF y FB por una parte, y CG, GD y DC por otra parte, forman triángulos equiláteros. Verificar que esto es así midiendo sus lados (deben tener igual longitud) y ángulos $\angle BEF$, $\angle EFB$, etc. (deben medir 60°).

Ejercicio 5.7.

a) Dibujar una circunferencia de centro O, un punto A en ella, y luego un pentágono regular $ABCDE$ inscripto en ella, usando que los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$, etc., miden $72°(= 360°/5)$.

b) Ídem para dibujar un heptágono regular $ABCDEFG$, donde los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$, etc., miden ahora 360°/7 (aproximadamente 51°25’43” o 51,428571).

c) Verificar que los lados de los polígonos obtenidos tienen todos los lados iguales (aproximadamente) midiéndolos.

Apéndice

Alfabeto griego

El cuadro 1 muestra el alfabeto griego: mayúsculas, minúsculas y su escritura (y pronunciación) en castellano, según el Diccionario de la Real Academia Española. Entre paréntesis se indica una pronunciación alternativa de uso frecuente en nuestro país. Algunas letras tienen variantes en su escritura, como ϕ y φ.

[6] Se puede escribir «hexágono» o «exágono», pero es incorrecto poner «eptágono».

A	α	alfa	N	ν	ni (nu)
B	β	beta	Ξ	ξ	xi
Γ	γ	gamma	O	o	ómicron
Δ	δ	delta	Π	π, ϖ	pi
E	ϵ, ε	épsilon	P	ρ, ϱ	ro
Z	ζ	dseda (zeta)	Σ	σ, ς	sigma
H	η	eta	T	τ	tau
Θ	θ, ϑ	zeta (theta)	Υ	υ	ípsilon
I	ι	iota	Φ	ϕ, φ	fi
K	κ	kappa	X	χ	ji
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	mi (mu)	Ω	ω	omega

Cuadro 1: Alfabeto griego