

Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2010

Propiedades de los números reales

1. Propiedades comunes	1
2. Completitud de los reales	2
2.1. Ejercicios	6
Apéndice	7
Propiedades de la suma, producto y orden	7

Una forma de construir los conjuntos numéricos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} y \mathbb{R} , es empezar con los naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$; luego construir los enteros, \mathbb{Z} , para poder hacer cualquier diferencia de naturales; luego construir los racionales, \mathbb{Q} , para poder hacer cualquier cociente de enteros (con divisor no nulo), y finalmente construir \mathbb{R} para «llenar los agujeros». El tema central de este apunte es justamente ver qué es eso de «llenar los agujeros».

Recordemos que entre los números irracionales (los reales que no son racionales) se encuentran números estrechamente ligados a la geometría como $\sqrt{2}$ y π : $\sqrt{2}$ es el cociente entre las longitudes de la hipotenusa y un cateto en triángulos rectángulos isósceles, y π es el cociente entre el perímetro de cualquier circunferencia y su diámetro.

☞ Se atribuye a la escuela pitagórica (alrededor de 500 a.C.) la demostración geométrica de la existencia de irracionales, aunque posiblemente los babilonios y los hindúes supieran de la existencia de tales números desde mucho antes.

Recién en 1761 J. H. Lambert (1728–1777) demostró que π es irracional, y en 1882 F. von Lindemann (1852–1939) demostró que es *trascendente*, es decir, que no es raíz de un polinomio con coeficientes enteros (en cambio, $\sqrt{2}$ es *algebraico*, pues es raíz del polinomio $x^2 - 2 = 0$).

¿Podrías demostrar (o recordar la demostración) que $\sqrt{2}$ es irracional?

1. Propiedades comunes

Las operaciones de suma «+» y producto «×», y la relación de orden «≤» tienen una serie de propiedades compartidas por los enteros, racionales y reales (enunciadas en el [apéndice](#)), que suponemos conocidas.

Todas estas propiedades tienen un sabor algebraico, pero para «llenar los agujeros» tenemos que ir un poco más allá.

Hay varias formas de «llenar los agujeros» (claro que con el mismo resultado). Una forma intuitiva es con las expresiones decimales, que a veces se ve en la secundaria: si son periódicas son racionales y si no son irracionales, o la variante más formal de construir las denominadas sucesiones de Cauchy.

Siguiendo la filosofía axiomática de la primera parte del curso, acá rellenamos los agujeros requiriendo la propiedad de completitud que vemos en la [sección 2](#). Pero necesitamos algunos conceptos previos.

1.1. Definición. Si A es un conjunto no vacío de números reales, entonces:

- $a \in \mathbb{R}$ es una *cota superior* de A si $x \in A \Rightarrow x \leq a$.
- $b \in \mathbb{R}$ es el *supremo* de A si b es una cota superior de A y para cualquier $a \in \mathbb{R}$ que sea cota superior de A , vale que $b \leq a$. Usamos la notación $b = \sup A$.
- si $b = \sup A$ y $b \in A$, decimos que b es el *máximo* de A , y lo indicamos por $b = \text{máx } A$.

De modo análogo podemos definir *cota inferior* ($x \in A \Rightarrow x \geq a$), *ínfimo* (b es cota inferior y si a es cota inferior de A entonces $a \leq b$), indicado por $\inf A$, y *mínimo*, denotado por $\text{mín } A$. ☞

Todo conjunto finito (no vacío) tiene máximo y mínimo, de modo que las definiciones de supremo e ínfimo adquieren interés para conjuntos *infinitos*.

- ♣ Un conjunto A es *finito* si o bien es vacío o bien existen $m \in \mathbb{N}$ y $f : A \rightarrow \{n \in \mathbb{N} : n \leq m\}$ biyectiva. Un conjunto es *infinito* si no es finito.

La demostración de existencia de máximo o mínimo en un conjunto finito es constructiva (algorítmica): examinar uno por uno los elementos. En lenguaje de inducción, el algoritmo se basa en la ecuación $\text{máx } \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\} = \text{máx } \{a_{n+1}, \text{máx } \{a_1, \dots, a_n\}\}$.

No todo conjunto tiene cota superior o inferior: como subconjunto de los reales, \mathbb{N} tiene a -1 como cota inferior y a 1 como ínfimo (y mínimo), pero no tiene cota superior, mientras que \mathbb{Z} no tiene ni cota superior ni cota inferior. Además, no siempre el supremo está en el conjunto (el conjunto no tiene máximo), como por ejemplo $\sup \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} = 0$.

En fin, pueden haber varias cotas superiores (o inferiores), pero no es difícil ver que, de existir, el supremo (o ínfimo) es único: si b y b' son supremos de A , como ambos son también cotas superiores, debe ser $b \leq b'$ (porque b es supremo y b' cota superior) y $b' \leq b$ (porque b' es supremo y b cota superior), de modo que $b = b'$.

2. Completitud de los reales

En 1912, R. Dedekind (1831–1916) puso la propiedad de «no tener agujeros» en términos de la *completitud*:

2.1. Propiedad de completitud de los reales. Si $A \subset \mathbb{R}$ tiene una cota superior entonces tiene un supremo.

En el [ejercicio 2.2](#) pedimos demostrar que \mathbb{Q} no satisface esta propiedad (suponiendo que $\sqrt{2}$ es irracional), es decir que un subconjunto de racionales acotado superiormente puede no tener supremo racional.

En el [ejercicio 2.3](#) vemos que en la [propiedad 2.1](#) podemos reemplazar «cota superior» por «cota inferior» y «supremo» por «ínfimo» (y en realidad las dos formas son equivalentes).

Para los naturales, tenemos una variante más fuerte que la de completitud cuando nos restringimos a cotas inferiores (todo subconjunto no vacío de \mathbb{N} tiene a 1 como cota inferior):

2.2. Propiedad de buen orden de los naturales. *Todo subconjunto no vacío de \mathbb{N} tiene primer elemento (o mínimo).*

☞ Por supuesto, no vale lo mismo para supremo o máximo en \mathbb{N} , puesto que \mathbb{N} no está acotado superiormente.

Demostración. Supongamos que $A \subset \mathbb{N}$ y $A \neq \emptyset$. Entonces existe $n \in A$, y el conjunto $B = \{a \in A : k \leq n\}$ es finito (y no vacío pues $n \in B$).

Por lo tanto B tiene un mínimo, $m = \min B$, tal que $m \in B$ y para todo $b \in B$ vale $m \leq b$.

Veamos que $m = \min A$, para lo cual tenemos que ver que $m \in A$ y que $m \leq a$ para todo $a \in A$.

Observemos primero que como $m \in B$, debe ser $m \leq n$.

- Como $m \in B$ y $B \subset A$, debe ser $m \in A$.
- Sea $a \in A$. Si $a \leq n$, tendremos $a \in B$ y $m \leq a$ (porque $m = \min B$). Por otro lado, si $a > n$, tendremos $m \leq n < a$.

Por lo tanto, $m \leq a$ para cualquier $a \in A$.

De modo que A tiene un mínimo (que es m). □

♣ La demostración anterior usa que todo conjunto finito de naturales tiene mínimo, y dijimos que esto se podía ver usando inducción. Muchas veces se procede al revés: se toma el buen ordenamiento como axioma de los naturales, y se ve que el principio de inducción es válido. En otras palabras, en los naturales el principio de buena ordenación, el de inducción, y la propiedad de que todo conjunto finito no vacío de números tiene mínimo, son equivalentes (se deduce uno a partir del otro).

Otra propiedad importante de los reales, compartida con \mathbb{N} , \mathbb{Z} y \mathbb{Q} , es la *arquimedianeidad*.

☞ Arquímedes de Siracusa (287–212 a.C.) fue uno de los más grandes científicos de la antigüedad griega, y posiblemente haya sido discípulo directo de Euclides. Tendremos ocasión de mencionarlo en varias oportunidades.

2.3. Propiedad de arquimedianeidad. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, ambos positivos, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.*

Esta propiedad es válida para \mathbb{N} puesto que si $b \in \mathbb{N}$,

$$b = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_b = b \times 1 < (b + 1) \times 1,$$

y entonces para cualquier $a \in \mathbb{N}$, como $1 \leq a$,

$$b < (b + 1) \times 1 \leq (b + 1) \times a.$$

por lo que basta tomar $n = b + 1$ para ver que vale la [propiedad 2.3](#).

Sobre \mathbb{Z} también vale la propiedad reduciéndose al caso de los naturales, puesto que $x \in \mathbb{Z}$ y $x > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{N}$. El [ejercicio 2.4](#) pide ver que los racionales también son arquimedianos, y entonces no es sorprendente que también los reales también lo sean.

Lo que sí es sorprendente es que la arquimedianeidad de \mathbb{R} se deduce directamente de la completitud, sin necesidad de pasar por los racionales. El resultado clave es el siguiente:

2.4. Lema. $\inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

✦ En el lenguaje de análisis matemático, estamos diciendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Demostración. Sea $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

0 es una cota inferior para A , ya que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n > 0$ y por lo tanto $1/n > 0$.

Por la completitud de \mathbb{R} (y el [ejercicio 2.3](#)) sabemos que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a = \inf A$. Además, por la definición de ínfimo y siendo 0 cota inferior de A , debe ser $0 \leq a$.

Veamos que no puede ser $0 < a$.

Razonando por contradicción, supongamos que $0 < a$. En este caso $0 < a < 2a$, y $2a$ no es cota inferior de A porque $a = \inf A$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < 2a$. Tomando $m = 2n$, que es natural, vemos que $1/m \in A$ y $1/m < a$, de modo que a no es cota inferior de A y por lo tanto $a \neq \inf A$, lo que es una contradicción que proviene de suponer $a > 0$.

Como $a \geq 0$ y $a \not> 0$, debe ser $a = 0$. Es decir, $0 = a = \inf A$. \square

En el [ejercicio 2.5](#) se pide demostrar la arquimedianeidad de los reales. Una consecuencia importante es el algoritmo de la división, para lo cual es conveniente obtener un resultado previo.

2.5. Lema. *Dados los números reales a y b , con $a > 0$, existe un único entero z tal que*

$$za \leq b < (z+1)a, \quad (1)$$

- ✎ El resultado es equivalente a decir que todo intervalo semiabierto de longitud a contiene exactamente un múltiplo entero de a ([ejercicio 2.6](#)).
- ✎ Tomando $a = 1$, z es el *piso* de x , indicado por $\lfloor x \rfloor$, y a veces también llamado *parte entera* de x , indicado por $[x]$.

Demostración. Consideramos distintos casos:

- Si $0 \leq b < a$, tomamos $z = 0$ (que verifica las [desigualdades \(1\)](#)).
- Si $b \geq a$, tomamos el conjunto $A = \{k \in \mathbb{N} : ka \leq b\}$.
 A no es vacío pues $1 \in A$. Además, por arquimedianeidad sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.
Entonces, todo elemento k de A debe estar entre 1 y $n-1$: $k \geq 1$ pues $k \in A \subset \mathbb{N}$, y de $k \in A$ vemos que

$$ka \leq b < na,$$

lo que implica $ka < na$ y (dividiendo por $a > 0$), $k < n$.

Entonces el conjunto A es finito y tiene un máximo, digamos $z = \max A$.

Por ser $z \in A$ es $za \leq b$, y por ser z máximo, debe ser $(z+1) \notin A$, lo que implica $b < (z+1)a$.

Es decir, z verifica las [desigualdades \(1\)](#).

- Si $b < 0$, aplicamos lo que sabemos para $-b$, encontrando $z' \in \mathbb{Z}$ tal que

$$z'a \leq -b < (z' + 1)a,$$

lo que implica (multiplicando por -1),

$$-(z' + 1)a < b \leq -z'a.$$

Ahora tomamos $z = -z'$ si $b = -z'a$, y $z = -z' - 1$ si $b < -z'a$. En cualquier caso obtenemos las [desigualdades \(1\)](#).

Para ver la unicidad, supongamos que $u \in \mathbb{Z}$ también satisface las [desigualdades \(1\)](#) y veamos que necesariamente $u = z$.

Tendríamos

$$za \leq b < (z + 1)a \quad \text{y} \quad ua \leq b < (u + 1)a.$$

Mezclando las desigualdades,

$$za \leq b < (u + 1)a \quad \text{y} \quad ua \leq b < (z + 1)a,$$

lo que implica

$$za < (u + 1)a \quad \text{y} \quad ua < (z + 1)a.$$

y dividiendo por $a > 0$,

$$z < u + 1 \quad \text{y} \quad u < z + 1.$$

Como u y z son enteros, tendremos

$$z \leq u \quad \text{y} \quad u \leq z,$$

o sea $u = z$. □

Ahora estamos en condiciones de obtener el algoritmo de la división.

2.6. Propiedad (algoritmo de división para reales). Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$. Entonces existen $z \in \mathbb{Z}$ y $r \in \mathbb{R}$, tales que $0 \leq r < a$ y

$$b = za + r. \tag{2}$$

Más aún, tales z y r son únicos con esa propiedad.

Demostración. Por el [lema 2.5](#), existe $z \in \mathbb{Z}$ que verifica las [desigualdades \(1\)](#).

Tomando

$$r = b - za,$$

vemos que se satisface la [igualdad \(2\)](#).

Además, $r \geq 0$ (porque $b \geq za$), y $r < a$ pues

$$a - r = a + \underbrace{za - za}_0 - r = (z + 1)a - za - r = (z + 1)a - b > 0.$$

Entonces z y r satisfacen la [igualdad \(2\)](#).

Veamos que no hay otros. Para eso tomemos $z' \in \mathbb{Z}$ y $r' \in \mathbb{R}$ con $0 \leq r' < a$ y $b = z'a + r'$. Usando que $r' < a$ tenemos

$$b = z'a + r' < z'a + a = (z' + 1)a,$$

y usando que $r' \geq 0$ tenemos

$$b = z'a + r' \geq z'a,$$

de modo que

$$z'a \leq b < (z' + 1)a.$$

Entonces z' satisface las **desigualdades (1)**, y por el **lema 2.5** debe ser $z' = z$. Finalmente, de $b = za + r = z'a + r'$ y $z = z'$ se deduce

$$za + r = z'a + r' = za + r',$$

y por lo tanto $r = r'$. Es decir, los valores de z y r con las propiedades requeridas son únicos. \square

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.1. Si A y B son subconjuntos de \mathbb{R} tales que para todo $a \in A$ existe $b \in B$ con $a \leq b$, y B está acotado superiormente, entonces $\sup A \leq \sup B$.

Ejercicio 2.2. Suponiendo que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, demostrar que \mathbb{Q} no satisface la **propiedad 2.1** de completitud viendo que $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ es acotado superiormente pero no tiene supremo en \mathbb{Q} .

\Rightarrow En general, sabiendo que $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ podríamos ver que $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq t\}$ está acotado superiormente pero no tiene supremo en \mathbb{Q} .

Ejercicio 2.3. Dado $A \subset \mathbb{R}$ definimos el conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x = -y \text{ para algún } y \in A\}$$

Demostrar que:

- Si a es cota inferior de A , entonces $-a$ es cota superior de B .
- Si $b = \sup B$, entonces $-b = \inf A$.
- Si A tiene cota inferior, entonces tiene ínfimo (en \mathbb{R}).

Ejercicio 2.4. Suponiendo que vale para \mathbb{Z} , demostrar la **propiedad 2.3** para los racionales, i.e., que dados a y b racionales positivos existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$. *Sugerencia:* poner $a = r/s$ y $b = u/v$, con $r, s, u, v \in \mathbb{N}$ y encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \times (rv) > su$.

Ejercicio 2.5. Demostrar la **propiedad 2.3** a partir del **lema 2.4**. *Sugerencia:* si a y b son reales positivos, $b/a > 0$ y no es cota inferior del conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ejercicio 2.6. Demostrar que el resultado del **lema 2.5** es equivalente a decir que todo intervalo semiabierto de longitud a contiene exactamente un múltiplo entero de a . Concretamente, demostrar que dado $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, son equivalentes:

- Para todo $b \in \mathbb{R}$ existe un único $z \in \mathbb{Z}$ tal que $za \leq b < (z+1)a$.
- Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $na \in (x, x+a]$.
- Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe un único $m \in \mathbb{Z}$ tal que $ma \in [x, x+a)$.

Sugerencia: Para $i) \Leftrightarrow ii)$ poner $za \leq b < (z+1)a$ en la forma $b-a < za \leq b$ y luego $b = x+a$ y $m = z$. Para $ii) \Leftrightarrow iii)$ considerar los negativos (como el caso $b < 0$ en la demostración del **lema 2.5**).

Apéndice

Propiedades de la suma, producto y orden

Indicando por \mathbb{K} a cualquiera de \mathbb{Z} , \mathbb{Q} o \mathbb{R} , «+», «×» y «≤» satisfacen las siguientes propiedades:

1. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{K}$, $a + b \in \mathbb{K}$ y $a \times b \in \mathbb{K}$.
2. *Asociatividad*: Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{K}$,

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{y} \quad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c.$$
3. *Conmutatividad*: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{K}$,

$$a + b = b + a \quad \text{y} \quad a \times b = b \times a.$$
4. *Distributividad entre suma y producto*: Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{K}$,

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$
5. *Identidad (o neutro) para suma y multiplicación*: Existen dos elementos de \mathbb{K} , indicados por 0 y 1 ($0 \neq 1$), tales que para todo $a \in \mathbb{K}$,

$$a + 0 = a \quad \text{y} \quad a \times 1 = a.$$
6. *Inverso para la suma*: Para todo $a \in \mathbb{K}$ existe un elemento en \mathbb{K} , indicado por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.
7. *Orden*: Existe un *orden total* en \mathbb{K} , \leq , tal que:
 - Para todos $a, b \in \mathbb{K}$, si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$ (*antisimetría*).
 - Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{K}$, si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$ (*transitividad*).
 - Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{K}$, o bien $a \leq b$ o bien $b \leq a$ (*totalidad*).
8. *Compatibilidad entre el orden y la suma y producto*:
 - Para todos $x, y, z \in \mathbb{K}$, si $x \geq y$ entonces $x + z \geq y + z$.
 - Para todos $x, y, z \in \mathbb{K}$, si $x \geq y$ y $z \geq 0$ entonces $x \times z \geq y \times z$.

\mathbb{Q} y \mathbb{R} (pero no \mathbb{Z}) satisfacen además:

9. *Inverso para el producto*: Para todo $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, existe un elemento en \mathbb{K} , indicado por a^{-1} , tal que $a \times a^{-1} = 1$.
- ☞ \mathbb{K} es un *cuerpo* si satisface las propiedades 1 a 6 y 9. Si satisface además 7 y 8, \mathbb{K} es un *cuerpo ordenado*: \mathbb{Q} y \mathbb{R} son cuerpos ordenados.