

# Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2010

## *Coordenadas cartesianas y trigonometría*

---

1. Coordenadas cartesianas	1
2. Trigonometría y funciones trigonométricas	5
3. Producto interno y ángulo entre rectas	10
4. La fórmula de Herón y extensiones	12
5. Modelo de geometría euclídea	14
6. Ejercicios	15
7. Bibliografía	16

---

Aunque un poco largo, este apunte tiene poca teoría y pocos ejercicios. Más bien se trata de una puesta en común de temas que son conocidos en su mayoría, tal vez desde un punto de vista diferente.

### 1. Coordenadas cartesianas

La idea de las coordenadas cartesianas, que ya conocemos de la secundaria, es identificar a un punto con un par de números (en el caso del plano), cada uno de ellos determinado por la proyección sobre dos rectas perpendiculares del punto.

Concretamente:

- Se dan dos rectas, que normalmente llamamos *eje  $x$*  y *eje  $y$* , perpendiculares entre sí y que se intersecan en un punto  $O$ , el *origen* de coordenadas.
- Para cada eje se fija una semirrecta (dando una orientación), y se establece una correspondencia biunívoca entre puntos  $P$  del eje y números reales  $t$ , de modo que si  $P \leftrightarrow t$  si y sólo si  $OP = |t|$  y  $t > 0$  si y sólo si  $P$  está en la semirrecta elegida.

Estas semirrectas se llaman de  $x$  positivos o  $y$  positivos.

- La ubicación relativa (en qué semiplano) de la semirrecta de  $y$  positivos con respecto a la semirrecta de  $x$  positivos da una *orientación* al plano, que arbitrariamente decimos positiva.

Es convencional graficar la semirrecta de  $x$  positivos hacia la derecha y la semirrecta de  $y$  positivos hacia arriba, de modo que la orientación positiva coincide con el *sentido antihorario*.

d) Para cada punto  $P$  en el plano se consideran dos nuevos puntos  $P_x$  y  $P_y$ .  $P_x$  es el pie de la perpendicular al eje  $x$  por  $P$ , y  $P_y$  el pie de la perpendicular al eje  $y$  por  $P$ .  $P_x$  se identifica con un número real, digamos  $a$ , según el eje  $x$ ; y del mismo modo  $P_y$  se identifica con otro número real, digamos  $b$ , según el eje  $y$ .  $a$  es la coordenada  $x$  de  $P$ , y  $b$  la coordenada  $y$ , y representamos el par mediante  $(a, b)$ . De modo que tenemos una asignación  $P \rightarrow (a, b)$ .

En particular,  $O \rightarrow (0, 0)$ .

e) Recíprocamente, cada par de coordenadas  $(a, b)$  determina un único punto en el plano mediante la intersección de dos rectas: una que pasa por el punto correspondiente a  $a$  en el eje  $x$  y es paralela al eje  $y$ , y la otra que pasa por el punto correspondiente a  $b$  en el eje  $y$  y es paralela al eje  $x$ .

f) Tenemos entonces una forma de identificar puntos del plano con pares de números reales,  $P \leftrightarrow (a, b)$ .

☞ Hay distintas formas de indicar que un punto  $P$  tiene coordenadas  $(a, b)$ . Nosotros pondremos directamente  $P = (a, b)$ , aunque también es muy común  $P(a, b)$ , o aún  $P : (a, b)$ .

Observemos que los puntos del eje  $x$  tienen coordenadas de la forma  $(a, 0)$  (y recíprocamente), mientras que los del eje  $y$  tienen coordenadas  $(0, a)$ .

Además, si  $A = (a_1, a_2)$  y  $B = (b_1, b_2)$  son dos puntos, entonces la distancia  $AB$  está dada por

$$AB = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, \quad (1)$$

ya que si, por ejemplo,  $a_1 \neq b_1$ , tomamos  $C = (b_1, a_2)$  formando el triángulo  $ABC$  rectángulo en  $C$ , y las longitudes de los catetos son  $|a_1 - b_1|$  y  $|a_2 - b_2|$ .

☞ La denominación *cartesiano* proviene de *Cartesius*, el nombre latín de René Descartes (1596–1650).

Descartes introdujo el *método de coordenadas* en su trabajo *La geometría* [1], uno de los apéndices de su obra *El Discurso del Método*. Si bien hay antecedentes de algunas de sus ideas, fue el primero en aplicar sistemáticamente técnicas de álgebra para resolver problemas de geometría.

Aunque parecería que nos atamos a un sistema de coordenadas, distinguiendo dos rectas y su intersección, el mismo Descartes enfatizó la generalidad del método, por ejemplo ubicando el origen y los ejes en cualquier lado, inclusive no perpendiculares entre sí.

La relación entre la geometría y el álgebra mediante el uso de coordenadas están dados por la *suma de puntos* y el *producto por escalar* (o sea, por números).

☞ Descartes no considera explícitamente este tipo de estructura de *espacio vectorial*, sino que ésta fue fruto de elaboraciones posteriores.

**Producto por escalar:** Dados  $k \in \mathbb{R}$  y el punto  $A = (a, b)$ , definimos  $kA$  como el punto de coordenadas  $(ka, kb)$ .

**Suma:** Dados los puntos  $A = (a_1, a_2)$  y  $B = (b_1, b_2)$  definimos la suma  $A + B$  como el punto de coordenadas  $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ .

Observamos que las leyes conmutativas, asociativas, distributiva, etc., para suma y producto de números se trasladan a estas nuevas operaciones, ya que están definidas mediante coordenadas, que son números reales. Por ejemplo,  $k(A + B) = kA + kB$  o  $(s + t)A = sA + tA$ . Se sigue que a partir de estas dos

operaciones básicas podemos considerar expresiones como  $A - B = A + (-1)B$ , o  $-2A + 5B$ .

Veamos primero el significado del producto por escalar.

Consideremos  $A = (a_1, a_2)$  fijo,  $A \neq O$ , y veamos que cuando variamos  $k \in \mathbb{R}$ , los puntos  $kA = (ka_1, ka_2)$  forman la recta  $OA$ .

Poniendo  $\mathcal{A} = \{kA : k \in \mathbb{R}\}$ , ciertamente  $O = 0 \times A \in \mathcal{A}$  y  $A = 1 \times A \in \mathcal{A}$ . Además, cuando  $a_1 = 0$ ,  $\mathcal{A}$  es el eje  $y$ , y cuando  $a_2 = 0$ ,  $\mathcal{A}$  es el eje  $x$ .

Si  $a_1, a_2$  y  $k$  no son nulos, los triángulos de vértices  $O = (0, 0)$ ,  $A_x = (a_1, 0)$ ,  $A = (a_1, a_2)$  y  $O, A'_x = (ka_1, 0), A' = (ka_1, ka_2)$  son semejantes ya que son rectángulos en  $A_x$  y  $A'_x$ , y los catetos están en la proporción  $|a_2/a_1|$ , siendo los ángulos  $\angle A_x OA$  y  $\angle A'_x OA'$  iguales si  $k > 0$  y opuestos por el vértice si  $k < 0$ .

- ☞ Cuando  $k > 0$  (y  $a_1$  y  $a_2$  no son nulos), los puntos  $A$  y  $kA$  están en un mismo semiplano respecto de tanto el eje  $x$  como el eje  $y$ , mientras que están en semiplanos opuestos si  $k < 0$ . Los ángulos  $\angle A_x OA$  y  $\angle A'_x OA'$  deben medirse según las semirrectas  $OA_x$  y  $OA'_x$  y los semiplanos que contienen a  $A$  y  $A'$  (semirrectas y semiplanos que coinciden si  $k > 0$  y son distintos si  $k < 0$ ).
- ☞ Recordar que  $k$  y las coordenadas pueden ser negativos, y los catetos miden  $|a_1|, |ka_1|$ , etc.

La expresión

$$P = kA, \quad k \in \mathbb{R},$$

o el equivalente en coordenadas (suponiendo  $P = (x, y)$ ),

$$x = ka_1, \quad y = ka_2, \quad k \in \mathbb{R},$$

se conoce como *ecuación paramétrica de la recta OA*.

Si dejamos  $k$  fijo,  $k \neq 0$ , y variamos  $A$ , la transformación  $A \rightarrow kA$  resulta ser entonces una homotecia de coeficiente  $k$  y centro  $O$ .

Por otra parte, la suma está asociada a la traslación: para  $A$  fijo, la aplicación  $P \rightarrow P + A$  es la traslación en  $O-A$ . Para ver esto deberíamos ver que si  $Q = A + P$ ,  $OAQP$  es un paralelogramo (eventualmente «degenerado» si  $P, O$  y  $A$  son colineales), pero esto es cierto porque los lados opuestos tienen igual longitud. Por ejemplo

$$\begin{aligned} QP^2 &= (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 = \\ &= (a_1 + p_1 - p_1)^2 + (a_2 + p_2 - p_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 = OA^2. \end{aligned}$$

Es claro que la traslación en  $A-O$  —siendo la inversa de la traslación en  $O-A$ — puede expresarse como  $P \rightarrow P - A (= P + (-A))$ , y que la traslación en  $A-B$  puede ponerse como  $P \rightarrow P + (B - A)$  ya que mediante esa traslación  $A \rightarrow B$ .

Consecuentemente, si trasladamos la recta  $OR$  en  $O-Q$  obtendremos una recta que pasa por  $Q$  y  $R + Q$ , y sus puntos serán de la forma  $S = P + Q$ , con  $P \in OR$ . O, de otra forma, los puntos  $S$  de la recta por  $A$  y  $B$  puede expresarse como  $S = P + A$  con  $P$  en la recta por  $O$  y  $B - A$ , y podemos escribir la *ecuación paramétrica de la recta AB* como

$$R = k(B - A) + A, \quad k \in \mathbb{R},$$

o equivalentemente,  $R = kB + (1 - k)A$  para  $k \in \mathbb{R}$ , o, escrita en coordenadas,

$$x = (1 - k)a_1 + kb_1, \quad y = (1 - k)a_2 + kb_2, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

✦ A veces esta forma se llama *afín*, y es independiente del sistema de coordenadas en el sentido que si  $O'$  es otro centro y  $x'$  y  $y'$  son nuevos ejes (perpendiculares entre sí), la misma recta tiene por ecuación paramétrica  $R' = (1 - k)A' + kB'$ , donde  $A'$  y  $B'$  son las coordenadas de  $A$  y  $B$  en el nuevo sistema.

Estos temas se ven en cursos de álgebra lineal.

Cuando ponemos  $R = k(B - A) + A$ , con  $k > 0$  estamos en la semirrecta  $AB$  (pensar en el caso  $A = O$  y luego trasladar), pero como también  $R = (1 - k)(A - B) + B$ , estaremos en la semirrecta  $BA$  si  $k < 1$ . En fin, estaremos en el segmento  $AB$  cuando  $0 < k < 1$ .

En particular, el punto medio  $M$  del segmento  $AB$  puede ponerse como  $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}(A + B)$ . En efecto, si  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$ , y  $M = ((a_1 + b_1)/2, (a_2 + b_2)/2)$ , tendremos

$$AM^2 = \left(a_1 - \frac{a_1 + b_1}{2}\right)^2 + \left(a_2 - \frac{a_2 + b_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_1 - b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_2 - b_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}AB^2,$$

es decir,  $AM = AB/2$ . Del mismo modo,  $BM = AB/2$ , y por lo tanto  $M$  debe estar entre  $A$  y  $B$ , y  $M$  es el punto medio del segmento  $AB$ .

A veces queremos verificar si un punto de coordenadas  $(x, y)$  está en la recta, y entonces es conveniente eliminar  $k$  de las ecuaciones en (2). Multiplicando la ecuación para  $x$  por  $b_2 - a_2$ , la ecuación para  $y$  por  $b_1 - a_1$ , y restando las así obtenidas, llegamos a

$$(b_2 - a_2)x + (a_1 - b_1)y = (b_2 - a_2)a_1 + (a_1 - b_1)a_2,$$

que es de la forma

$$\alpha x + \beta y = \gamma,$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma$  son números reales, y además  $\alpha$  y  $\beta$  no se anulan simultáneamente. Esta forma se conoce como *ecuación implícita de la recta*.

Dada la forma implícita, si queremos obtener una forma paramétrica bastará con encontrar un par de puntos distintos,  $A$  y  $B$ , sobre la recta.

Observemos también que la forma implícita no es única, en el sentido de que si fijamos  $t \neq 0$  y ponemos  $\alpha' = t\alpha$ ,  $\beta' = t\beta$ ,  $\gamma' = t\gamma$ , la ecuación  $\alpha'x + \beta'y = \gamma'$  define la misma recta (tiene las mismas soluciones  $(x, y)$ ).

✎ La forma  $y = mx + b$  es un caso particular (donde, por ejemplo,  $\alpha = -m$  y  $\beta = 1$ ), que es especialmente útil cuando se estudian funciones  $x \rightarrow y$ .

También podemos pensar que la forma  $y = mx + b$  es paramétrica tomando como parámetro  $x$ .

Si tenemos un punto  $A = (a_1, a_2)$  y una recta de ecuación

$$\alpha x + \beta y = \gamma,$$

que queremos trasladar en  $O-A$ , los puntos  $P = (x, y)$  en la recta trasladada serán tales que  $P - A = (x - a_1, y - a_2)$  están en la recta original, i.e., una ecuación para la recta trasladada es

$$\alpha(x - a_1) + \beta(y - a_2) = \gamma, \quad \text{o} \quad \alpha x + \beta y = \gamma + (\alpha a_1 + \beta a_2).$$

Observemos también que si tenemos dos rectas de ecuaciones

$$\alpha x + \beta y = \gamma \quad \text{y} \quad \alpha x + \beta y = \gamma'$$

respectivamente, entonces si  $\gamma \neq \gamma'$  no hay puntos comunes y las rectas son paralelas.

Por ejemplo, si tenemos una recta de ecuación

$$\alpha x + \beta y = \gamma,$$

y queremos encontrar la ecuación de la recta paralela que pasa por  $A = (a_1, a_2)$ , bastará tomar

$$\alpha x + \beta y = \alpha a_1 + \beta a_2.$$

Recíprocamente, si tenemos dos rectas paralelas podemos tomar un punto en cada una de ellas, digamos  $A$  y  $A'$ , y trasladarlas al origen (la primera en  $A-O$  y la segunda en  $A'-O$ ) de modo que coinciden en una recta que tendrá ecuación de la forma  $\alpha x + \beta y = 0$  (pues  $(0,0)$  está en ella). Al trasladar esta recta en  $O-A$  y en  $O-A'$  obtendremos que las rectas paralelas pueden representarse con el mismo término izquierdo y distinto coeficiente en el término a la derecha.

Supongamos ahora que tenemos rectas  $\ell$  y  $\ell'$  de ecuaciones

$$\ell: ax + by = c, \quad \ell': a'x + b'y = c',$$

(con  $a$  y  $b$  no ambos nulos, y lo mismo para  $a'$  y  $b'$ ) y queremos encontrar su intersección. Multiplicando la primera ecuación por  $a'$  y restando la segunda ecuación multiplicada por  $a$ , obtenemos

$$(a'b - ab')y = a'c - ac',$$

y de modo similar (multiplicando una por  $b'$ , la otra por  $b$ , y restando),

$$(ab' - a'b)x = b'c - bc'.$$

Vemos que habrá un único punto en la intersección si y sólo si  $ab' - ab \neq 0$ , mientras que si esa cantidad se anula, las rectas  $\ell$  y  $\ell'$  coinciden si  $a'c - ac' = b'c - bc' = 0$ , y son paralelas pero distintas en otro caso, en concordancia con lo expresado sobre la unicidad de la forma implícita y el paralelismo.

☞ La cantidad  $ab' - a'b$  se llama el *determinante* del sistema de ecuaciones que definen a  $\ell$  y  $\ell'$ .

Terminamos esta sección describiendo la *ecuación implícita* de una circunferencia. Por la fórmula para la distancia (1), si el centro tiene coordenadas  $(a, b)$  y el radio es  $r$ , los puntos de la circunferencia están caracterizados por la ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Cuando queremos dar una forma paramétrica de la circunferencia, debemos usar funciones trigonométricas como seno y coseno, que pasamos a estudiar.

## 2. Trigonometría y funciones trigonométricas

Suponemos conocidas las definiciones y resultados básicos de las funciones trigonométricas, al menos para ángulos entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . El tema está desarrollado en §14 de Pogorélov [3], y aquí comenzamos con un breve repaso.

Supongamos que  $\alpha$  es un ángulo con  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Si los dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$ , son rectángulos en  $C$  y  $C'$  (con hipotenusas  $AB$  y  $A'B'$ ), y tienen  $\angle A =$

$\angle A' = \alpha$ , los triángulos serán semejantes (pues también debe ser  $\angle B = \angle B'$ ), y los lados son proporcionales:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Así tenemos la igualdad de los cocientes

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

que es usual expresarlos como

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \quad \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}, \quad \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}},$$

cocientes que dependen sólo del ángulo  $\alpha$ , dando lugar a las funciones trigonométricas *seno*, *coseno* y *tangente* del ángulo  $\alpha$ .

**2.1. Definición «tradicional» de funciones trigonométricas.** Sea  $\alpha$  el ángulo  $\angle A$  del triángulo  $ABC$  que es rectángulo en  $C$ . Definimos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{BC}{AB} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \\ \operatorname{cos} \alpha &= \frac{AC}{AB} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}, \\ \operatorname{tan} \alpha &= \frac{BC}{AC} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}. \end{aligned}$$

- ✎ Manteniendo  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , al considerar el *ángulo complementario*  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , a partir de la misma definición tendremos

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos} \beta \quad \text{y} \quad \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{sen} \beta,$$

es decir, el seno de un ángulo es el *coseno* de su complemento.

- ✎ Algunos autores abrevian tg en vez de tan.  
 ✎ Hay otras funciones trigonométricas, como la secante, la cotangente y la cosecante, que se derivan las anteriores y que definiremos cuando sea necesario.

**2.2. Teorema (14.4 en Pogorélov).**

- a)  $\operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{cos} 45^\circ = 1/\sqrt{2}$ ,  $\operatorname{tan} 45^\circ = 1$ .  
 b)  $\operatorname{sen} 30^\circ = \operatorname{cos} 60^\circ = 1/2$ ,  $\operatorname{cos} 30^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \sqrt{3}/2$ .  
 c)  $\operatorname{tan} 30^\circ = 1/\sqrt{3}$ ,  $\operatorname{tan} 60^\circ = \sqrt{3}$ .

Como están definidas por medio de triángulos rectángulos, las funciones  $\operatorname{sen}$ ,  $\operatorname{cos}$  y  $\operatorname{tan}$  sólo pueden tomar argumentos entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$  (estrictamente), y nos va a resultar conveniente considerar ángulos de cualquier tamaño, inclusive negativos.

Para ello tomamos la *circunferencia unitaria*, es decir, la circunferencia con centro  $(0,0)$  y radio 1, y tomando como punto inicial  $I = (1,0)$ , podemos asociar a cada  $t \in \mathbb{R}$  un arco en la circunferencia unitaria donde uno de los extremos es  $I$  de modo que la longitud del arco es  $|t|$ .

Como tenemos una orientación del plano dada por los ejes cartesianos, consideramos que para  $t > 0$  estamos recorriendo la circunferencia unitaria en sentido positivo y que para  $t < 0$  la recorremos en sentido negativo.

De esta forma,  $t$  se corresponde con un ángulo central cuya medida en radianes es  $t$  (pues el radio de la circunferencia es 1), y eventualmente puede dar varias «vueltas».

Si el otro extremo del arco correspondiente a  $t$  es  $P$  (el primero es  $I = (1, 0)$ ), tendremos una asignación  $t \rightarrow P$ , que no es biunívoca. Por ejemplo, mediante la asignación tendremos  $0 \rightarrow (1, 0)$ ,  $\pi/2 \rightarrow (0, 1)$ ,  $\pi \rightarrow (-1, 0)$ ,  $2\pi \rightarrow (1, 0)$ ,  $-\pi \rightarrow (-1, 0)$ . En general,  $t \rightarrow P$  y  $t' \rightarrow P$  si y sólo si  $t - t'$  es un múltiplo entero de  $2\pi$ .

**2.3. Definición (extensión de funciones trigonométricas).** Con las convenciones anteriores, para  $t \in \mathbb{R}$  y  $P = (x, y)$  definimos

$$\operatorname{sen} t = y, \quad \operatorname{cos} t = x, \quad \operatorname{tan} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{cos} t} = \frac{y}{x} \quad (\text{si } x \neq 0).$$

- ☞ Las definiciones coinciden con las «tradicionales» cuando  $0 < t < \pi/2$  (recordar que  $t$  está «en radianes»).
- ☞ Como cada vez que consideramos ángulos mayores de  $180^\circ$  o menores que  $0^\circ$ , nuestras «definiciones» no son muy rigurosas. En cursos de análisis matemático se ve cómo definir seno y coseno rigurosamente, ya sea por medio de series o por funciones inversas de funciones definidas mediante integrales.

Así tenemos, por ejemplo,  $\operatorname{sen} 0 = 0$  y  $\operatorname{cos} 0 = 1$  (pues  $0 \rightarrow (1, 0)$  mediante la correspondencia); y también  $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$  y  $\operatorname{cos}(\pi/2) = 0$  (pues  $\pi/2 \rightarrow (0, 1)$ ).

**2.4. Teorema.** Para  $t \in \mathbb{R}$ ,

- a)  $\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen}(-t)$ ,  $\operatorname{cos} t = \operatorname{cos}(-t)$ ,  $\operatorname{tan} t = -\operatorname{tan}(-t)$ .
- b)  $\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t$ ,  $\operatorname{cos}(t + 2\pi) = \operatorname{cos} t$ .
- c)  $\operatorname{sen}(\pi + t) = -\operatorname{sen} t$ ,  $\operatorname{cos}(\pi + t) = -\operatorname{cos} t$ ,  $\operatorname{tan}(\pi + t) = \operatorname{tan} t$ .
- d)  $\operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t$ ,  $\operatorname{cos}(\pi - t) = -\operatorname{cos} t$ .
- e)  $\operatorname{sen}(\pi/2 - t) = \operatorname{cos} t$ ,  $\operatorname{cos}(\pi/2 - t) = \operatorname{sen} t$ .
- f)  $\operatorname{sen}(\pi/2 + t) = \operatorname{cos} t$ ,  $\operatorname{cos}(\pi/2 + t) = -\operatorname{sen} t$ .

- ☛ a) El «arco» correspondiente a  $-t$  tiene igual longitud,  $|t|$ , que el correspondiente a  $t$ , pero está recorrido en sentido contrario. Como ambos arcos empiezan a recorrerse a partir de  $(1, 0)$ , los puntos finales son simétricos respecto del eje  $x$ : las coordenadas  $y$  cambian de signo mientras que las  $x$  las mantienen.

$$\operatorname{tan} t = \operatorname{sen} t / \operatorname{cos} t = -\operatorname{sen}(-t) / \operatorname{cos}(-t) = -\operatorname{tan}(-t).$$

- ☞ La igualdad  $\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen}(-t)$  dice que el gráfico del seno es simétrico respecto del punto  $(0, 0)$  (i.e., la función es impar), mientras que la igualdad  $\operatorname{cos} t = \operatorname{cos}(-t)$  dice que el gráfico del coseno es simétrico respecto de la recta  $x = 0$  (i.e., la función es par). De modo similar, la función tangente es impar.

- b) El arco correspondiente a  $t + 2\pi$  se obtiene «dando una vuelta más» al arco dado por  $t$ , y los puntos correspondientes a  $t$  y  $t + 2\pi$  (como en la [definición 2.3](#)) coinciden.

- ☞ Esto dice que tanto el seno como el coseno son funciones *periódicas* de período  $2\pi$ .

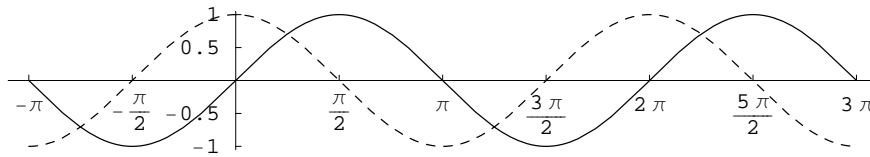


Figura 1: gráficos del seno (en línea llena) y coseno (en línea de puntos).

- c) El arco correspondiente a  $\pi + t$  se obtiene como el arco correspondiente a  $t$  al cual se le suma un arco de longitud  $\pi$ , i.e., los puntos finales de los arcos son simétricos respecto de  $(0,0)$ . Las coordenadas correspondientes cambian de signo.

$$\tan(t + \pi) = \frac{\sin(t + \pi)}{\cos(t + \pi)} = \frac{-\sin t}{-\cos t} = \tan t.$$

- ☞ Esto dice que la tangente es una función periódica, de período  $\pi$ .

- d) Resultan de los incisos anteriores. Por ejemplo,  $\sin(\pi - t) = \sin(\pi + (-t)) = -\sin(-t) = \sin t$ .

- ☞ Siendo que las identidades resultan de la composición de una simetría central y una reflexión en el eje  $x$ , en realidad también pueden demostrarse usando que corresponden a una simetría respecto del eje  $y$ .

- e) Tomando  $s = t - \pi/4$ , resulta  $t = \pi/4 + s$ ,  $\pi/2 - t = \pi/4 + s$ , es decir, los arcos correspondientes a  $t$  y  $\pi/2 - t$  resultan de agregar o quitar un mismo arco, de longitud  $|s|$ , a  $\pi/4$ . Por lo tanto los extremos de los arcos correspondientes a  $t$  y  $\pi/2 - t$  son simétricos respecto de la recta  $y = x$ , y sus coordenadas se intercambian.

- ☞ Poniendo  $u = \pi/2 - t$ , de  $\sin(\pi/2 - t) = \cos t$  resulta  $\sin u = \cos(\pi/2 - u)$ , que es la segunda identidad en este inciso. En otras palabras, las dos identidades en este inciso son equivalentes.

- f) Se deduce de las anteriores, e.g.,  $\sin(\pi/2 + t) = \sin(\pi/2 - (-t)) = \cos(-t) = \cos t$ .

- ☞ Combinando los incisos anteriores, vemos que el gráfico del seno es simétrico respecto de la recta  $x = \pi/2$ , mientras que la del coseno es simétrico respecto del punto  $(\pi/2, 0)$ .

Por 2.4, para hacer el gráfico del seno (ver figura 1) bastará hacerlo entre 0 y  $\pi/2$ , donde sabemos que es creciente (ver el apunte sobre *longitud de la circunferencia*), ya que la figura es simétrica respecto de  $x = \pi/2$  y entonces conocemos el gráfico entre 0 y  $\pi$ , luego que es simétrica respecto de  $(0,0)$ , y entonces conocemos el gráfico entre  $-\pi$  y  $\pi$ , finalmente usamos que es periódica de período  $2\pi$  para completar cualquier otro valor. El gráfico del coseno se obtiene a partir del correspondiente al seno, trasladado en la dirección  $x$  en  $-\pi/2$  pues  $\cos t = \sin(t + \pi/2)$ .

De modo similar, para hacer el gráfico de la tangente (ver figura 2) basta conocer los valores de la tangente entre 0 y  $\pi/2$  (excluido), pues por imparidad se conocen los valores entre  $-\pi/2$  y 0 y luego se usa la periodicidad.

### 2.5. Teorema (relación pitagórica). Para todo $\alpha$ ,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

- ☞ El punto  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  es un punto de la circunferencia unitaria.

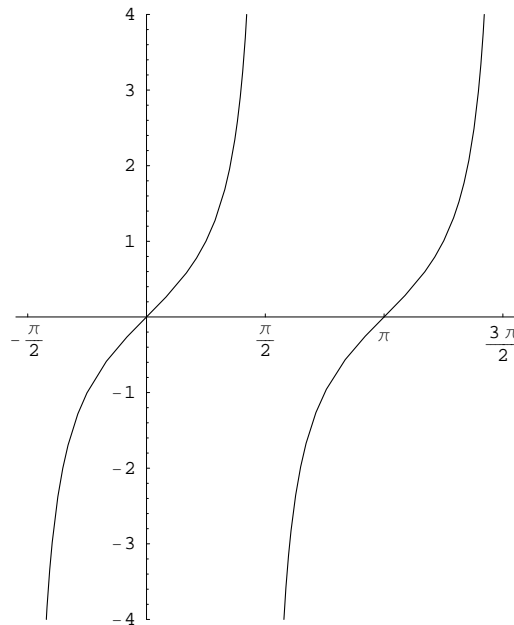


Figura 2: gráfico de la tangente.

Todo punto  $P$ ,  $P = (x, y) \neq (0, 0)$ , puede escribirse en *forma polar* poniendo

$$P = \rho(\cos \theta, \text{sen } \theta), \quad (3)$$

donde  $\rho$  es la distancia de  $P$  al origen de coordenadas  $O$ . En efecto, la semirrecta  $OP$  corta a la circunferencia unitaria en algún punto, digamos  $Q$ , que tendrá coordenadas  $(\cos \theta, \text{sen } \theta)$  para algún  $\theta$  (en realidad hay más de un valor de  $\theta$ , basta sumar múltiplos enteros de  $2\pi$ ), y una homotecia de coeficiente  $\rho$  llevará  $Q$  a  $P$ , i.e.,  $P = \rho Q$ .

**2.6. Teorema (seno y coseno de la suma).** Si  $\alpha$  y  $\beta$  son ángulos cualesquiera,

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha + \beta) &= \text{sen } \alpha \times \cos \beta + \cos \alpha \times \text{sen } \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \times \cos \beta - \text{sen } \alpha \times \text{sen } \beta. \end{aligned}$$

✎ Estamos acostumbrados a funciones lineales, es decir, tales que  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ . Hay que resistir la tentación de poner cosas como  $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha + \text{sen } \beta$  (o como  $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ).

🐛 Supongamos que  $s \in \mathbb{R}$  y que mediante la correspondencia de la [definición 2.3](#),  $s \rightarrow S$ . Para  $t \in \mathbb{R}$ , consideremos la rotación de centro  $(0, 0)$  en un ángulo de  $t$ . Si  $I = (1, 0)$ , mediante la rotación tendremos  $I \rightarrow T$ ,  $P \rightarrow U$ , donde  $T$  y  $U$  son los puntos que le corresponden a  $t$  y  $u = s + t$  mediante la correspondencia de la [definición 2.3](#). Como la rotación preserva distancias, tendremos  $IS = TU$ , o

$$IS^2 = (1 - \cos s)^2 + (\text{sen } s)^2 = TU^2 = (\cos t - \cos u)^2 + (\text{sen } t - \text{sen } u)^2,$$

que desarrollando y simplificando se reduce sucesivamente a

$$\begin{aligned} 1 - 2 \cos s + \cos^2 s + \operatorname{sen}^2 s &= \cos^2 t - 2 \cos u \times \cos u + \cos^2 u + \\ &\quad + \operatorname{sen}^2 t - 2 \operatorname{sen} t \times \operatorname{sen} u + \operatorname{sen}^2 u, \\ 2 - 2 \cos s &= 2 - 2 \cos t \times \cos u - 2 \operatorname{sen} t \times \operatorname{sen} u, \\ \cos s &= \cos t \times \cos u + \operatorname{sen} t \times \operatorname{sen} u. \end{aligned}$$

Tomando  $s = \alpha + \beta$ ,  $t = -\beta$ ,  $u = s + t = \alpha$ , y usando que  $\cos(-\beta) = \cos \beta$  y  $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen} \beta$ , obtenemos la fórmula para el coseno de la suma.

Por 2.4 y la fórmula que acabamos de ver,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \cos(\pi/2 - (\alpha + \beta)) = \cos((\pi/2 - \alpha) + (-\beta)) = \\ &= \cos(\pi/2 - \alpha) \cos(-\beta) - \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) \operatorname{sen}(-\beta) = \\ &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta. \end{aligned}$$

✎ En el [ejercicio 6.3](#) se ve otra demostración, a partir del teorema del seno.

### 2.7. Corolario.

- a)  $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$ .
- b)  $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$ .
- c)  $\operatorname{sen}^2 \alpha = (1 - \cos(2\alpha))/2$ .
- d)  $\cos^2 \alpha = (1 + \cos(2\alpha))/2$ .

✎ Las dos primeras son consecuencia directa del teorema anterior. Las siguientes se obtienen expresando 1 como  $\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha$ .

En los siguientes resultados suponemos que en el triángulo  $ABC$  los lados se denotan por  $a$ ,  $b$  y  $c$ , donde  $a$  es el lado opuesto al vértice  $A$ ,  $b$  el lado opuesto a  $B$  y  $c$  el lado opuesto a  $C$ , y los ángulos son  $\alpha = \angle A$ ,  $\beta = \angle B$ ,  $\gamma = \angle C$ .

**2.8. Teorema del seno (14.7 en Pogorélov).** Si  $R$  es el radio de la circunferencia circunscripta del triángulo  $ABC$ , entonces

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2R.$$

**2.9. Teorema del coseno (14.6 en Pogorélov).** En el triángulo  $ABC$ ,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

## 3. Producto interno y ángulo entre rectas

Como vimos al principio, para  $a$  y  $b$  fijos, no simultáneamente nulos, la expresión

$$ax + by = 0$$

determina los puntos  $(x, y)$  sobre una recta, llamémosla  $\ell$ . Si  $(u, v)$  es un múltiplo no nulo de  $(a, b)$ , i.e.,  $(u, v) = t(a, b)$ , con  $t \neq 0$ , la expresión

$$ux + vy = 0 \tag{4}$$

sigue siendo la ecuación de la recta  $\ell$  si  $u$  y  $v$  están fijos y variamos  $(x, y)$ .

Si tomamos un punto  $(x_0, y_0) \in \ell$ ,  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ , haciendo variar  $(u, v)$  en la expresión

$$ux_0 + vy_0 = 0,$$

nos da una recta  $\ell'$  de puntos de coordenadas  $(u, v)$ . Como esta recta pasa por el origen, y  $(a, b) \in \ell'$ , los puntos de  $\ell'$  son los múltiplos de  $(a, b)$ . No importa qué puntos  $(x_0, y_0)$  tomemos en  $\ell$  (mientras no sea el  $(0, 0)$ ), siempre obtenemos la misma recta  $\ell'$ .

Así, podemos ver la expresión (4) tanto como la ecuación de la recta  $\ell$  si variamos  $(x, y)$  (y  $(u, v) \neq (0, 0)$ ), como la ecuación de la recta  $\ell'$  si variamos  $(u, v)$  (y  $(x, y) \neq (0, 0)$ ).

Esta «dualidad» se refleja en cursos de álgebra lineal, definiendo el «espacio dual» de un espacio con producto interno.

Las rectas  $\ell$  y  $\ell'$  se intersecan en el origen, pero, ¿qué otra relación geométrica hay entre las rectas  $\ell$  y  $\ell'$ ? Para eso será conveniente estudiar la expresión  $ux + vy$ .

**3.1. Definición.** Dados los puntos  $(u, v)$  y  $(x, y)$ , el *producto interno* de ellos es el número  $ux + vy$ .

También se lo denomina *producto escalar*, porque el resultado es un escalar (i.e., un número), pero trataremos de evitar esta nomenclatura para no confundirnos con el producto *por* escalar que vimos al principio.

Si  $P = (u, v)$  y  $Q = (x, y)$ , entonces la distancia entre ellos viene dada por (1),

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (u - x)^2 + (v - y)^2 = u^2 + x^2 - 2ux + v^2 + y^2 - 2vy = \\ &= (OP)^2 + (OQ)^2 - 2(ux + vy), \end{aligned}$$

que por un lado involucra el producto interno de  $P$  y  $Q$ , y por otro lado se parece al teorema del coseno, que podríamos poner como

$$PQ^2 = (OP)^2 + (OQ)^2 - 2 \times OP \times OQ \times \cos(\angle POQ).$$

Igualando términos en las expresiones anteriores llegamos a

$$ux + vy = OP \times OQ \times \cos(\angle POQ),$$

que relaciona el producto interno de  $P$  y  $Q$  con el ángulo que forman tomando como vértice a  $O = (0, 0)$ .

Volviendo a las rectas  $\ell$  y  $\ell'$ , vemos que el ángulo formado entre ellas debe ser  $90^\circ = \pi/2$  (pues  $\pi/2$  es el único ángulo entre  $0$  y  $\pi$  tal que su coseno se anula).

Dos rectas (distintas) que se intersecan forman cuatro ángulos, dos iguales y los otros dos suplementarios de los primeros, y los cosenos de estos ángulos son los mismos salvo el signo (pues  $\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$ , ver 2.4). Si las rectas se intersecan, aunque no sea en el origen, y tienen ecuaciones

$$ax + by = c \quad \text{y} \quad a'x + b'y = c',$$

los ángulos formados por ellas son idénticos a los formados por las rectas trasladadas paralelamente al origen, que tienen ecuaciones

$$ax + by = 0 \quad \text{y} \quad a'x + b'y = 0.$$

A su vez, estas rectas por el origen se intersecan a los mismos ángulos en que lo hacen sus perpendiculares, que son las rectas por  $O$  y  $(a, b)$  y por  $O$  y  $(a', b')$ , por lo que podemos encontrar los ángulos que forman las rectas originales encontrando  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi$ , tal que

$$\cos \alpha = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{a'^2 + b'^2}}, \quad (5)$$

y su suplementario.

Si  $P = (p_1, p_2)$  es un punto, y  $\ell$  es una recta de ecuación  $ax + by = c$  (con  $(x, y)$  variando), podemos encontrar la ecuación (en  $x, y$ ) de la recta  $\ell'$  perpendicular a  $\ell$  que pasa por  $P$  tomando

$$bx - ay = bp_1 - ap_2,$$

puesto que esta recta pasa por  $P$ , y además es ortogonal a la recta  $\ell$  ya que

$$a \times b + b \times (-a) = 0.$$

Encontrando  $Q \in \ell \cap \ell'$ , podemos encontrar entonces  $\text{dist}(P, \ell) = PQ$ .

En fin, si  $A = (a, b) \neq (0, 0)$ , a medida que variamos  $c$  las rectas de ecuación  $ax + by = c$  son rectas paralelas entre sí, todas perpendiculares a la recta  $OA$ .

† Pensando en 3 dimensiones, las rectas mencionadas son las *curvas de nivel* de la función  $(x, y) \rightarrow ax + by$ . En cursos de cálculo de varias variables se ve que el «gradiente» de esta función es precisamente  $(a, b)$  (el gradiente se puede pensar como la pendiente en tres dimensiones), y que el gradiente es siempre perpendicular a las curvas de nivel, justamente por lo que estamos contando.

Más aún, cuando  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $|c|$  indica la distancia al origen de la recta  $ax + by = c$ , pues la recta por  $O = (0, 0)$  perpendicular a la recta tiene ecuación  $bx - ay = 0$ , el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + by &= c, \\ bx - ay &= 0, \end{aligned}$$

tiene solución  $Q = (ac, bc)$ , y  $OQ = |c|$ .

De modo que cuando  $a^2 + b^2 = 1$ , la distancia de un punto  $P = (p_1, p_2)$  a la recta  $\ell$  de ecuación  $ax + by = c$  puede escribirse sencillamente como  $|ap_1 + bp_2 - c|$  (ya que  $\text{dist}(P, \ell) = \text{dist}(O, \ell')$  donde  $\ell'$  es la paralela a  $\ell$  trasladada en  $P-O$ ).

Observemos finalmente que siempre podemos poner la ecuación de una recta en la forma  $ax + by = c$ , con  $a^2 + b^2 = 1$ : basta dividirla (miembro a miembro) por  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Por otra parte, la condición  $a^2 + b^2 = 1$  puede expresarse, en forma única, como

$$a = \cos \alpha, \quad b = \sin \alpha,$$

para algún  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < \pi$  ( $\alpha$  indica una dirección perpendicular a la recta).

## 4. La fórmula de Herón y extensiones

En esta sección suponemos que en el triángulo  $ABC$  los lados son  $a$ ,  $b$  y  $c$ , donde  $a$  es el lado opuesto al vértice  $A$ ,  $b$  el lado opuesto a  $B$  y  $c$  el lado opuesto a  $C$ , y los ángulos son  $\alpha = \angle A$ ,  $\beta = \angle B$ ,  $\gamma = \angle C$ .

Usando trigonometría, podemos llegar a ecuaciones para el área del triángulo:

**4.1. Proposición.** Si  $\Delta$  es el área del triángulo  $ABC$ ,

$$\Delta = \frac{ab \operatorname{sen} \gamma}{2} = \frac{bc \operatorname{sen} \alpha}{2} = \frac{ac \operatorname{sen} \beta}{2}.$$

☛  $b \operatorname{sen} \gamma$  es la altura correspondiente a la base  $a$ . Los restantes se hacen de modo similar.

Sin embargo, dado que los tres lados determinan esencialmente un único triángulo, deberíamos poder encontrar una fórmula que involucre sólo a los lados.

**4.2. Proposición (fórmula de Herón).** Indicando con  $\Delta$  el área del triángulo y con  $s$  el semiperímetro,  $s = (a + b + c)/2$ , tenemos

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

☞ La fórmula se atribuye a Herón de Alejandría (aproximadamente entre 126 y 50 a.C.) pues dio una demostración en su libro *Métrica* (sin usar trigonometría), pero se supone que la fórmula ya era conocida por Arquímedes (aproximadamente entre 285 y 212 a.C.).

☛ Comenzando con  $\Delta = (ab \operatorname{sen} \gamma)/2$ , o lo que es lo mismo

$$2\Delta = ab \operatorname{sen} \gamma,$$

queremos eliminar el seno. El teorema del coseno nos da una expresión similar  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ , o

$$2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2,$$

y podemos combinarlas mediante la relación pitagórica:

$$16\Delta^2 = 4a^2b^2 \operatorname{sen}^2 \gamma = 4a^2b^2(1 - \cos^2 \gamma) = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

En la derecha tenemos una diferencia de cuadrados,<sup>1</sup> dando nuevas diferencias de cuadrados:

$$\begin{aligned} 16\Delta^2 &= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = \\ &= [2ab - (a^2 + b^2 - c^2)][2ab + a^2 + b^2 - c^2] = \\ &= [c^2 - (a-b)^2][(a+b)^2 - c^2] = \\ &= (c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c). \end{aligned}$$

Recordando que el semiperímetro es  $s = (a + b + c)/2$ , tenemos

$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2s - 2a = 2(s - a),$$

y de modo similar  $a + c - b = 2(s - b)$ ,  $a + b - c = 2(s - c)$ , por lo que

$$16\Delta^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c).$$

Una fórmula análoga a la de 4.2 para el área del cuadrilátero, del tipo  $(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ , no puede ser cierta para cuadriláteros arbitrarios, pues hay varios con los mismos lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ . Por lo tanto, deben incluirse de alguna forma los ángulos intervinientes.

<sup>1</sup>  $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$ .

**4.3. Proposición (fórmula de Herón para cuadriláteros).** Sea  $\Delta$  el área de un cuadrilátero convexo de lados  $a, b, c$  y  $d$ , e indiquemos con  $s$  el semiperímetro,  $s = (a + b + c + d)/2$ . Entonces

$$\Delta^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \frac{1 + \cos(\theta + \lambda)}{2},$$

donde  $\theta$  y  $\lambda$  son ángulos opuestos.

- ✎ No importa qué par de ángulos opuestos se eligen, pues la suma de todos los ángulos interiores es  $360^\circ$  y  $\cos \alpha = \cos(360^\circ - \alpha)$  para cualquier  $\alpha$ .
- ✎ Usando 2.7, podemos poner la expresión  $\frac{1}{2}(1 + \cos(\theta + \lambda))$  como

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}(\theta + \lambda)\right).$$

- ✎ Aunque la llamamos de Herón, pues generaliza el resultado para triángulos, la fórmula se debe a C. Bretschneider (1808–1878) quien la publicó en 1842. Cuando el cuadrilátero es cíclico (los vértices están en una circunferencia), el último término del miembro derecho se anula (ver el ejercicio 3.4 del apunte de circunferencia), y la fórmula resultante es a veces atribuida al matemático hindú Brahmagupta (598–670).
- ✎ Omitimos la demostración: es muy larga, la usaremos pocas veces, y sigue las mismas ideas de la fórmula de Herón para triángulos (teorema del coseno, relación pitagórica, diferencia de cuadrados,...). Se puede ver en el libro de Niven [2] y en distintos lugares de internet.

## 5. Coordenadas cartesianas como modelo de geometría euclidiana plana

Volvamos por un momento a los axiomas que vimos al comienzo del curso.

Habíamos mencionado que en un sistema axiomático están las cuestiones de independencia y de consistencia. La independencia es más bien una cuestión de elegancia: no queremos ser redundantes.<sup>2</sup> Más preocupante es la consistencia, no queremos tener un sistema que no tiene ejemplos porque los axiomas se contradicen. Justamente una de las formas de ver la consistencia es construyendo un *modelo*, es decir, un ejemplo donde los axiomas se satisfacen.

En el caso de la geometría euclidiana plana, un tal modelo es el modelo de coordenadas cartesianas. En efecto, los puntos son pares de coordenadas  $(a, b)$ , y las rectas son los puntos  $(x, y)$  que satisfacen ecuaciones del tipo  $ax + by = c$  (con  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ).

Para ver que se satisfacen las propiedades de incidencia del **Axioma I**, basta ver que hay infinitos puntos  $(x, y)$  que satisfacen una ecuación del tipo  $ax + by = c$ , y que dados los puntos  $(p_1, p_2)$  y  $(q_1, q_2)$  distintos, podemos encontrar  $a, b$  y  $c$  tales que  $ap_1 + bp_2 = aq_1 + bq_2$ .

O bien, como hemos visto, podemos pensar equivalentemente en ecuaciones paramétricas de la forma  $(x, y) = t(p_1, p_2) + (1-t)(q_1, q_2)$  para definir una recta. En este caso, y como también hemos visto, los puntos del segmento  $PQ$  se obtienen tomando  $0 < t < 1$ , los de la semirecta  $PQ$  tomando  $t > 0$ , y los semiplanos correspondientes a la recta  $ax + by = c$  se obtienen tomando los puntos  $(x, y)$

<sup>2</sup> ¡Y eso que lo que abunda no daña!

tales que  $ax + by > c$  o  $ax + by < c$ , y podemos verificar que se satisfacen las propiedades de separación del [Axioma II](#).

Las propiedades métricas de medición de longitudes y ángulos de los [Axiomas III](#) y [IV](#), se pueden ver tomando la ecuación (1) para las longitudes, y definiendo el ángulo mediante el coseno, o más precisamente, por la función inversa del coseno de rango entre 0 y  $\pi$ , mediante la ecuación (5). Claro que esto presupone que tenemos definida independientemente una función coseno, y que sabemos también calcular su inversa.

El [Axiomas V](#) sobre igualdad de triángulos también es una verificación, si bien tediosa, mientras que el [Axiomas VI](#) es bien sencillo de verificar.

Recordemos también que —aunque nosotros no hemos desarrollado este tema— la geometría puede definirse por medio de sus movimientos rígidos.

Movimientos rígidos como la traslación (sumar puntos) o simetrías centrales (cambiar el signo tomando el origen de coordenadas en el centro) son sencillas. Algo más complicadas son las rotaciones: si queremos rotar  $P = (p_1, p_2)$  en un ángulo  $\alpha$  alrededor del origen  $(0, 0)$  para obtener el punto  $Q = (q_1, q_2)$ , tomamos la forma polar en (3), quedando

$$Q = \rho (\cos(\theta + \alpha), \text{sen}(\theta + \alpha)),$$

de donde, usando [2.6](#),

$$q_1 = \rho \cos \theta \cos \alpha - \rho \text{sen} \theta \text{sen} \alpha = p_1 \cos \alpha - p_2 \text{sen} \alpha,$$

$$q_2 = \rho \cos \theta \text{sen} \alpha + \rho \text{sen} \theta \cos \alpha = p_1 \text{sen} \alpha + p_2 \cos \alpha.$$

☞ También en cursos de álgebra lineal se ve que esto da lugar a una expresión de la forma  $Q = MP$  donde  $M$  es la matriz

$$M = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

La simetría axial cuando el eje es la recta  $y = 0$  es sencilla:  $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ . También son sencillas las simetrías axiales de eje  $x = 0$ , tomando  $(x, y) \rightarrow (-x, y)$ ; o la simetría respecto de la recta  $x = y$ , tomando  $(x, y) \rightarrow (y, x)$ . Otras simetrías axiales son más complicadas, pero pueden expresarse por ejemplo mediante traslaciones, rotaciones y una simetría axial respecto de algún eje sencillo.

## 6. Ejercicios

**Ejercicio 6.1.** Definiendo la secante de  $\alpha$  como  $\sec \alpha = 1/\cos \alpha$  cuando  $\cos \alpha \neq 0$ , demostrar que  $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$ .

☞ Esta fórmula es especialmente importante en el cálculo de ciertas integrales que se ven en los cursos de cálculo.

**Ejercicio 6.2.** Consideremos un polígono regular con  $n$  lados de longitud  $\ell$ .

- Dar una fórmula relacionando  $\ell$  con  $R$ , el radio de la circunferencia circunscripta (y  $n$ ).
- Lo mismo para  $\ell$  y  $r$ , el radio de la circunferencia inscrita (y  $n$ ).
- Dar fórmulas para el perímetro y el área del polígono en términos de  $n$  y  $\ell$ .

**Ejercicio 6.3.**

- a) En cualquier triángulo  $ABC$  (incluso si  $\angle C$  es obtuso),  $a = b \cos \angle C + c \cos \angle B$ . *Nota:* suponemos que  $a$  es el lado opuesto a  $A$ ,  $b$  el opuesto a  $B$ , y  $c$  el opuesto a  $C$ .
- b) Usando el teorema del seno y el inciso anterior, deducir la *fórmula de adición para el seno*

$$\operatorname{sen}(\theta + \lambda) = \operatorname{sen} \theta \times \cos \lambda + \cos \theta \times \operatorname{sen} \lambda,$$

cuando  $\theta > 0$ ,  $\lambda > 0$  y  $\theta + \lambda < \pi$ .

- c) Demostrar la fórmula anterior para  $\theta$  y  $\lambda$  cualesquiera.
- d) Usando que  $\cos \delta = \operatorname{sen}(\pi/2 - \delta)$  (si  $\delta$  está medido en radianes), demostrar la *fórmula de adición para el coseno*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \times \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \times \operatorname{sen} \beta.$$

- e) Demostrar la *fórmula de adición para la tangente*

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \times \tan \beta},$$

cuando  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  y  $\cos(\alpha + \beta)$  no se anulan.

**Ejercicio 6.4.** Dados el punto  $A$  de coordenadas  $(2, 3)$ , la recta  $\ell$  de ecuación  $2x + 5y = -10$ , y la circunferencia  $c$  de centro  $(-1, 2)$  y radio 3, encontrar (analíticamente):

- a) La ecuación de la recta perpendicular a  $\ell$  por  $A$ .
- b) La proyección de  $A$  sobre  $\ell$ .
- c) La distancia de  $A$  a  $\ell$ .
- d) La intersección de  $\ell$  y  $c$ .

**Ejercicio 6.5.** Dadas las rectas  $3x + y = 5$  y  $2x - y = 4$ ,

- a) Encontrar su intersección.
- b) Hallar la medida de los ángulos que forman.

**Ejercicio 6.6.** Usando ecuaciones cuadráticas, encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia  $x^2 + y^2 = r^2$ :

- a) Por un punto  $(x_0, y_0)$  en la circunferencia. *Sugerencia:*  $x_0x + y_0y = r^2$  define una recta y la tangente corta a la circunferencia en un único punto.
- b) Por un punto  $(a, 0)$  (con  $|a| \geq r$ ).

## 7. Bibliografía

- [1] R. DESCARTES. *La Geometría*. Limusa, 1997. Ver <http://www.gutenberg.org/files/26400/26400-pdf.pdf>.
- [2] I. NIVEN. *Maxima and Minima Without Calculus*. Mathematical Association of America, 1981.
- [3] A. V. POGORÉLOV. *Geometría elemental*. MIR, Moscú, 1974.