

# Resolución numérica del problema de Stokes mediante elementos finitos mixtos de tipo cross-grid

María Gabriela Armentano

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

trabajo en colaboración con Jordi Blasco de la Univ. Politécnica de Cataluña.

# Indice

- 1 El Problema de Stokes
  - Planteo del problema

# Indice

- 1 El Problema de Stokes
  - Planteo del problema
- 2 Métodos mixtos de tipo cross-grid  $P_k Q_l$ 
  - El elemento  $P_1 Q_1$
  - Análisis de Estabilidad
  - Técnica de los Macroelementos
  - El elemento  $P_2 Q_1$

# Indice

- 1 El Problema de Stokes
  - Planteo del problema
- 2 Métodos mixtos de tipo cross-grid  $P_k Q_l$ 
  - El elemento  $P_1 Q_1$
  - Análisis de Estabilidad
  - Técnica de los Macroelementos
  - El elemento  $P_2 Q_1$
- 3 Ejemplos Numéricos

# El Problema de Stokes

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio con borde poligonal.

El problema de Stokes que modela los movimientos de un fluido incompresible que ocupa la cavidad  $\Omega$  está dado por:

Hallar  $\mathbf{u}$  la velocidad del fluido y  $p$  la presión tales que

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} = 0, & \text{en } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$  es la fuerza y  $\mu > 0$  es la viscosidad.

# Forma débil:

En vista de que tenemos dos variables a aproximar el problema de Stokes se formula naturalmente como el siguiente **Problema Mixto**

Sea  $V = (H_0^1(\Omega))^2$  y  $Q = L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q = 0\}$

Hallar  $\mathbf{u} \in V$  y  $p \in Q$  tal que:

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, & \forall \mathbf{v} \in V \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, & \forall q \in Q \end{cases} \quad (2)$$

donde

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

$$b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} q \quad \mathbf{v} \in V, q \in Q$$

Como  $a(\cdot, \cdot)$  es coercitiva en  $V$  (i.e.,  $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq C\|\mathbf{v}\|_1^2$ ) y  $b(\cdot, \cdot)$  satisface la condición inf-sup, i.e.,  $\exists \beta > 0$  tal que  $\forall q \in Q$

$$\sup_{0 \neq \mathbf{v} \in V} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_1} \geq \beta \|q\|_0 \quad (3)$$

Haciendo uso de la teoría general para métodos mixtos



D. Boffi, F. Brezzi, L. Demkowicz, R. G. Durán, R. Falk and M. Fortin, *Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions, and Applications*, Lectures Notes in Mathematics Vol. 1939, 2008.

**El problema débil tiene única solución**

## Aproximaciones de Galerkin

Sean  $V_h \subset V$  y  $Q_h \subset Q$  de dimensión finita.

El problema discreto es: Hallar  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$  tal que:

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, & \forall \mathbf{v} \in V_h \\ b(\mathbf{u}_h, q) = 0, & \forall q \in Q_h \end{cases} \quad (4)$$

Si los espacios  $V_h$  y  $Q_h$  son elegidos de forma tal que se satisfaga la **condición inf-sup**, i.e,  $\exists \tilde{\beta} > 0$ ,

$$\sup_{0 \neq \mathbf{v} \in V_h} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_1} \geq \tilde{\beta} \|q\|_0 \quad \forall q \in Q_h \quad (5)$$

**El problema discreto tiene única solución** y se tienen las siguientes estimaciones de error:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq C \left\{ \inf_{\mathbf{v} \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_1 + \inf_{q \in Q_h} \|p - q\|_0 \right\}$$

# Elementos finitos de tipo cross-grid $P_k Q_l$

Sea  $\mathcal{C}_h$  una partición de  $\bar{\Omega}$  en cuadriláteros convexos regulares  $K$   
Dividimos cada cuadrilátero  $K$  en 4 triángulos mediante sus diagonales y llamamos  $\mathcal{T}_h$  a la resultante malla de triángulos  $T$ .

La presión es interpolada en cada cuadrilátero mediante polinomios de grado  $l$  (con  $l \geq 1$  para obtener presiones continuas) mientras que la velocidad es interpolada usando polinomios de grado  $k$  con  $k \geq l$ .

Los correspondientes espacios de dimensión finita son:

$$Q_h = \{q \in Q : q|_K = \hat{q} \circ F_K^{-1}, \quad \hat{q}|_{\hat{K}} \in Q_l, \quad \forall K \in \mathcal{C}_h\}$$

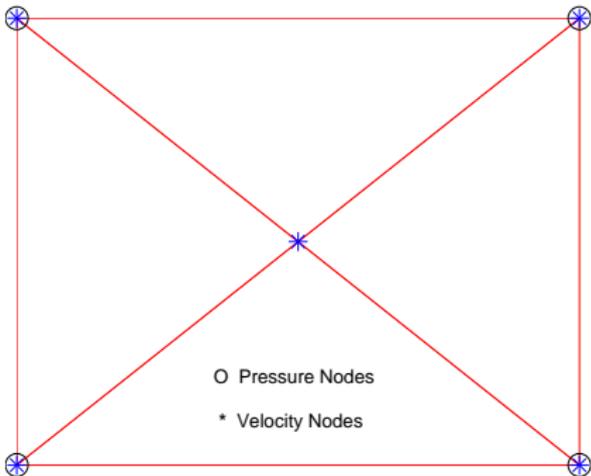
$$V_h = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v}|_T \in (\mathcal{P}_k)^2, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

donde

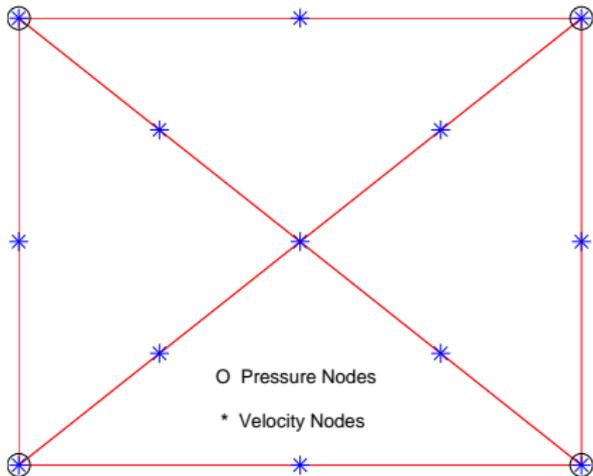
$\mathcal{P}_k$  = espacio de polinomios de grado menor o igual que  $k$ .

$Q_l$  = espacio de polinomios de la forma  $q(x, y) = \sum_j \alpha_j p_j(x) q_j(y)$   
con  $p_j$  y  $q_j$  polinomios de grado menor o igual que  $l$ .

$F_k$  = la aplicación bilineal que manda el cuadrado de referencia  
 $\hat{K} = [0, 1] \times [0, 1]$  en  $K$ .



$P_1 Q_1$



$P_2 Q_1$

# El inestable elemento $P_1 Q_1$

Si bien este es el elemento más simple que uno pueda considerar **NO** satisface la condición inf-sup.

## Lema

Let  $\Omega = (0, A) \times (0, B)$  y sea  $\mathcal{C}_h$  una malla uniforme de  $N \times M$  rectángulos. Existe una "checkerboard function",  $\hat{q}_h \in Q_h$  tal que

$$(\nabla \hat{q}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h$$

## Idea de la Demostración:

La demostración es constructiva.

Sea  $K_{i,j} = [(i-1)h, ih] \times [(j-1)k, jk]$  con  $h = A/N$  y  $k = B/M$  los rectángulos de  $\mathcal{C}_h$  y llamemos  $n_{i,j} = (ih, jk)$ ,  $0 \leq i \leq N$ ,  $0 \leq j \leq M$  a sus nodos .

Definimos  $\hat{q}_h \in Q_h$  como:

$$\hat{q}_h(n_{i,j}) = \begin{cases} a & \text{Si } i+j \text{ es par} \\ b & \text{Si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$$

Sea  $\mathcal{T}_h$  la malla de triángulos obtenida dividiendo cada rectángulo en 4 triángulos mediante sus diagonales.

Sea  $n_{i+1/2,j+1/2} = ((i + 1/2)h, (j + 1/2)k)$  el nodo interno en cada rectángulo.

Llamamos  $\beta_{i,j}$  la base de Lagrange de  $V_h$  y  $p_{i,j}$  a la base de Lagrange de  $Q_h$ .

**Caso  $i + j$  par:**

Como  $\frac{\partial \hat{q}_h}{\partial x}(x, y)|_{K_{i,j}}$  es una función impar con respecto a  $y = (j - 1/2)k$

y  $\beta_{i-1/2,j-1/2}(x, \cdot)$  es una función par con respecto a  $y = (j - 1/2)k$  tenemos que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \hat{q}_h}{\partial x} \beta_{i-1/2,j-1/2} = \int_{K_{i,j}} \frac{\partial \hat{q}_h}{\partial x} \beta_{i-1/2,j-1/2} = 0$$

Por otro lado, es fácil ver que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \hat{q}_h}{\partial x} \beta_{i,j} = \int \bigcup_{n_{i,j} \in T} T \frac{\partial \hat{q}_h}{\partial x} \beta_{i,j} = 0$$

Analogamente se ve que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \hat{q}_h}{\partial y} \beta_{i-1/2, j-1/2} = 0$$

y que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \hat{q}_h}{\partial y} \beta_{i,j} = 0.$$

La demostración concluye observando que el caso  $i + j$  impar es análogo y por lo tanto  $(\nabla \hat{q}_h, \mathbf{v}_h) = 0, \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \square$

*El elemento  $P_1 Q_1$  es inestable!!!*

# Análisis de Estabilidad

Una alternativa para analizar la estabilidad de los métodos mixtos, i.e, ver que se satisface la condición inf-sup discreta, es construir el llamado “Operador de Fortin”.

## Teorema

*La condición in-fup discreta vale si y solo si existe un operador  $\Pi_h : V \rightarrow V_h$  tal que*

$$b(\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V, \forall q \in Q_h \quad (6)$$

$$\|\Pi_h \mathbf{v}\| \leq C \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (7)$$

## Idea de la Demostración

$$\beta \|q\| \leq \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{b(\Pi \mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|} \leq C \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{b(\Pi \mathbf{v}, q)}{\|\Pi \mathbf{v}\|}$$

Veamos otra alternativa para chequear la inf-sup...

# Técnica de los Macroelementos

La idea central de esta técnica es reducir el problema de chequear la cond. inf-sup a una estimación local que involucre solo algunos elementos de la malla.



R. Stenberg, Analysis of Mixed Finite Element Methods for the Stokes problem: A unified approach, *Mathematics of Computation*, 42 (165), 1984, pp. 9-23.



R. Stenberg, A technique for analysing Finite Element Methods for viscous ncompressible fluid, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 11, 1990, pp. 935-948.



R. Stenberg, Error analysis of some Finite Element Methods for the Stokes problem, *Mathematics of Computation*, 54 (190), 1990, pp. 495-508.

Asumimos que tenemos una malla de rectángulos y sea  $M$  el macroelemento que consiste de un solo rectángulo  $K$ .

Definimos:

$$Q_M = \{q \in L^2(M) : q|_M = \hat{q} \circ F_M^{-1}, \quad \hat{q}|_{\hat{K}} \in Q_l\}$$

$$V_M = \{\mathbf{v} \in (H_0^1(M))^2 : \mathbf{v}|_T \in (\mathcal{P}_k)^2, \quad \forall T \subset M\}$$

y las siguientes normas:

$$|q|_M = h_M \|\nabla q\|_{0,M}$$

$$\|q\|_h^2 = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} h_K^2 \|\nabla q\|_{0,K}^2 = \sum_{M \in \mathcal{C}_h} |q|_M^2$$

donde  $F_M$  es la transformación afín que manda el cuadrado de referencia  $\hat{K} = [0, 1] \times [0, 1]$  en  $M = K$ .

El siguiente Lema nos da una herramienta clave para chequear si la condición inf-sup discreta se satisface.

### Lema

*Si existe una constante  $C$  tal que para cualquier  $M \in \mathcal{C}_h$*

$$\sup_{0 \neq \mathbf{v} \in V_M} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}, q)_M}{|\mathbf{v}|_{1,M}} \geq C |q|_M \quad \forall q \in Q_M \quad \text{(inf-sup local)} \quad (8)$$

*Luego, la condición inf-sup discreta se satisface!*

Sea

$$N_M = \{q \in Q_M \mid (\nabla q, \mathbf{v})_M = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V_M\}$$

y  $\hat{M} = [0, 1] \times [0, 1]$ , las siguientes condiciones se satisfacen:

1.  $F_M(\hat{M}) = M$ .
2. Sean  $\hat{T}_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$  los 4 triángulos de  $\hat{M}$  obtenidos partiendo  $\hat{M}$  por sus diagonales, luego  $T_j = F_M(\hat{T}_j)$  son los 4 triángulos de  $M$  que resultan de partir a  $M$  usando sus diagonales.
3.  $F_{M|_{\hat{T}_j}} = F_{T_j} \circ F_{\hat{T}_j}^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, 4$  donde  $F_{T_j}$  y  $F_{\hat{T}_j}$  son las aplicaciones que mandan el triángulo de referencia  $T_R$ , i.e. el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  and  $(0, 1)$ , en  $T_j$  y  $\hat{T}_j$  respectivamente.

## El Lema clave de la técnica

### Lema

*Si el espacio  $N_M$  es uno-dimensional, i.e., consiste solo de funciones constantes en  $M$ , la condicion inf-sup local*

$$\sup_{0 \neq \mathbf{v} \in V_M} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}, q)_M}{|\mathbf{v}|_{1,M}} \geq C |q|_M \quad \forall q \in Q_M$$

*se tiene.*

y por ende

## El Lema clave de la técnica

### Lema

*Si el espacio  $N_M$  es uno-dimensional, i.e., consiste solo de funciones constantes en  $M$ , la condicion inf-sup local*

$$\sup_{0 \neq \mathbf{v} \in V_M} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}, q)_M}{|\mathbf{v}|_{1,M}} \geq C |q|_M \quad \forall q \in Q_M$$

*se tiene.*

y por ende

### Teorema

*Si el espacio  $N_M$  es uno-dimensional, el problema discreto tiene una única solución  $(\mathbf{u}_h, p)$  y*

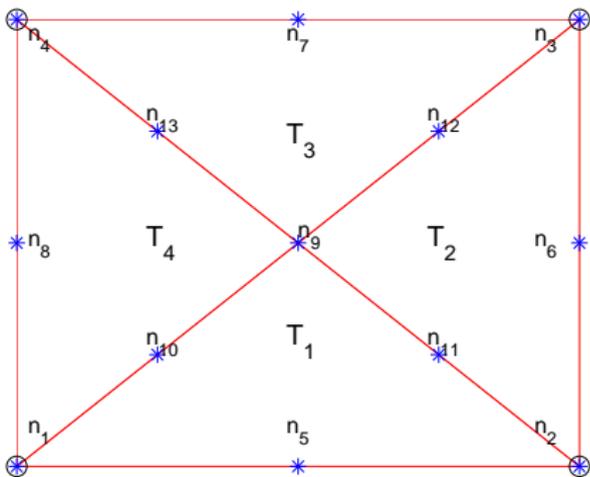
$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq C \left\{ \inf_{\mathbf{v} \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_1 + \inf_{q \in Q_h} \|p - q\|_0 \right\}$$

# El estable elemento $P_2 Q_1$

## Lema

*Sea  $M$  el macroelemento consistente de un solo rectángulo  $K \in \mathcal{C}_h$ . El espacio  $N_M$  para el elemento cross-grid  $P_2 Q_1$  es uno dimensional.*

**Demostración:** Sea  $q \in N_M$ , i.e.,  $q \in Q_M$  tal que  $(\nabla q, \mathbf{v})_M = 0$   $\forall \mathbf{v} \in V_M$ . Queremos probar que  $q$  es constante.



Llamamos  $\beta_j$ ,  $1 \leq j \leq 13$ , a las correspondientes  $\mathcal{P}_2$ -Lagrange bases del nodo  $j$ .

Sean  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$  tal que  $p_i \in Q_M$  y  $p_i(n_j) = \delta_{i,j}$ . Luego,  $q \in Q_M$  puede escribirse como

$$q(x, y) = \sum_{i=1}^4 q(n_i) p_i(x, y)$$

Luego  $(\nabla q, \mathbf{v})_M = 0$  si y solo si

$$\sum_{i=1}^4 q(n_i) (\nabla p_i(x, y), \mathbf{v})_M = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_M$$

Podemos hacer las cuentas en el rectángulo de referencia  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Sea  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 10}$ , definida por:

$$A_{i,j} = \int_{\hat{M}} \frac{\partial p_i}{\partial x} \beta_{9+j-1} \quad 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 5$$

$$A_{i,5+j} = \int_{\hat{M}} \frac{\partial p_i}{\partial y} \beta_{9+j-1} \quad 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 5$$

El calculo con Maple da la siguiente matriz  $A$

$$\begin{pmatrix} 0 & -7/60 & -7/60 & -1/20 & -1/20 & 0 & -7/60 & -1/20 & -1/20 & -7/60 \\ 0 & 7/60 & 7/60 & 1/20 & 1/20 & 0 & -1/20 & -7/60 & -7/60 & -1/20 \\ 0 & 1/20 & 1/20 & 7/60 & 7/60 & 0 & 1/20 & 7/60 & 7/60 & 1/20 \\ 0 & -1/20 & -1/20 & -7/60 & -7/60 & 0 & 7/60 & 1/20 & 1/20 & 7/60 \end{pmatrix}$$

cuyo rango es 3.

Elegimos  $\mathbf{u} = (\beta_{10}, 0)$  y tenemos que  $(\nabla q, \mathbf{u})_M = 0$  si y solo si

$$-\frac{7}{60}q(n_1) + \frac{7}{60}q(n_2) + \frac{1}{20}q(n_3) - \frac{1}{20}q(n_4) = 0 \quad (9)$$

Eligiendo  $\mathbf{v} = (0, \beta_{10})$  tenemos que  $(\nabla q, \mathbf{v})_M = 0$  si y solo si

$$-\frac{7}{60}q(n_1) - \frac{1}{20}q(n_2) + \frac{1}{20}q(n_3) + \frac{7}{60}q(n_4) = 0 \quad (10)$$

Finalmente, tomando  $\mathbf{w} = (0, \beta_{12})$  tenemos que  $(\nabla q, \mathbf{w})_M = 0$  si y solo si

$$-\frac{1}{20}q(n_1) - \frac{7}{60}q(n_2) + \frac{7}{60}q(n_3) + \frac{1}{20}q(n_4) = 0 \quad (11)$$

Combinando (9), (10) y (11) tenemos que

$q(n_1) = q(n_2) = q(n_3) = q(n_4)$  y en consecuencia  $q$  es constante.

□.

**El elemento  $P_2Q_1$  es estable!!!!**

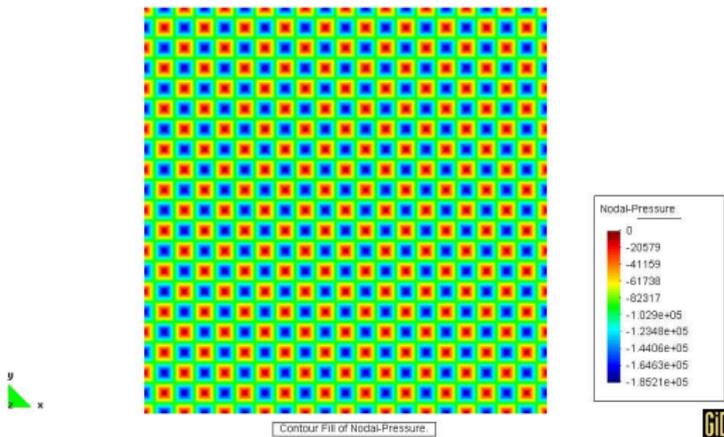
## Ejemplo 1: "Cavity Flow".

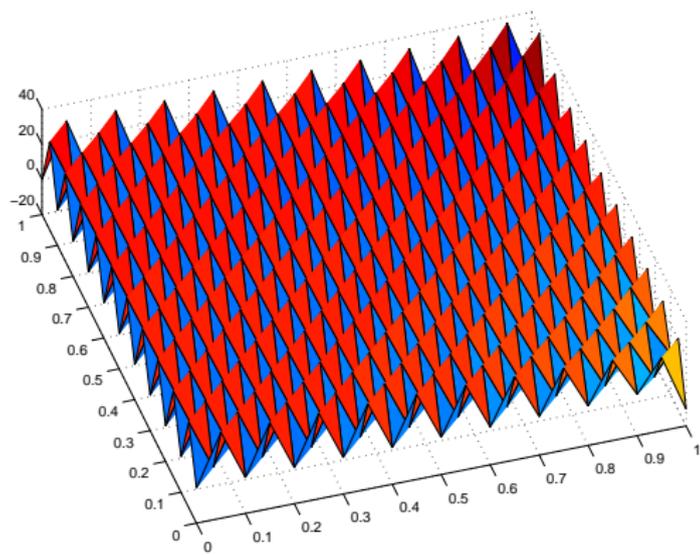
Resolvimos en primer lugar el clásico problema del flujo en una cavidad. El dominio es el cuadrado  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , con condiciones de contorno  $\mathbf{u} = 0$  en  $x = 0, y = 0, x = 1$  y  $\mathbf{u}(x, 1) = (1, 0)$ , y tomamos  $\mathbf{f} = 0$  y  $\nu = 0,1$ .

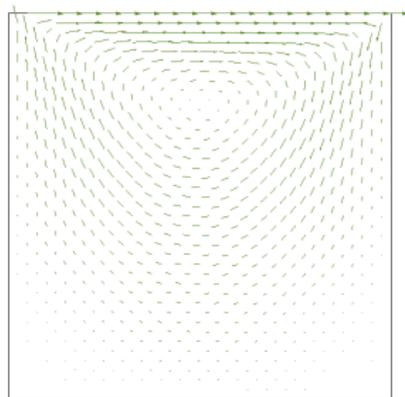
Usamos mallas para la presión de  $20 \times 20$  elementos para el  $P_1 Q_1$  y  $10 \times 10$  para el  $P_2 Q_1$  (notar que con estas mallas se tienen los mismos nodos para la velocidad en ambos casos).

### Caso: $P_1 Q_1$

Presión - Checkerboard Spurious mode





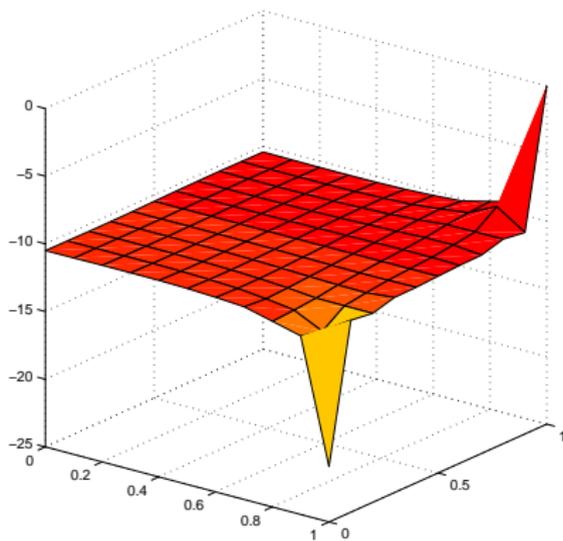


Display Vectors of Nodal-Velocity, |Nodal-Velocity| factor 0.1

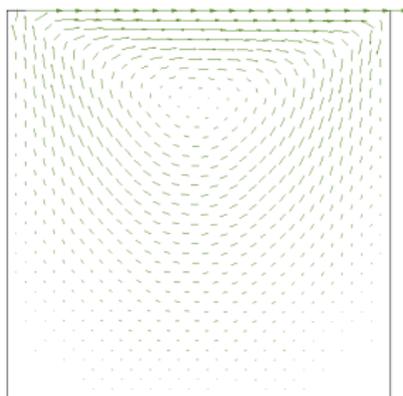


# Velocidad

Caso:  $P_2 Q_1$



Presión



Display Vectors of Nodal-Velocity. [Nodal-Velocity] factor 0.1.



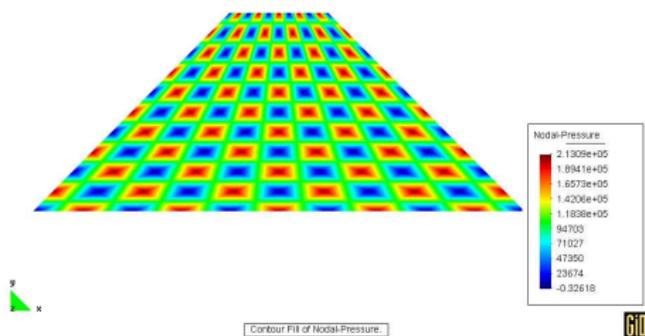
Velocidad

## Ejemplo 2: Dominio Trapezoidal.

A pesar de que el análisis de nuestros elementos lo hemos hecho para mallas rectangulares, el siguiente ejemplo muestra su aplicación con mallas de cuadriláteros más generales.

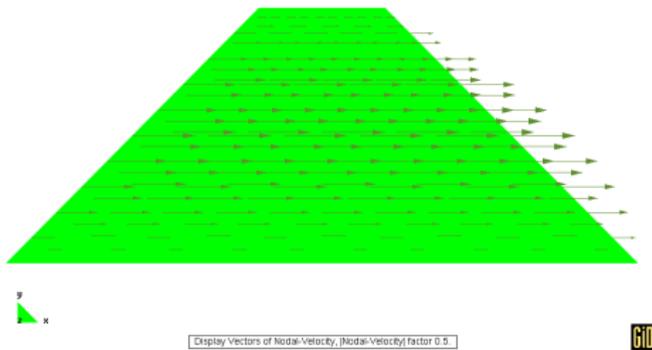
Se trata del flujo de Poiseuille en un dominio trapezoidal de vértices  $(0, -1)$ ,  $(5, -1)$ ,  $(2, 1)$  y  $(3, 1)$ , en el cual se impone un perfil parabólico para la velocidad en la entrada (frontera izquierda), velocidad nula en los lados superior e inferior y una condición de frontera abierta, i.e. derivada normal 0, en la salida (lado derecho) con  $\mathbf{f} = 0$  y  $\nu = 0,1$ .

La solución analítica es  $\mathbf{u}(x, y) = (1 - y^2, 0)$  y  $p(x, y) = 0,6 - 0,2x$ .

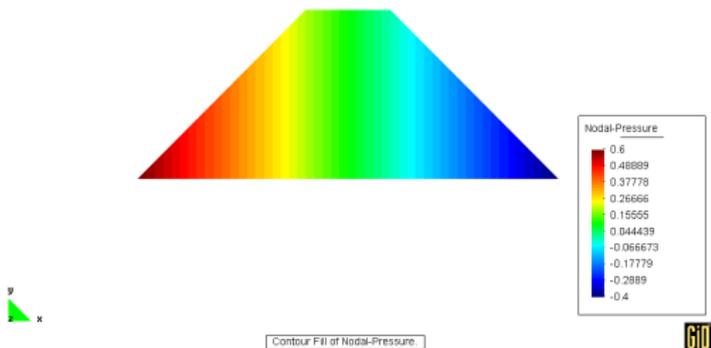


Presión -  $P_1 Q_1$

Notamos que en este caso también hay modos espúreos para la presión!.



Velocidad



Presión -  $P_2 Q_1$

Este elemento resulta estable!.

**GRACIAS !!!**