

Un valor tipo Shapley para familias incompletas de coaliciones

N. Aguilera, S. Di Marco, M. Escalante

Abril 2009

Juegos cooperativos. Utilidades transferibles

Un valor tipo Shapley para familias incompletas de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias arco-regulares y árbol-regulares

Flujo y eficiencia

Cadenas maximales

Buscando propiedades

Juegos de unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- Los jugadores cooperan para obtener cierta ganancia.
Cómo distribuirla de un modo justo entre todos ellos?

Juegos cooperativos. Utilidades transferibles

Un valor tipo Shapley para familias incompletas de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias arco-regulares y árbol-regulares

Flujo y eficiencia

Cadenas maximales

Buscando propiedades

Juegos de unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- Los jugadores cooperan para obtener cierta ganancia.
Cómo distribuirla de un modo justo entre todos ellos?
- N =jugadores \mathcal{K} = coaliciones admisibles.

Juegos cooperativos. Utilidades transferibles

Un valor tipo Shapley para familias incompletas de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias arco-regulares y árbol-regulares

Flujo y eficiencia

Cadenas maximales

Buscando propiedades

Juegos de unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- Los jugadores cooperan para obtener cierta ganancia.
Cómo distribuirla de un modo justo entre todos ellos?
- N =jugadores \mathcal{K} = coaliciones admisibles.
- En la teoría clásica, $\mathcal{K} = 2^N$.

Juegos cooperativos. Utilidades transferibles

Un valor tipo Shapley para familias incompletas de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias arco-regulares y árbol-regulares

Flujo y eficiencia

Cadenas maximales

Buscando propiedades

Juegos de unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- Los jugadores cooperan para obtener cierta ganancia.
Cómo distribuirla de un modo justo entre todos ellos?
- N =jugadores \mathcal{K} = coaliciones admisibles.
- En la teoría clásica, $\mathcal{K} = 2^N$.
- Valor de Shapley tradicional definido sobre 2^N

Valor de Shapley clásico

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- N conjunto de jugadores y $v : \mathcal{K} \mapsto \mathbb{R}$, función característica $v(\emptyset) = 0$.

Valor de Shapley clásico

- N conjunto de jugadores y $v : \mathcal{K} \mapsto \mathbb{R}$, función característica $v(\emptyset) = 0$.
- *Valor de Shapley*: Cada jugador i recibe

$$\phi_i(v) = \sum_{s=1}^n \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \sum_{i \in S: |S|=s} (v(S) - v(S \setminus \{i\})),$$

$n = |N|$ y S coaliciones que contienen a i .

Axiomas que lo caracterizan

- Shapley 1953

El valor de Shapley satisface **AN,AL,AE** y **AS** y estos cuatro axiomas caracterizan al valor de Shapley.

- **Jugador nulo:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AN** sii dado $v \in \mathcal{V}$ e $i \in N$, $v(S) = v(S \setminus \{i\})$, $\forall S \ni i$, tenemos $\phi_i(v) = 0$.

Axiomas que lo caracterizan

- Shapley 1953

El valor de Shapley satisface **AN,AL,AE** y **AS** y estos cuatro axiomas caracterizan al valor de Shapley.

- **Jugador nulo:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AN** sii dado $v \in \mathcal{V}$ e $i \in N$, $v(S) = v(S \setminus \{i\})$, $\forall S \ni i$, tenemos $\phi_i(v) = 0$.
- **Linealidad:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AL** sii

$$\phi(\lambda v + \lambda' v') = \lambda \phi(v) + \lambda' \phi(v') \quad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R} \text{ y } \forall v, v' \in \mathcal{V}.$$

Axiomas que lo caracterizan

- Shapley 1953

El valor de Shapley satisface **AN,AL,AE** y **AS** y estos cuatro axiomas caracterizan al valor de Shapley.

- **Jugador nulo:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AN** sii dado $v \in \mathcal{V}$ e $i \in N$, $v(S) = v(S \setminus \{i\})$, $\forall S \ni i$, tenemos $\phi_i(v) = 0$.

- **Linealidad:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AL** sii

$$\phi(\lambda v + \lambda' v') = \lambda \phi(v) + \lambda' \phi(v') \quad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R} \text{ y } \forall v, v' \in \mathcal{V}.$$

- **Eficiencia:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AE** sii

$$\phi(v) \cdot \mathbf{1} = v(N) \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Axiomas que lo caracterizan

- Shapley 1953

El valor de Shapley satisface **AN,AL,AE** y **AS** y estos cuatro axiomas caracterizan al valor de Shapley.

- **Jugador nulo:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AN** sii dado $v \in \mathcal{V}$ e $i \in N$, $v(S) = v(S \setminus \{i\})$, $\forall S \ni i$, tenemos $\phi_i(v) = 0$.

- **Linealidad:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AL** sii

$$\phi(\lambda v + \lambda' v') = \lambda \phi(v) + \lambda' \phi(v') \quad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R} \text{ y } \forall v, v' \in \mathcal{V}.$$

- **Eficiencia:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AE** sii

$$\phi(v) \cdot \mathbf{1} = v(N) \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

- **Simetría:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AS** sii siendo π una permutación sobre N resulta

$$\phi_{\pi(i)}(v) = \phi_i(v \cdot \pi)$$

Nuestro objetivo

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- Por qué trabajar con todo 2^N ? El conjunto es muy grande y muchas de las coaliciones no son factibles.

Nuestro objetivo

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- **Por qué trabajar con todo 2^N ?** El conjunto es muy grande y muchas de las coaliciones no son factibles.
- Trabajos anteriores: en *geometrías convexas*, *antimatroides*, *familias regulares*. En todos ellos, los actores entran de a uno.

Nuestro objetivo

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- **Por qué trabajar con todo 2^N ?** El conjunto es muy grande y muchas de las coaliciones no son factibles.
- Trabajos anteriores: en *geometrías convexas*, *antimatroides*, *familias regulares*. En todos ellos, los actores entran de a uno.
- ***Por qué pedir la entrada de los actores de a uno?***

Nuestro objetivo

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- **Por qué trabajar con todo 2^N ?** El conjunto es muy grande y muchas de las coaliciones no son factibles.
- Trabajos anteriores: en *geometrías convexas*, *antimatroides*, *familias regulares*. En todos ellos, los actores entran de a uno.
- ***Por qué pedir la entrada de los actores de a uno?***
- Nuestro propósito es definir una regla de reparto de la ganancia (como el valor de Shapley) cuando $\mathcal{K} \neq 2^N$ y mostrar que un conjunto de axiomas que caractericen ese valor.

Axiomas adaptados a familias incompletas

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- **Jugador nulo:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AN** sii dado $v \in \mathcal{V}$ e $i \in N$, $v(S) = v(K)$, $\forall K, S \in \mathcal{K}$ tal que $i \in S \setminus K$, tenemos $\phi_i(v) = 0$.

Axiomas adaptados a familias incompletas

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- **Jugador nulo:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AN** sii dado $v \in \mathcal{V}$ e $i \in N$, $v(S) = v(K)$, $\forall K, S \in \mathcal{K}$ tal que $i \in S \setminus K$, tenemos $\phi_i(v) = 0$.
- **Linealidad:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AL** sii

$$\phi(\lambda v + \lambda' v') = \lambda \phi(v) + \lambda' \phi(v') \quad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R} \text{ y } \forall v, v' \in \mathcal{V}.$$

Axiomas adaptados a familias incompletas

Un valor tipo Shapley para familias incompletas de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias arco-regulares y árbol-regulares

Flujo y eficiencia

Cadenas maximales

Buscando propiedades

Juegos de unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- **Jugador nulo:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AN** sii dado $v \in \mathcal{V}$ e $i \in N$, $v(S) = v(K)$, $\forall K, S \in \mathcal{K}$ tal que $i \in S \setminus K$, tenemos $\phi_i(v) = 0$.

- **Linealidad:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AL** sii

$$\phi(\lambda v + \lambda' v') = \lambda \phi(v) + \lambda' \phi(v') \quad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R} \text{ y } \forall v, v' \in \mathcal{V}.$$

- **Eficiencia:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AE** sii

$$\phi(v) \cdot \mathbf{1} = v(N) \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Axiomas adaptados a familias incompletas

Un valor tipo Shapley para familias incompletas de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias arco-
regulares y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- **Jugador nulo:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AN** sii dado $v \in \mathcal{V}$ e $i \in N$, $v(S) = v(K)$, $\forall K, S \in \mathcal{K}$ tal que $i \in S \setminus K$, tenemos $\phi_i(v) = 0$.

- **Linealidad:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AL** sii

$$\phi(\lambda v + \lambda' v') = \lambda \phi(v) + \lambda' \phi(v') \quad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R} \text{ y } \forall v, v' \in \mathcal{V}.$$

- **Eficiencia:** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface **AE** sii

$$\phi(v) \cdot \mathbf{1} = v(N) \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

- **Propiedad igualitaria** $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ cumple **PI** sii para todo par $i, j \in N$ participantes de las mismas coaliciones, entonces $\phi_i(v) = \phi_j(v)$. (Más débil que la simetría)

Desde la teoría de Grafos

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- Digrafo $G = (\mathcal{K}, \mathcal{A})$, donde $(K, K') \in \mathcal{A} \Leftrightarrow K, K' \in \mathcal{K}$, $K \subset K'$ y $\nexists K'' \in \mathcal{K}$ tal que $K \subsetneq K'' \subsetneq K'$.

Probando con los axiomas

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un *valor marginalista* si existe $\lambda_i(K, K')$ (que depende de ϕ) definido para cada $i \in N$ y cada $(K, K') \in \mathcal{A}_i$, tal que para todo $v \in \mathcal{V}$,

$$\phi_i(v) = \sum_{(K, K') \in \mathcal{A}_i} \lambda_i(K, K') (v(K') - v(K)).$$

Probando con los axiomas

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un *valor marginalista* si existe $\lambda_i(K, K')$ (que depende de ϕ) definido para cada $i \in N$ y cada $(K, K') \in \mathcal{A}_i$, tal que para todo $v \in \mathcal{V}$,

$$\phi_i(v) = \sum_{(K, K') \in \mathcal{A}_i} \lambda_i(K, K') (v(K') - v(K)).$$

- ϕ satisface **AN** y **AL** sii ϕ es marginalista.

Probando con los axiomas

- $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un *valor marginalista* si existe $\lambda_i(K, K')$ (que depende de ϕ) definido para cada $i \in N$ y cada $(K, K') \in \mathcal{A}_i$, tal que para todo $v \in \mathcal{V}$,

$$\phi_i(v) = \sum_{(K, K') \in \mathcal{A}_i} \lambda_i(K, K') (v(K') - v(K)).$$

- ϕ satisface **AN** y **AL** sii ϕ es marginalista.
- La representación de ϕ no es única!

Probando con los axiomas

- $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un *valor marginalista* si existe $\lambda_i(K, K')$ (que depende de ϕ) definido para cada $i \in N$ y cada $(K, K') \in \mathcal{A}_i$, tal que para todo $v \in \mathcal{V}$,

$$\phi_i(v) = \sum_{(K, K') \in \mathcal{A}_i} \lambda_i(K, K') (v(K') - v(K)).$$

- ϕ satisface **AN** y **AL** sii ϕ es marginalista.
- La representación de ϕ no es única!
- Bajo qué condiciones tenemos unicidad?

Propiedad de simetría parcial

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

ϕ es un valor marginalista sobre una familia *árbol-regular*,
sii la representación $\{\lambda_i(K, K')\}$ es *única*.

Propiedad de simetría parcial

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

ϕ es un valor marginalista sobre una familia *árbol-regular*,
sii la representación $\{\lambda_i(K, K')\}$ es *única*.

$\lambda_i(K, K')$ es un peso del arco (K, K') desde el punto de
vista de i ...

Propiedad de simetría parcial

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

ϕ es un valor marginalista sobre una familia *árbol-regular*,
sii la representación $\{\lambda_i(K, K')\}$ es *única*.

$\lambda_i(K, K')$ es un peso del arco (K, K') desde el punto de
vista de i ...

- Un valor marginalista ϕ satisface **simetría parcial (PSP)** si
 $\exists\{\lambda_i(K, K')\}$

$$\lambda_i(K, K') = \lambda_j(K, K'), \quad \forall(K, K'), i, j \in K' \setminus K$$

Flujo y eficiencia

Peso de los arcos? Independientes del punto de vista del actor ?

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

**Flujo y
eficiencia**

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

Flujo y eficiencia

Recíprocamente,

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

**Flujo y
eficiencia**

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

Flujo y eficiencia

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

Recíprocamente,

- Si Γ define un flujo de valor 1 sobre G y ϕ marginalista con

$$\lambda_i(K, K') = \frac{\Gamma(K, K')}{|K' \setminus K|} \chi(\mathcal{A}_i, (K, K')),$$

entonces ϕ satisface **AN, AL, AE** y **PSP**.

Flujo y eficiencia

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

Recíprocamente,

- Si Γ define un flujo de valor 1 sobre G y ϕ marginalista con

$$\lambda_i(K, K') = \frac{\Gamma(K, K')}{|K' \setminus K|} \chi(\mathcal{A}_i, (K, K')),$$

entonces ϕ satisface **AN, AL, AE** y **PSP**.

- En familias regulares y para valores marginalistas, *monotonía fuerte* (si $v(K') \geq v(K)$, $\forall (K, K') \in \mathcal{A}_i$; implica $\phi_i \geq 0$) es equivalente a $\lambda_i \geq 0$.

Flujo y eficiencia

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

Recíprocamente,

- Si Γ define un flujo de valor 1 sobre G y ϕ marginalista con

$$\lambda_i(K, K') = \frac{\Gamma(K, K')}{|K' \setminus K|} \chi(\mathcal{A}_i, (K, K')),$$

entonces ϕ satisface **AN**, **AL**, **AE** y **PSP**.

- En familias regulares y para valores marginalistas, *monotonía fuerte* (si $v(K') \geq v(K)$, $\forall (K, K') \in \mathcal{A}_i$; implica $\phi_i \geq 0$) es equivalente a $\lambda_i \geq 0$.
- Esto no es cierto en general. Podemos tener coeficientes negativos.

Usando potenciales

- Algún axioma para conseguir unicidad de Γ ?

Usando potenciales

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- Algún axioma para conseguir unicidad de Γ ?
- Un potencial $P / P(\emptyset) = 0$ y $\sum_{K:(\emptyset,K) \in \mathcal{A}} P(K) = 1$

Usando potenciales

- Algún axioma para conseguir unicidad de Γ ?
- Un potencial $P / P(\emptyset) = 0$ y $\sum_{K:(\emptyset,K) \in \mathcal{A}} P(K) = 1$

Unicidad de $P(\cdot)$!

Usando potenciales

- Algún axioma para conseguir unicidad de Γ ?
- Un potencial $P / P(\emptyset) = 0$ y $\sum_{K:(\emptyset,K) \in \mathcal{A}} P(K) = 1$
Unicidad de $P(\cdot)$!
- $\Gamma(K, K') = P(K') - P(K)$,

Usando potenciales

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- Algún axioma para conseguir unicidad de Γ ?
- Un potencial $P / P(\emptyset) = 0$ y $\sum_{K:(\emptyset,K) \in \mathcal{A}} P(K) = 1$
Unicidad de $P(\cdot)$!
- $\Gamma(K, K') = P(K') - P(K)$,
 Γ está unívocamente determinada

Usando potenciales

- Algún axioma para conseguir unicidad de Γ ?
- Un potencial $P / P(\emptyset) = 0$ y $\sum_{K:(\emptyset,K) \in \mathcal{A}} P(K) = 1$
Unicidad de $P(\cdot)$!
- $\Gamma(K, K') = P(K') - P(K)$,
 Γ está unívocamente determinada
- La existencia de potencial es equivalente al *Axioma de Regularidad*

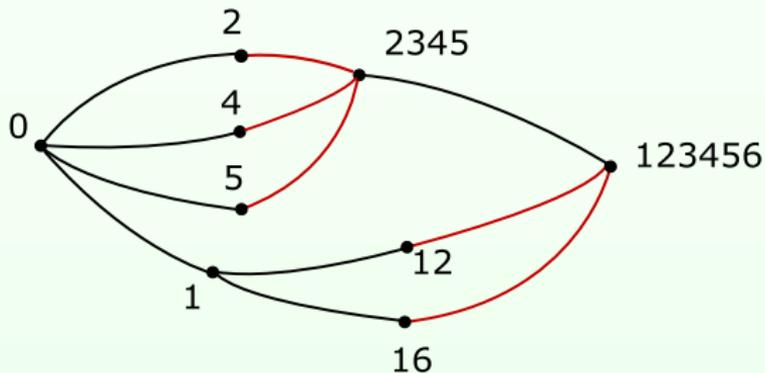
Usando potenciales

- Algún axioma para conseguir unicidad de Γ ?
- Un potencial $P / P(\emptyset) = 0$ y $\sum_{K:(\emptyset,K) \in \mathcal{A}} P(K) = 1$
Unicidad de $P(\cdot)$!
- $\Gamma(K, K') = P(K') - P(K)$,
 Γ está unívocamente determinada
- La existencia de potencial es equivalente al *Axioma de Regularidad*
- $\sum_{(K,K') \in W} \Gamma(K, K')$ una constante independiente de W .

Usando potenciales

- Algún axioma para conseguir unicidad de Γ ?
- Un potencial $P / P(\emptyset) = 0$ y $\sum_{K:(\emptyset,K) \in \mathcal{A}} P(K) = 1$
Unicidad de $P(\cdot)$!
- $\Gamma(K, K') = P(K') - P(K)$,
 Γ está unívocamente determinada
- La existencia de potencial es equivalente al *Axioma de Regularidad*
- $\sum_{(K,K') \in W} \Gamma(K, K')$ una constante independiente de W .
- Γ puede ser negativa en algunos arcos.

Cadenas Maximales



- Para cada cadena maximal en G
 $W = (K_0 = \emptyset, K_1, \dots, K_{\ell(W)} = N),$

$$\psi_i(v, W) = \sum_{j=1}^{\ell(W)} \frac{\chi(K_j \setminus K_{j-1}, i)}{|K_j| - |K_{j-1}|} (v(K_j) - v(K_{j-1})).$$

Cadenas Maximales

$$\phi(v) = \sum_{W \in \mathcal{W}} \gamma(W) \psi(v, W),$$

$$\sum_{W \in \mathcal{W}} \gamma(W) = 1 \quad \gamma(W) \geq 0$$

Cadenas Maximales

$$\phi(v) = \sum_{W \in \mathcal{W}} \gamma(W) \psi(v, W),$$

$$\sum_{W \in \mathcal{W}} \gamma(W) = 1 \quad \gamma(W) \geq 0$$

- Definición inspirada por la *interpretación probabilística* del valor de Shapley.

Cadenas maximales

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco- regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

**Cadenas
maximales**

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- ϕ satisface **AN, AL, AE y PSP**

Cadenas maximales

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

**Cadenas
maximales**

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- ϕ satisface **AN, AL, AE** y **PSP**
- $\Gamma(K, K') = \sum_{W:(K,K') \in W} \gamma(W)$

Cadenas maximales

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- ϕ satisface **AN**, **AL**, **AE** y **PSP**
- $\Gamma(K, K') = \sum_{W:(K,K') \in W} \gamma(W)$
- $\lambda_i(K, K') = \frac{\chi(K' \setminus K, i)}{|K' \setminus K|} \sum_W \gamma(W) \chi(W, (K, K'))$

Cadenas maximales

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- ϕ satisface **AN**, **AL**, **AE** y **PSP**
- $\Gamma(K, K') = \sum_{W:(K,K') \in W} \gamma(W)$
- $\lambda_i(K, K') = \frac{\chi(K' \setminus K, i)}{|K' \setminus K|} \sum_W \gamma(W) \chi(W, (K, K'))$
- Unicidad de solución?

Buscando propiedades

Definir un peso sobre toda cadena maximal:

Buscando propiedades

Definir un peso sobre toda cadena maximal:

- Todas las cadenas tienen el mismo peso:

$$\gamma(W) = 1/|W|.$$

Buscando propiedades

Definir un peso sobre toda cadena maximal:

- Todas las cadenas tienen el mismo peso:

$$\gamma(W) = 1/|W|.$$

- Cadena cuanto más larga más pesada, $\tilde{\gamma}(W) = |W|$ and

$$\gamma(W) = \tilde{\gamma}(W) / \sum_{W' \in \mathcal{W}} \tilde{\gamma}(W').$$

Buscando propiedades

Definir un peso sobre toda cadena maximal:

- Todas las cadenas tienen el mismo peso:

$$\gamma(W) = 1/|W|.$$

- Cadena cuanto más larga más pesada, $\tilde{\gamma}(W) = |W|$ and

$$\gamma(W) = \tilde{\gamma}(W) / \sum_{W' \in \mathcal{W}} \tilde{\gamma}(W').$$

- Cadena cuanto más corta más pesada, $\tilde{\gamma}(W) = 1/|W|$ and

$$\gamma(W) = \tilde{\gamma}(W) / \sum_{W' \in \mathcal{W}} \tilde{\gamma}(W').$$

Buscando propiedades

Definir un peso sobre toda cadena maximal:

- Todas las cadenas tienen el mismo peso:

$$\gamma(W) = 1/|W|.$$

- Cadena cuanto más larga más pesada, $\tilde{\gamma}(W) = |W|$ and

$$\gamma(W) = \tilde{\gamma}(W) / \sum_{W' \in \mathcal{W}} \tilde{\gamma}(W').$$

- Cadena cuanto más corta más pesada, $\tilde{\gamma}(W) = 1/|W|$ and

$$\gamma(W) = \tilde{\gamma}(W) / \sum_{W' \in \mathcal{W}} \tilde{\gamma}(W').$$

- Cadena con mayor información=más pesada (Entropía)

$$H(W) = \sum_{k=1}^{\ell} p_k \log p_k, \text{ where } p_k = |K_k \setminus K_{k-1}|/n,$$

$$\gamma(W) = H(W) / \sum_{W' \in \mathcal{W}} H(W').$$

Juegos de unanimidad

Hart y Mas Collél 1989

- **AL** \longrightarrow Valor definido sobre funciones características que actúan como bases.

Juegos de unanimidad

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

Hart y Mas Collél 1989

- **AL** \longrightarrow Valor definido sobre funciones características que actúan como bases.
- $$U_R(K) = \begin{cases} 1 & \text{si } R \subset K \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Juegos de unanimidad

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

Hart y Mas Collél 1989

- **AL** \longrightarrow Valor definido sobre funciones características que actúan como bases.
- $$U_R(K) = \begin{cases} 1 & \text{si } R \subset K \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$
- (\mathcal{K}, U_R) es un *Juego de Unanimidad*

Juegos de unanimidad

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

Hart y Mas Collé 1989

- **AL** \rightarrow Valor definido sobre funciones características que actúan como bases.
- $U_R(K) = \begin{cases} 1 & \text{si } R \subset K \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
- (\mathcal{K}, U_R) es un *Juego de Unanimidad*
- **(EU)** ϕ es igualitario sobre juegos de unanimidad sii $\forall R$,

$$\phi_i(U_R) = \begin{cases} 1/|R| & \text{si } i \in R \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Juegos de unanimidad

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- $\exists! \phi^U$ que cumple **AL** y **EU**. Además cumple **AE** y **PI**.

Juegos de unanimidad

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- $\exists! \phi^U$ que cumple **AL** y **EU**. Además cumple **AE** y **PI**.
- Nos preguntamos bajo qué condiciones ϕ^U es marginalista.

Juegos de unanimidad

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- $\exists! \phi^U$ que cumple **AL** y **EU**. Además cumple **AE** y **PI**.
- Nos preguntamos bajo qué condiciones ϕ^U es marginalista.
- Encontramos que eso se da bajo ciertas condiciones sobre la familia que son bastante restrictivas. (Por ejemplo si \mathcal{K} es regular, debería ser todo 2^N).

Juegos de unanimidad

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- $\exists!$ ϕ^U que cumple **AL** y **EU**. Además cumple **AE** y **PI**.
- Nos preguntamos bajo qué condiciones ϕ^U es marginalista.
- Encontramos que eso se da bajo ciertas condiciones sobre la familia que son bastante restrictivas. (Por ejemplo si \mathcal{K} es regular, debería ser todo 2^N).
- Hay casos en los que aunque ϕ^U sea marginalista, no corresponde a ninguna de las representaciones que pensamos antes.

Conclusiones

- Hay diferentes modos de definir un valor de tipo Shapley en familias generales de coaliciones.

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

Conclusiones

- Hay diferentes modos de definir un valor de tipo Shapley en familias generales de coaliciones.
- Presentamos dos estructuras que son equivalentes cuando $\mathcal{K} = 2^N$. Muy diferentes $\mathcal{K} \neq 2^N$

Conclusiones

- Hay diferentes modos de definir un valor de tipo Shapley en familias generales de coaliciones.
- Presentamos dos estructuras que son equivalentes cuando $\mathcal{K} = 2^N$. Muy diferentes $\mathcal{K} \neq 2^N$
- Eligiendo los axiomas **AN**, **AL**, **AE** obtenemos un valor marginalista, mucha teoría matemática detrás pero falta unicidad.

Conclusiones

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- Hay diferentes modos de definir un valor de tipo Shapley en familias generales de coaliciones.
- Presentamos dos estructuras que son equivalentes cuando $\mathcal{K} = 2^N$. Muy diferentes $\mathcal{K} \neq 2^N$
- Eligiendo los axiomas **AN**, **AL**, **AE** obtenemos un valor marginalista, mucha teoría matemática detrás pero falta unicidad.
- Agregando axiomas se obtiene unicidad pero falta sentido a los pesos de los arcos. (algunos negativos)

Conclusiones

Un valor tipo
Shapley para
familias
incompletas
de coaliciones

N. Aguilera,
S. Di Marco,
M. Escalante

Introduction

Familias
arco-regulares
y árbol-
regulares

Flujo y
eficiencia

Cadenas
maximales

Buscando
propiedades

Juegos de
unanimidad

Ejemplo

Conclusiones

- Hay diferentes modos de definir un valor de tipo Shapley en familias generales de coaliciones.
- Presentamos dos estructuras que son equivalentes cuando $\mathcal{K} = 2^N$. Muy diferentes $\mathcal{K} \neq 2^N$
- Eligiendo los axiomas **AN**, **AL**, **AE** obtenemos un valor marginalista, mucha teoría matemática detrás pero falta unicidad.
- Agregando axiomas se obtiene unicidad pero falta sentido a los pesos de los arcos. (algunos negativos)
- La estructura de los juegos de unanimidad ofrece pocas interpretaciones y no guarda relación con la visión marginalista. *Cuál ofrece el reparto más justo ?*