

Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2010

Semejanza

1. Semejanza de triángulos	2
1.1. Ejercicios	2
2. Transformaciones de semejanza y homotecias	3
2.1. Ejercicios	4
3. Bibliografía	4

La igualdad (o mejor, congruencia) de figuras planas es una componente muy fuerte en los axiomas de Pogorélov [6], reforzada en el estudio de isometrías que hicimos y que —como ya mencionamos— otros autores toman como axiomas.

No es esta la única forma de presentar la geometría que estamos viendo. Por ejemplo, Yaglom [8] sostiene que la geometría «de todos los días» es una geometría de semejanzas, y lo ejemplifica con el docente que dibuja una figura en el pizarrón y el alumno «la copia» en su cuaderno. Decididamente, las figuras en el pizarrón y en el cuaderno no son iguales pues no tienen el mismo tamaño, pero sus características esenciales son las mismas.

Es así que Birkhoff [1] reemplaza el **axioma V** sobre igualdad de triángulos (el criterio LAL) por el análogo con semejanzas, reproducido acá en el **teorema 1.2**.

Si bien Euclides dedica gran parte de *Los Elementos* [4, 5] a las proporciones (en el **Libro V**) y semejanza (en el **Libro VI**), es Descartes en *La Geometría* [3] quien relaciona fuertemente la semejanza con las operaciones numéricas al suponer la existencia de un segmento unitario.

En el ejercicio 1.2 vemos la construcción geométrica de la multiplicación (o división). Junto con la extracción de raíces cuadradas (que veremos más adelante), estas construcciones aparecen en las primeras páginas de *La Geometría*, copiando lo hecho en **Euclides VI.12** (para multiplicación) y **Euclides VI.13** (raíces cuadradas).

La construcción de la raíz cuadrada es resolver geoméricamente el problema de encontrar un cuadrado de igual área que un rectángulo dado (la *cuadratura* de un rectángulo), cosa que hace Euclides también usando área en **Euclides II.14**.

Usando como herramienta básica el teorema de Tales (2.3 en el apunte de *aplicaciones del área*), acá seguimos a Pogorélov [6, §12] en el estudio de semejanzas y transformaciones asociadas (omitiendo algunas demostraciones y resultados relacionados con la circunferencia). El **teorema 2.3** está tomado de Pogorélov [6, pág. 127].

📌 Los ejercicios 2.4, 2.5 y 2.6 están tomados de Vasíliev y Gutenmájer [7]. El ejercicio 2.7 está tomado de Coxeter y Greitzer [2].

1. Semejanza de triángulos

1.1. Definición. Los triángulos ABC y $A'B'C'$ se dicen *semejantes* si

$$\angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C',$$

y

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

En este caso escribimos $ABC \sim A'B'C'$.

1.2. Teorema. Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes en cualquiera de los siguientes casos:

- $\angle A = \angle A'$ y $\angle B = \angle B'$, o
- $\angle A = \angle A'$ y $AB/A'B' = AC/A'C'$, o
- $AB/A'B' = AC/A'C' = BC/B'C'$.

☛ Construimos B'' sobre la semirrecta AB y C'' sobre la semirrecta AC de modo que $AB'' = A'B'$ y $AC'' = A'C'$.

En el primer caso los triángulos $AB''C''$ y $A'B'C'$ son iguales por LAL, y $BC \parallel B''C''$ pues $\angle ABC = \angle AB''C''$. Usando el teorema de Tales,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Como $\angle C = \angle C'$ (la suma de los ángulos interiores en cada triángulo es 180°), repitiendo el argumento cambiando $\angle A$ por $\angle C$ tendremos

$$\frac{CB}{C'B'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

En el segundo caso, también tenemos que los triángulos $AB''C''$ y $A'B'C'$ son iguales por LAL. Usando el recíproco del teorema de Tales, se deduce $BC \parallel B''C''$ y por lo tanto $\angle ABC = \angle AB''C''$ y $\angle ACB = \angle AC''B''$, con lo que se reduce al caso anterior.

En el tercer caso tendremos $AB/AB'' = AB/A'B' = AC/A'C' = AC/AC''$ (por construcción e hipótesis), de modo que los triángulos ABC y $AB''C''$ son similares (por el caso anterior), pero entonces $BC/B'C' = AB/AB' = BC/B''C''$ (por hipótesis y lo reciente), de modo que $B'C' = B''C''$. Entonces los triángulos $A'B'C'$ y $AB''C''$ son iguales (por LLL).

1.3. Teorema. Si un triángulo ABC tiene $\angle C = 90^\circ$ y D es el pie de la altura correspondiente a C , entonces

$$AD \times DB = CD^2.$$

☛ Los triángulos ABC , ACD y CBD son semejantes pues $\angle ACB = \angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle CAD = \angle CBD (= 90^\circ - \angle ABC)$. En particular, $AD/CD = CD/BD$.

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1.1 (teorema de Pitágoras con semejanzas). Si ABC es un triángulo rectángulo en C , sea P el pie de la altura por C , de modo que $P \in AB$. Entonces:

- a) Los triángulos ABC , ACP y CBP son semejantes.
 b) $\frac{AC}{AB} = \frac{AP}{AC}$ y $\frac{BC}{AB} = \frac{BP}{BC}$.
 c) Por lo tanto $AC^2 + BC^2 = AB \times AP + AB \times BP = AB^2$.

Ejercicio 1.2. Dadas tres longitudes a , b y c , construir un segmento de longitud x tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

✎ Esto es [Euclides VI.12](#).

2. Transformaciones de semejanza y homotecias

2.1. Definición. Se llama *transformación de semejanza* o simplemente *semejanza* a toda aplicación biunívoca del plano sobre sí mismo en la que cualesquiera que sean los puntos X, Y , $X \neq Y$, que se corresponden con los puntos X', Y' , la fracción

$$\frac{X'Y'}{XY}$$

es constante.

Este razón se llama *coeficiente de semejanza*.

- Si la figura F se transforma mediante una semejanza en F' , las figuras F y F' se dicen *semejantes*.

2.2. Teorema. Una transformación de semejanza transforma rectas en rectas, semirrectas en semirrectas, segmentos en segmentos, circunferencias en circunferencias, y conserva los ángulos entre semirrectas.

🔗 [Ejercicio 2.1](#).

2.3. Teorema. Si k es el cociente de semejanza de una transformación y F es una figura simple que se transforma en la figura F' , entonces F' es una figura simple y

$$\text{área}(F') = k^2 \times \text{área}(F).$$

- ✎ Es decir, longitudes se modifican «linealmente» mientras que áreas se modifican «cuadráticamente».
- 🔗 Basta ver que un cuadrado de lado 1 se transforma en uno de lado k , que tiene área k^2 . Al cubrir la figura original con triángulos, éstos se transforman en triángulos de área k^2 veces la de los originales y recíprocamente (con $1/k^2$).

2.4. Definición. Sea O un punto cualquiera, y sea k un número positivo. Se llama *homotecia de centro O y coeficiente k* a la aplicación que a todo punto X le hace corresponder el punto X' donde

- a) X' está en la semirrecta OX , y
 b) $OX' = k OX$.

- Cuando $k < 0$, definimos la homotecia como la composición de la homotecia de centro O y coeficiente $-k$ con la simetría respecto de O , i.e., a X le corresponde X' tal que

- a) X' está en la semirrecta opuesta a la semirrecta OX , y
 b) $OX' = (-k) OX$.

2.5. Teorema. Toda homotecia es una transformación de semejanza.

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.1. Demostrar el [teorema 2.2](#).

Ejercicio 2.2. Demostrar el [teorema 2.5](#) (incluyendo que una homotecia es una transformación biunívoca).

Ejercicio 2.3. Sean O un punto, α un ángulo y k un número real, $k \neq 0$. Consideremos R una rotación de centro O y ángulo α (la rotación en algún sentido), K la homotecia de centro O y razón k , y $S = R \circ K$.

- ¿Es $R \circ K = K \circ R$?
- Si $\alpha = 180^\circ$, ¿qué tipo de transformación es S ?
- Dado el cuadrado $OABC$ (vértices recorridos en el mismo sentido que R), encontrar α y k tales que $S(A) = B$.
- Describir S^{-1} (la transformación inversa de S) en términos de rotaciones y homotecias.
- Supongamos que O' es otro punto, α' es otro ángulo y $k' = 1/k$, y definamos R' , K' y S' de modo similar a R , S y K (las rotaciones R y R' en el mismo sentido). ¿Qué tipo de transformación es $S' \circ S$?

Ejercicio 2.4. Dados una circunferencia y un punto A , encontrar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos que tienen un extremo en A y otro en la circunferencia.

Ejercicio 2.5. Dados una circunferencia y un punto A en su exterior, construir B y C sobre la circunferencia de modo que $AB = BC$.

Ejercicio 2.6. Sea ℓ una recta y A un punto no en la recta. Encontrar el lugar geométrico de los vértices C de los cuadrados $ABCD$ cuando B varía sobre ℓ .

☞ Comparar con el [ejercicio 5.8](#) del apunte de *isometrías*.

Ejercicio 2.7. Si en los lados BC , CA y AB del triángulo ABC se construyen externamente cuadrados de centros O_1 , O_2 y O_3 respectivamente, entonces los segmentos O_1O_2 y CO_3 son iguales y perpendiculares. *Sugerencia:* usar el [ejercicio 2.3. inciso e](#)) con $O = A$, $\alpha = 45^\circ$, $k = \sqrt{2}$, $O' = C$, $\alpha' = \alpha$, $k' = 1/k$.

3. Bibliografía

- [1] G. BIRKHOFF. A set of postulates for plane geometry (based on scale and protractors). *Annals of Mathematics*, 33:329–345, 1932.
- [2] H. S. M. COXETER Y S. L. GREITZER. *Retorno a la Geometría, La Tortuga de Aquiles n.º 1*. DLS-EULER editores, Madrid, 1993.
- [3] R. DESCARTES. *La Geometría*. Limusa, 1997. Ver <http://www.gutenberg.org/files/26400/26400-pdf.pdf>.
- [4] T. L. HEATH. *The thirteen books of Euclid's Elements*. Dover Publications, 1956.
- [5] D. E. JOYCE. *Euclid's Elements*. Clark University, 1996. URL <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>. Ver también http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm.

- [6] A. V. POGORÉLOV. *Geometría elemental*. MIR, Moscú, 1974.
- [7] N. B. VASÍLIEV Y V. L. GUTENMÁJER. *Rectas y curvas*. MIR, Moscú, 1980.
- [8] I. M. YAGLOM. *Geometric Transformations II*. Mathematical Association of America, 1968.