

Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2010

El pentágono regular y el número de oro

1. El decágono regular y el número de oro	1
2. Construcción del pentágono y decágono regulares	2
3. El número de oro y su relación con el arte y la naturaleza	3
4. Ejercicios	4

1. El decágono regular y el número de oro

En este apunte estudiamos la construcción del pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio r dado, o equivalentemente la del decágono regular, ya que una se obtiene fácilmente a partir de la otra.

✎ Se atribuyen a la escuela Pitagórica (unos 500 años a.C.) las primeras descripciones de construcciones de polígonos regulares inscritos en una circunferencia, entre las que se cuentan las del pentágono y decágono.

En el apunte de *construcciones* mencionamos las condiciones necesarias y suficientes de Gauss y Wantzel sobre cuáles son los polígonos constructibles con regla y compás. $5 = 2^{2^1} + 1$ es un primo de Fermat, el próximo es 17 y la construcción del polígono regular correspondiente es muy complicada.

Prácticamente todas las construcciones parten de la relación entre el decágono regular y el número de oro,

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339\dots$$

✎ Muchas veces se usa la letra ϕ en vez de τ , en honor a Fidias de Atenas (aprox. 490 a.C.–431 a.C.).

Para ver esta relación, dividamos al decágono en 10 triángulos partir del origen de la circunferencia circunscripta, y observemos que el ángulo central $\angle POB$ en la [figura 1](#) mide 36° (el ángulo central $\angle AOB$ correspondiente al pentágono mide 72°). Entonces, en el triángulo isósceles POB , los ángulos en P y en B son iguales y miden $72^\circ (= (180^\circ - 36^\circ)/2)$. Si ahora N es la intersección de la bisectriz del ángulo $\angle PBO$ con OP , resulta $\angle NBP = 72^\circ/2 = 36^\circ$, de modo que $\angle PNB = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$ y el triángulo NBP es isósceles. Por semejanza,

$$\frac{NP}{PB} = \frac{PB}{OB}.$$

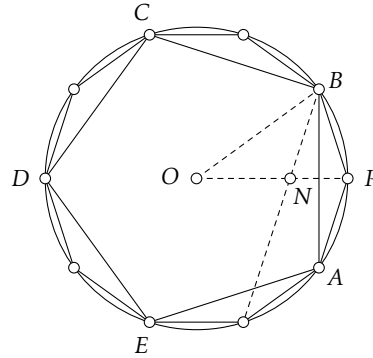


Figura 1: pentágono y decágono inscritos en una circunferencia.

Siendo OB el radio r de la circunferencia, la longitud x del lado del decágono satisface la ecuación

$$\frac{r-x}{x} = \frac{x}{r},$$

o, equivalentemente

$$x^2 + rx - r^2 = 0. \tag{1}$$

Esta ecuación tiene dos raíces,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} r,$$

una positiva y otra negativa. La que nos interesa es la positiva, $r(\sqrt{5} - 1)/2$, pues x representa la longitud de un segmento. Es decir, en el triángulo OPB , la relación entre los lados es el número de oro:

$$\frac{OP}{PB} = \frac{r}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \times \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2. Construcción del pentágono y decágono regulares

Consideremos una circunferencia con centro O y radio $r = OP$, como en la figura 2. Si Q es el punto medio de un radio perpendicular a OP , el segmento QP mide $\sqrt{5}r/2$ por el teorema de Pitágoras. Trazando la circunferencia con centro Q y radio QO (que mide $r/2$) obtenemos dos puntos, R y S con $Q * R * P$, comunes a esta circunferencia y la recta PQ , y el segmento RP mide $(\sqrt{5} - 1)r/2$, la longitud del lado del decágono inscripto.

Tomando esta longitud como radio de una nueva circunferencia con centro en P , construimos los puntos A y B sobre la circunferencia original. El segmento AB es el lado de un pentágono regular inscripto en la circunferencia original, mientras que el segmento AP (o PB) es el lado de un decágono regular inscripto en esa circunferencia. La construcción del pentágono (o decágono) se concluye transportando la longitud correspondiente sucesivamente a partir de B .

✎ En el [ejercicio 4.3](#) vemos otra construcción del pentágono regular.

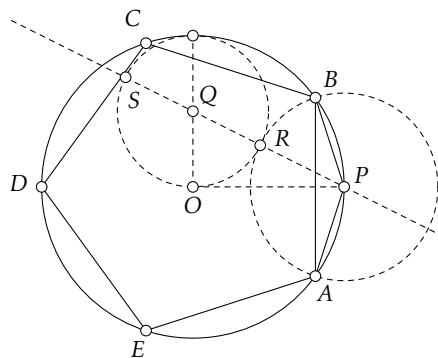


Figura 2: construcción del decágono regular inscrito en una circunferencia.

3. El número de oro y su relación con el arte y la naturaleza

El número de oro aparece frecuentemente como proporción «estética» en diseño, y puede apreciarse en pinturas, esculturas y arquitectura. Así, un rectángulo de lados a, b , con $a \geq b$, se dice que está en la *razón áurea* o *divina proporción*, si quitando el cuadrado de lado b , el rectángulo resultante es semejante al original, es decir si

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}.$$

Para resolver la ecuación, tomando $u = a/b$, resulta

$$u^2 - u - 1 = 0,$$

que es la [ecuación \(1\)](#) con $r = 1$, y cuya raíz positiva es τ .

Varios nombres en la historia aparecen relacionados. En la antigua Grecia encontramos a Fidias, quien construyó estatuas en el Partenón de Atenas con proporciones asociadas a τ , y a Euclides, quien diría que el segmento b divide al segmento a en *media y extrema razón*. Hacia el Renacimiento encontramos a Luca Pacioli (1446–1517) en su *Divina Proporción*, con ilustraciones de Leonardo da Vinci (1452–1519). Más recientemente, encontramos a Le Corbusier (1887–1965) y a Salvador Dalí (1904–1989). En fin, hay varios libros (y muchas páginas de internet) dedicados al tema.

- ✎ No hay que dejarse llevar demasiado por la «proporción áurea». Distintas encuestas muestran que la proporción $4 : 3$ ($1,33\dots : 1$) es tanto o más agradable que $\tau \approx 1,61$. La proporción $4 : 3$ fue usada por los monitores de computadoras hasta hace poco, en las películas se usan proporciones de $1,85 : 1$ y $2,39 : 1$, y en la televisión digital o de alta definición, $16 : 9$ ($1,77\dots : 1$).

En fin, el tamaño de las hojas que usamos, como la A4, está relacionado a la proporción $\sqrt{2} : 1$ ($1,414\dots : 1$): una hoja A3 dividida por la mitad da dos hojas A4 en la misma proporción, $\sqrt{2}/1 = 2 \times 1/\sqrt{2}$.

También τ aparece en la sucesión de números de Fibonacci, $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$, que pueden definirse recursivamente como

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{si } n > 2,$$

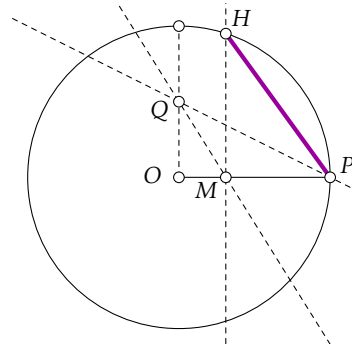


Figura 3: construcción de Richmond del pentágono regular.

i.e., a partir del tercero, cada número se obtiene como suma de los dos anteriores.

Los números de Fibonacci aparecen en la naturaleza, como el girasol o la piña, y en el arte, como en los mosaicos árabes.¹

En los cursos de matemática discreta se ve que los números de Fibonacci pueden escribirse mediante la fórmula de Euler-Binet,

$$a_n = \frac{\tau^n - (-1/\tau)^n}{\sqrt{5}},$$

por lo que (usando técnicas que se ven en cálculo) el cociente a_{n+1}/a_n entre dos números de Fibonacci consecutivos se acerca a τ a medida que n aumenta.

4. Ejercicios

Ejercicio 4.1. Demostrar que en la figura 2, $PS = \tau \times r$.

Ejercicio 4.2. Consideremos un pentágono regular de lado ℓ y un decágono regular de lado ℓ' ambos inscritos en una circunferencia de radio r .

- Dar una expresión para ℓ/r .
- Encontrar una expresión de r en términos de ℓ' .
- Construir un decágono regular de lado ℓ' dado.

Ejercicio 4.3. Justificar la construcción del pentágono regular debida a H. W. Richmond (1893), ilustrada en la figura 3:

- En la circunferencia de centro O y radio OP , construimos el punto medio Q de un radio perpendicular a OP .
- Trazamos la bisectriz del ángulo $\angle OQP$ que corta al radio OP en M , y luego una perpendicular a OP por M , obteniendo el punto H sobre la circunferencia.
- El segmento PH es el lado del pentágono buscado.

¹ Ver, e.g., <http://www.goldenmeangauge.co.uk/fibonacci.htm>