SOBRE WAVELETS Y ESPACIOS FUNCIONALES EN ESPACIOS DE TIPO HOMOGÉNEO

Seminario Carlos Segovia Fernández.
IMAL, octubre 2009

Hugo Aimar - Ana Bernardis - Luis Nowak

- **Cómo me gustaría ser Hilbert !!!**

(...de un Banach a otro Banach)

- **Yo soy feliz siendo Banach. No tenemos nada que envidiarle a Hilbert!**

(...del "otro" Banach al "un" Banach)

BASES EN ESPACIOS DE BANACH $\mathbb{B}$

BASES EN ESPACIOS DE BANACH $\mathbb{B}$

Sistema biortogonal: $(f_n, f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}, f_n \in \mathbb{B}, f_n^* \in \mathbb{B}^*$ **tal que** $f_n^*(f_m) = \delta_{n,m}$

BASES EN ESPACIOS DE BANACH $\mathbb{B}$

Sistema biortogonal: $(f_n, f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}, f_n \in \mathbb{B}, f_n^* \in \mathbb{B}^*$ **tal que** $f_n^*(f_m) = \delta_{n,m}$

$\mathcal{B} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **es base de Schauder si** $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^*(f) f_n$.

$\mathcal{B}^* = (f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ **funcionales biortogonales asociados a** $\mathcal{B}$

BASES EN ESPACIOS DE BANACH $\mathbb{B}$

Sistema biortogonal: $(f_n, f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}, f_n \in \mathbb{B}, f_n^* \in \mathbb{B}^*$ **tal que** $f_n^*(f_m) = \delta_{n,m}$

$\mathcal{B} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **es base de Schauder si** $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^*(f) f_n$.

$\mathcal{B}^* = (f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ **funcionales biortogonales asociados a** $\mathcal{B}$

$(f_n, f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ **es base incondicional si**

1. $\overline{span\{f_n\}} = \mathbb{B}$;
2. $\left\| \sum_{n\in F} f_n^*(f) f_n \right\| \leq C\|f\|$

BASES EN ESPACIOS DE BANACH $\mathbb{B}$

Sistema biortogonal: $(f_n, f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in \mathbb{B}$, $f_n^* \in \mathbb{B}^*$ **tal que** $f_n^*(f_m) = \delta_{n,m}$

$\mathcal{B} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **es base de Schauder si** $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^*(f) f_n$.

$\mathcal{B}^* = (f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ **funcionales biortogonales asociados a** $\mathcal{B}$

$(f_n, f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ **es base incondicional si**

1. $\overline{span\{f_n\}} = \mathbb{B}$;
2. $\left\| \sum_{n\in F} f_n^*(f) f_n \right\| \leq C\|f\|$ $\quad$ **(**$S_F(.) = \sum_{n\in F} f_n^*(.) f_n$ **acotados)**

ESPACIO DE TIPO HOMOGÉNEO (X, d, μ)

d casimétrica y μ **medida de Borel:**

$$0 < \mu(B(x, 2r)) \leq A\mu(B(x, r)) < \infty$$

ESPACIO DE TIPO HOMOGÉNEO (X, d, μ)

d casimétrica y μ **medida de Borel:**

$$0 < \mu(B(x, 2r)) \leq A\mu(B(x, r)) < \infty$$

Supondremos d-bolas abiertas (Macías-Segovia)

ESPACIO DE TIPO HOMOGÉNEO (X, d, μ)

d casimétrica y μ **medida de Borel:**

$$0 < \mu(B(x, 2r)) \leq A\mu(B(x, r)) < \infty$$

Supondremos d-bolas abiertas (Macías-Segovia)

Adicionalmente pedimos μ **regular**

CHRIST Y AIMAR: Los NEWTON de las wavelets en e.t.h.

CHRIST Y AIMAR: Los NEWTON de las wavelets en e.t.h.

“... El mundo científico se nutre de la circulación libre de información. Cada uno aporta (literalmente) un granito de arena, y así se hace cada ladrillo. A veces viene un Newton, un Einstein, un Bohr, un Mendel, y trae él solo treina ladrillos, pero en general es así: granito a granito...”

SISTEMAS DIÁDICOS

SISTEMAS DIÁDICOS

$\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$ **si** $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$**,** $\mathcal{D}^j = \{Q_k^j\}$ **con** Q_k^j **borelianos**

SISTEMAS DIÁDICOS

$\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$ **si** $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$**,** $\mathcal{D}^j = \{Q_k^j\}$ **con** Q_k^j **borelianos**

1. $\mu(\partial(Q_k^j)) = 0.$

SISTEMAS DIÁDICOS

$\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$ **si** $\mathcal{D} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$**,** $\mathcal{D}^j = \{Q_k^j\}$ **con** Q_k^j **borelianos**

1. $\mu(\partial(Q_k^j)) = 0.$
2. $Q_k^j \cap Q_l^j = \emptyset$ si $k \neq l$, y $X = \bigcup_{k \in K(j)} Q_k^j$

SISTEMAS DIÁDICOS

$\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$ **si** $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$**,** $\mathcal{D}^j = \{Q_k^j\}$ **con** Q_k^j **borelianos**

1. $\mu(\partial(Q_k^j)) = 0$.
2. $Q_k^j \cap Q_l^j = \emptyset$ si $k \neq l$, y $X = \bigcup\limits_{k\in K(j)} Q_k^j$
3. si $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in K(j)$, entonces $\forall i < j$, $\exists!\ l\ /\ Q_k^j \subseteq Q_l^i$.

SISTEMAS DIÁDICOS

$\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$ **si** $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$**,** $\mathcal{D}^j = \{Q_k^j\}$ **con** Q_k^j **borelianos**

1. $\mu(\partial(Q_k^j)) = 0.$
2. $Q_k^j \cap Q_l^j = \emptyset$ si $k \neq l$, y $X = \bigcup_{k\in K(j)} Q_k^j$
3. si $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in K(j)$, entonces $\forall i < j$, $\exists!\ l\ /\ Q_k^j \subseteq Q_l^i$.
4. o bien $Q_k^j \subseteq Q_l^i$ o bien $Q_k^j \cap Q_l^i = \emptyset$

SISTEMAS DIÁDICOS

$\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$ **si** $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$**,** $\mathcal{D}^j = \{Q_k^j\}$ **con** Q_k^j **borelianos**

1. $\mu(\partial(Q_k^j)) = 0.$
2. $Q_k^j \cap Q_l^j = \emptyset$ si $k \neq l$, y $X = \bigcup_{k\in K(j)} Q_k^j$
3. si $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in K(j)$, entonces $\forall i < j$, $\exists!\ l\ /\ Q_k^j \subseteq Q_l^i$.
4. o bien $Q_k^j \subseteq Q_l^i$ o bien $Q_k^j \cap Q_l^i = \emptyset$
5. $Q_k^j = \bigcup_{l\in L(j,k)} Q_l^{j+1}$ y $1 \leq \sharp L(j,k) \leq N$. **(natalidad)**

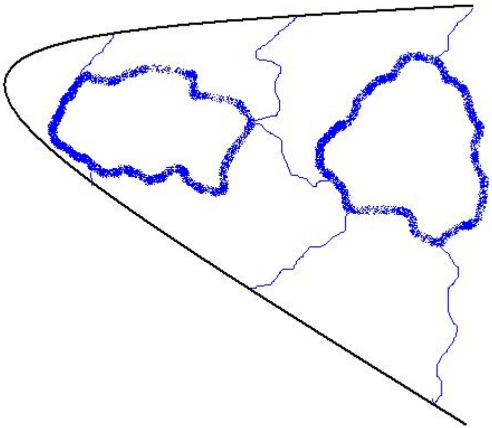
SISTEMAS DIÁDICOS

$\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$ **si** $\mathcal{D} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$**,** $\mathcal{D}^j = \{Q_k^j\}$ **con** Q_k^j **borelianos**

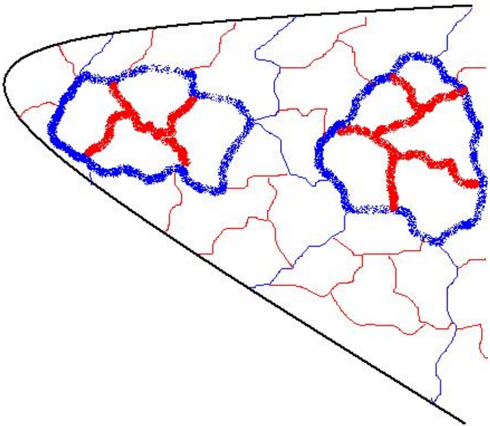
1. $\mu(\partial(Q_k^j)) = 0$.
2. $Q_k^j \cap Q_l^j = \emptyset$ si $k \neq l$, y $X = \bigcup_{k \in K(j)} Q_k^j$
3. si $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in K(j)$, entonces $\forall i < j$, $\exists!\ l \ /\ Q_k^j \subseteq Q_l^i$.
4. o bien $Q_k^j \subseteq Q_l^i$ o bien $Q_k^j \cap Q_l^i = \emptyset$
5. $Q_k^j = \bigcup_{l \in L(j,k)} Q_l^{j+1}$ y $1 \leq \sharp L(j,k) \leq N$. **(natalidad)**
6. $B(x_k^j, a\delta^j) \subseteq Q_k^j \subseteq B(x_k^j, A\delta^j)$ **(excentricidad)**.

CONTROL DE NATALIDAD

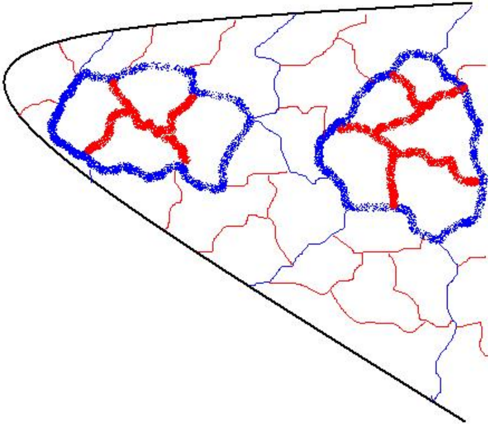
CONTROL DE NATALIDAD



CONTROL DE NATALIDAD



CONTROL DE NATALIDAD

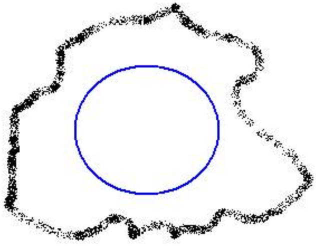


A lo sumo N hijos

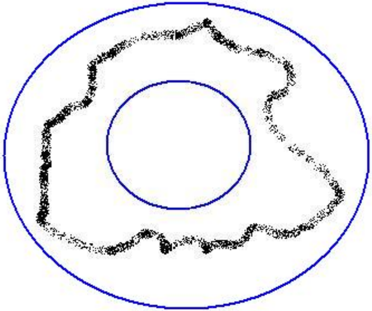
CONTROL MÉTRICO: EXCENTRICIDAD

CONTROL MÉTRICO: EXCENTRICIDAD

CONTROL MÉTRICO: EXCENTRICIDAD



CONTROL MÉTRICO: EXCENTRICIDAD



¿REFINAR ESCALAS IMPLICA REFINAR LA PARTICIÓN?

¿REFINAR ESCALAS IMPLICA REFINAR LA PARTICIÓN?

Pensemos en intervalos pequeños centrados en los enteros!!

¿REFINAR ESCALAS IMPLICA REFINAR LA PARTICIÓN?

Pensemos en intervalos pequeños centrados en los enteros!!

La subfamilia $\tilde{\mathcal{D}}$ de una $\mathcal{D}$ en $\mathfrak{D}(\delta)$.

$$\tilde{\mathcal{D}}^j = \{Q \in \mathcal{D}^j : \#(\{Q' \in \mathcal{D}^{j+1} : Q' \subseteq Q\}) > 1\}.$$

¿REFINAR ESCALAS IMPLICA REFINAR LA PARTICIÓN?

Pensemos en intervalos pequeños centrados en los enteros!!

La subfamilia $\tilde{\mathcal{D}}$ de una $\mathcal{D}$ en $\mathfrak{D}(\delta)$.

$$\tilde{\mathcal{D}}^j = \{Q \in \mathcal{D}^j : \#(\{Q^{'} \in \mathcal{D}^{j+1} : Q^{'} \subseteq Q\}) > 1\}.$$

Definimos $\tilde{\mathcal{D}} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{D}}^j$.

¿REFINAR ESCALAS IMPLICA REFINAR LA PARTICIÓN?

Pensemos en intervalos pequeños centrados en los enteros!!

La subfamilia $\tilde{\mathcal{D}}$ de una $\mathcal{D}$ en $\mathfrak{D}(\delta)$.

$$\tilde{\mathcal{D}}^j = \{Q \in \mathcal{D}^j : \#(\{Q' \in \mathcal{D}^{j+1} : Q' \subseteq Q\}) > 1\}.$$

Definimos $\tilde{\mathcal{D}} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{D}}^j$.

$\tilde{\mathcal{D}}$ es "casi" $\mathcal{D}$:

¿REFINAR ESCALAS IMPLICA REFINAR LA PARTICIÓN?

Pensemos en intervalos pequeños centrados en los enteros!!

La subfamilia $\tilde{\mathcal{D}}$ de una $\mathcal{D}$ en $\mathfrak{D}(\delta)$.

$$\tilde{\mathcal{D}}^j = \{Q \in \mathcal{D}^j : \#(\{Q^{'} \in \mathcal{D}^{j+1} : Q^{'} \subseteq Q\}) > 1\}.$$

Definimos $\tilde{\mathcal{D}} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{D}}^j$.

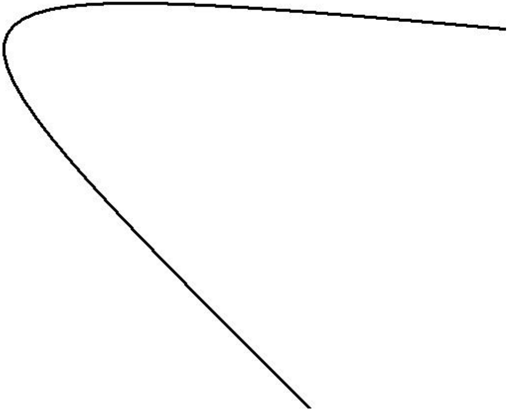
$\tilde{\mathcal{D}}$ **es "casi"** $\mathcal{D}$**:** $\quad \tilde{\mathcal{D}} \bigcup \{\{x\} : x \text{ **átomo**}\} = \mathcal{D}$

CUADRANTES

$$\mathbf{C}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\{\mathbf{Q}' \supseteq \mathbf{Q}\}} \mathbf{Q}'$$

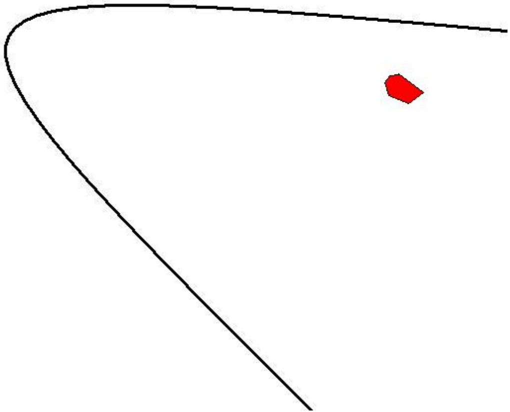
CUADRANTES

$$\mathbf{C}(\mathbf{Q}) \; = \bigcup_{\{\mathbf{Q}' \supseteq \mathbf{Q}\}} \mathbf{Q}'$$



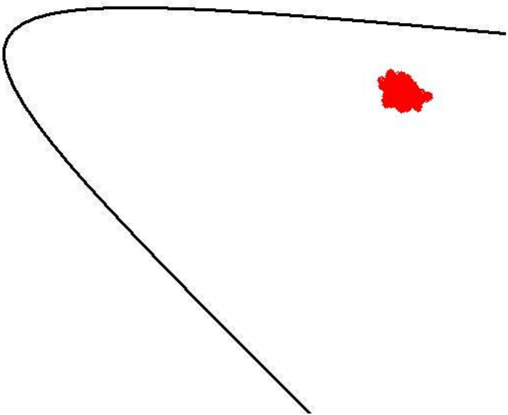
CUADRANTES

$$\mathbf{C}(\mathbf{Q}) \;=\; \bigcup_{\{\mathbf{Q}'\supseteq\mathbf{Q}\}} \mathbf{Q}'$$



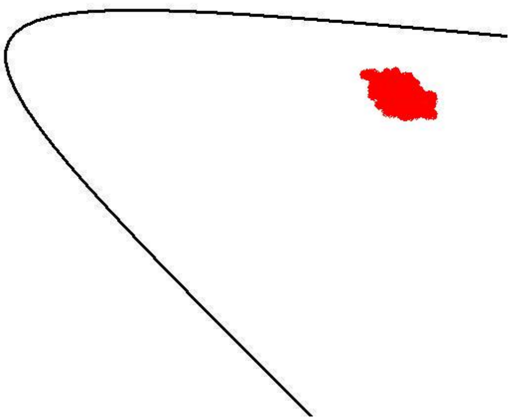
CUADRANTES

$$\mathbf{C}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\{\mathbf{Q}' \supseteq \mathbf{Q}\}} \mathbf{Q}'$$



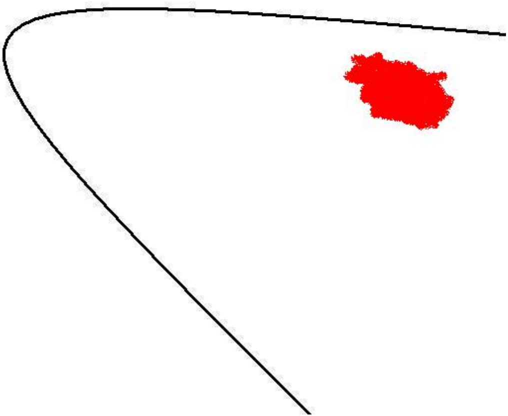
CUADRANTES

$$\mathbf{C}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\{\mathbf{Q}' \supseteq \mathbf{Q}\}} \mathbf{Q}'$$



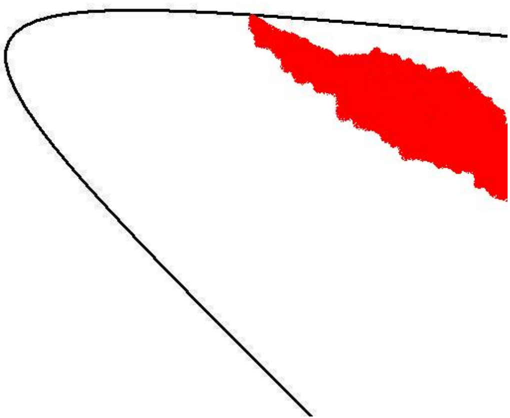
CUADRANTES

$$\mathbf{C}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\{\mathbf{Q}' \supseteq \mathbf{Q}\}} \mathbf{Q}'$$



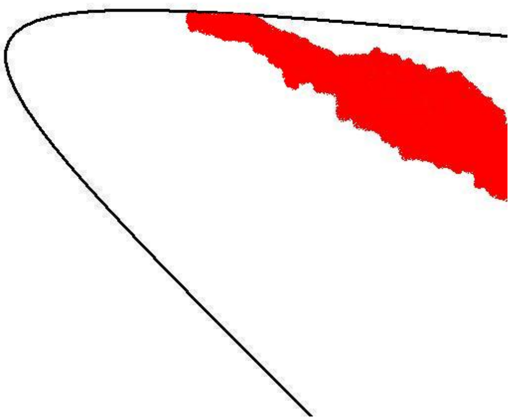
CUADRANTES

$$\mathbf{C}(\mathbf{Q}) \;=\; \bigcup_{\{\mathbf{Q}'\supseteq\mathbf{Q}\}} \mathbf{Q}'$$



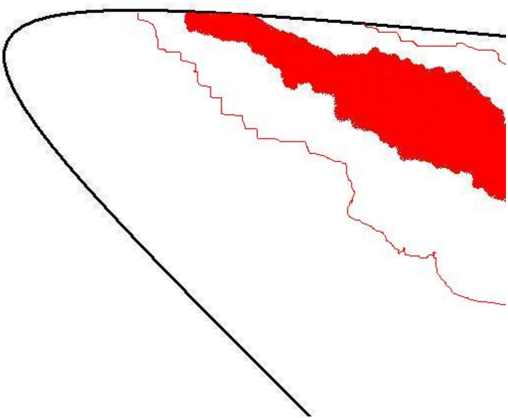
CUADRANTES

$$\mathbf{C}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\{\mathbf{Q}' \supseteq \mathbf{Q}\}} \mathbf{Q}'$$



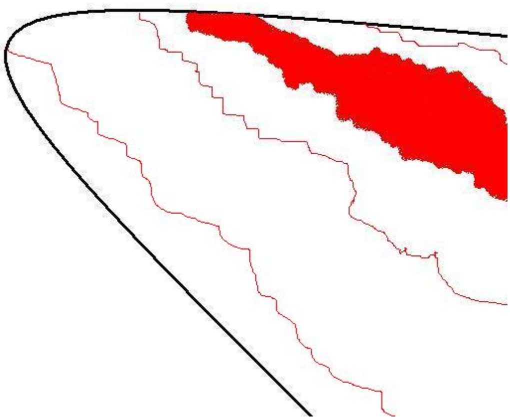
CUADRANTES

$$\mathbf{C}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\{\mathbf{Q}' \supseteq \mathbf{Q}\}} \mathbf{Q}'$$



CUADRANTES

$$\mathbf{C}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\{\mathbf{Q}' \supseteq \mathbf{Q}\}} \mathbf{Q}'$$



SISTEMAS TIPO HAAR ASOCIADOS A $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$

$\mathcal{H} = \{h\}$ **funciones simples**

SISTEMAS TIPO HAAR ASOCIADOS A $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$

$\mathcal{H} = \{h\}$ **funciones simples**

1. existe $Q = Q(h)$: $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subseteq Q$

SISTEMAS TIPO HAAR ASOCIADOS A $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$

$\mathcal{H} = \{h\}$ **funciones simples**

1. existe $Q = Q(h)$: $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subseteq Q$
2. cada cubo $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ soporta M_Q funciones $h \in \mathcal{H}$.

SISTEMAS TIPO HAAR ASOCIADOS A $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$

$\mathcal{H} = \{h\}$ **funciones simples**

1. existe $Q = Q(h)$: $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subseteq Q$
2. cada cubo $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ soporta M_Q funciones $h \in \mathcal{H}$.
3. $\int_X h d\mu = 0$.

SISTEMAS TIPO HAAR ASOCIADOS A $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$

$\mathcal{H} = \{h\}$ **funciones simples**

1. existe $Q = Q(h)$: $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subseteq Q$
2. cada cubo $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ soporta M_Q funciones $h \in \mathcal{H}$.
3. $\int_X h d\mu = 0$.
4. $\mathcal{H}$ es base ortonormal de $L^2(X, \mu)$.

EL ESPACIO $H_1^{\mathcal{D}}$ en E.T.H.: NUESTRA PRIMER ESTACIÓN

EL ESPACIO $H_1^{\mathcal{D}}$ en E.T.H.: NUESTRA PRIMER ESTACIÓN

q - átomos diádicos asociados a $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$ ($1 < q \leq \infty$)

EL ESPACIO $H_1^{\mathcal{D}}$ en E.T.H.: NUESTRA PRIMER ESTACIÓN

q - átomos diádicos asociados a $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$ ($1 < q \leq \infty$)

Existe $Q \in \mathcal{D}$:

1. **sop** $(a) \subset Q$
2. $\int_X a(x)d\mu(x) = 0$
3. $||a||_q \leq (\mu(Q))^{1/q-1}$ **($q < \infty$)**

   $||a||_\infty \leq (\mu(Q))^{-1}$ **($q = \infty$)**

EL ESPACIO $H_1^{\mathcal{D}}$ en E.T.H.: NUESTRA PRIMER ESTACIÓN

q - átomos diádicos asociados a $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$ **(**$1 < q \leq \infty$**)**

Existe $Q \in \mathcal{D}$**:**

1. **sop** $(a) \subset Q$
2. $\int_X a(x) d\mu(x) = 0$
3. $||a||_q \leq (\mu(Q))^{1/q-1}$ **(**$q < \infty$**)**

   $||a||_\infty \leq (\mu(Q))^{-1}$ **(**$q = \infty$**)**

Ya estaban definidos considerando bolas: Macías-Segovia

LA CADENA DE ESPACIOS $H^{\mathcal{D}}_{1,q}$ $(1 < q \leq \infty)$ EN E.T.H.

LA CADENA DE ESPACIOS $H^{\mathcal{D}}_{1,q}$ $(1 < q \leq \infty)$ EN E.T.H.

$$f \overset{L^1(X,\mu)}{=} \sum_n \lambda_n \, a_n \quad \textbf{con} \quad \sum_n |\lambda_n| < \infty \ \textbf{y} \ a_n \ q\textbf{-átomo diádico}$$

LA CADENA DE ESPACIOS $H^{\mathcal{D}}_{1,q}$ $(1 < q \leq \infty)$ EN E.T.H.

$$f \overset{L^1(X,\mu)}{=} \sum_n \lambda_n \, a_n \quad \textbf{con} \quad \sum_n |\lambda_n| < \infty \textbf{ y } a_n \; q\textbf{-átomo diádico}$$

$$|||f|||_{H^{\mathcal{D}}_{1,q}} = inf \left\{ \sum_n |\lambda_n| < \infty \right\}$$

LA CADENA DE ESPACIOS $H_{1,q}^{\mathcal{D}}$ $(1 < q \leq \infty)$ EN E.T.H.

$$f \overset{L^1(X,\mu)}{=} \sum_n \lambda_n \; a_n$$ **con** $\sum_n |\lambda_n| < \infty$ **y** a_n q**-átomo diádico**

$$|||f|||_{H_{1,q}^{\mathcal{D}}} = inf \left\{ \sum_n |\lambda_n| < \infty \right\}$$

$\left(H_{1,q}^{\mathcal{D}}, |||.|||_{H_{1,q}^{\mathcal{D}}} \right)$ **Banach para cada** $1 < q \leq \infty$

LA CADENA DE ESPACIOS $H^{\mathcal{D}}_{1,q}$ $(1 < q \leq \infty)$ EN E.T.H.

$$f \overset{L^1(X,\mu)}{=} \sum_n \lambda_n \, a_n \quad \textbf{con} \quad \sum_n |\lambda_n| < \infty \textbf{ y } a_n \; q\textbf{-átomo diádico}$$

$$|||f|||_{H^{\mathcal{D}}_{1,q}} = inf \left\{ \sum_n |\lambda_n| < \infty \right\}$$

$\left(H^{\mathcal{D}}_{1,q}, |||.|||_{H^{\mathcal{D}}_{1,q}} \right)$ **Banach para cada** $1 < q \leq \infty$

Hay un único $H^{\mathcal{D}}_{1}$ y todas las normas son equivalentes!!

¿Y SI PROBAMOS EL SISTEMA $\mathcal{H}$ en $H_1^{\mathcal{D}}$?

¿Y SI PROBAMOS EL SISTEMA $\mathcal{H}$ en $H_1^{\mathcal{D}}$?

¿Qué se sabe en el caso Euclídeo?

¿Y SI PROBAMOS EL SISTEMA $\mathcal{H}$ en $H_1^{\mathcal{D}}$?

¿Qué se sabe en el caso Euclídeo?

"...The Haar system is obviously an unconditional basis in $H_1^{\mathcal{D}}$ on $\mathbb{R}^n$..." (L. Carleson, 1980)!!

¿Y SI PROBAMOS EL SISTEMA $\mathcal{H}$ en $H_1^{\mathcal{D}}$?

¿Qué se sabe en el caso Euclídeo?

"...The Haar system is obviously an unconditional basis in $H_1^{\mathcal{D}}$ on $\mathbb{R}^n$..." (L. Carleson, 1980)!!

En nuestro caso obtuvimos

¿Y SI PROBAMOS EL SISTEMA $\mathcal{H}$ en $H_1^{\mathcal{D}}$?

¿Qué se sabe en el caso Euclídeo?

"...The Haar system is obviously an unconditional basis in $H_1^{\mathcal{D}}$ on $\mathbb{R}^n$..." (L. Carleson, 1980)!!

En nuestro caso obtuvimos

1. $\overline{span\mathcal{H}} = H_1^{\mathcal{D}}$

¿Y SI PROBAMOS EL SISTEMA $\mathcal{H}$ en $H_1^{\mathcal{D}}$?

¿Qué se sabe en el caso Euclídeo?

"...The Haar system is obviously an unconditional basis in $H_1^{\mathcal{D}}$ on $\mathbb{R}^n$..." (L. Carleson, 1980)!!

En nuestro caso obtuvimos

1. $\overline{span \mathcal{H}} = H_1^{\mathcal{D}}$
2. $\|S_F(f)\|_{H_1^{\mathcal{D}}} \leq C \|f\|_{H_1^{\mathcal{D}}}, \quad S_F(f) = \sum_{h \in F} < f, h > h$

¿Y SI PROBAMOS EL SISTEMA $\mathcal{H}$ en $H_1^{\mathcal{D}}$?

¿Qué se sabe en el caso Euclídeo?

"...The Haar system is obviously an unconditional basis in $H_1^{\mathcal{D}}$ on $\mathbb{R}^n$..." (L. Carleson, 1980)!!

En nuestro caso obtuvimos

1. $\overline{span\mathcal{H}} = H_1^{\mathcal{D}}$
2. $\|S_F(f)\|_{H_1^{\mathcal{D}}} \leq C\,\|f\|_{H_1^{\mathcal{D}}}, \quad S_F(f) = \sum_{h\in F} < f, h > h$

$\mathcal{H}$ es base incondicional de $H_1^{\mathcal{D}}$!!!

DESDE $H_1^{\mathcal{D}}$ LLEGAMOS A $L^p(X,\mu)$

DESDE $H_1^{\mathcal{D}}$ LLEGAMOS A $L^p(X,\mu)$

Teorema:T sublineal en H_1^{dy} $+L^q$ **con** $q>1$. **Si T es débil (**H_1^{dy}**,1) y débil (q,q) entonces T es fuerte (p,p)** $1<p<q$

DESDE $H_1^{\mathcal{D}}$ LLEGAMOS A $L^p(X,\mu)$

Teorema:T sublineal en $H_1^{dy} + L^q$ **con** $q > 1$**. Si T es débil (**H_1^{dy}**,1) y débil (q,q) entonces T es fuerte (p,p)** $1 < p < q$

La clave: tenemos descomposición de C-Z sobre los cubos diádicos

DESDE $H_1^{\mathcal{D}}$ LLEGAMOS A $L^p(X,\mu)$

Teorema:T sublineal en H_1^{dy} $+L^q$ con $q>1$. Si T es débil (H_1^{dy},1) y débil (q,q) entonces T es fuerte (p,p) $1<p<q$

La clave: tenemos descomposición de C-Z sobre los cubos diádicos

Corolario: El sistema de Haar es base incondicional de $L^p(X,\mu)$ en E.T.H. ($1<p<\infty$)

EL ESPACIO $BMO^{\mathcal{D}}$: PRÓXIMA PARADA (breve)

EL ESPACIO $BMO^{\mathcal{D}}$: PRÓXIMA PARADA (breve)

$1 \leq p < \infty$

$$||f||_{*,p,\mathcal{D}} \;=\; \sup_{Q \in D} \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \; d\mu(x) \right)^{1/p}$$

EL ESPACIO $BMO^{\mathcal{D}}$: PRÓXIMA PARADA (breve)

$1 \leq p < \infty$

$$||f||_{*,p,\mathcal{D}} \;=\; \sup_{Q \in D} \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \; d\mu(x) \right)^{1/p}$$

$$BMO_p^{\mathcal{D}} \;=\; \{ f : ||f||_{*,p,dy} < \infty \}$$

EL ESPACIO $BMO^{\mathcal{D}}$: PRÓXIMA PARADA (breve)

$1 \leq p < \infty$

$$||f||_{*,p,\mathcal{D}} \;=\; \sup_{Q \in D} \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \; d\mu(x) \right)^{1/p}$$

$$BMO_p^{\mathcal{D}} \;=\; \{f : ||f||_{*,p,dy} < \infty\}$$

Hay un único $BMO^{\mathcal{D}}$ y todas las normas son equivalentes!!

¿Y $\mathcal{H}$ EN $BMO^{\mathcal{D}}$?

¿Y $\mathcal{H}$ EN $BMO^{\mathcal{D}}$?

Teorema: $f \in BMO^{\mathcal{D}}$ **si y sólo si** $f \in L^2_{loc}$ **y** $\exists C > 0$ **tal que**

$$\sum_{h:sop(h)\subseteq Q} | < f, h > |^2 \leq C\mu(Q), \qquad \forall Q \in \tilde{\mathcal{D}}$$

LOS ESPACIOS LIPSCHITZ EN E.T.H.

LOS ESPACIOS LIPSCHITZ EN E.T.H.

Lip(α), $\alpha > 0$**:**

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| \;\leq\; \mathbf{C}\ \mathbf{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\alpha}$$

LOS ESPACIOS LIPSCHITZ EN E.T.H.

Lip(α), $\alpha > 0$**:**

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| \;\leq\; \mathbf{C}\ \mathbf{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\alpha}$$

$$\|f\|_{\alpha} = inf\{C\}$$

Haar se escribe con H, de Heroicas!

Haar se escribe con H, de Heroicas!

“Los coeficientes de Haar caracterizan las Lip(α)”

Haar se escribe con H, de Heroicas!

“Los coeficientes de Haar caracterizan las Lip(α)”

En $\mathbb{R}$**, si** $f \in Lip(\alpha), 0 < \alpha \leq 1$ **y** 2π**-periodica**
$\Rightarrow | < f(.), e^{ik\cdot} > | = |\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx| \leq \frac{C}{|k|^{\alpha}}$

Haar se escribe con H, de Heroicas!

"Los coeficientes de Haar caracterizan las Lip(α)"

En $\mathbb{R}$**, si** $f \in Lip(\alpha), 0 < \alpha \leq 1$ **y** 2π**-periodica**
$\Rightarrow | < f(.), e^{ik\cdot} > | = |\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx| \leq \frac{C}{|k|^\alpha}$

Si $f(x) = \chi_{[0,\pi]}$ **en** $[0, 2\pi]$**, entonces** $| < f(.), e^{ik\cdot} > | \leq \frac{C}{|k|^\alpha}$**.**
Pero $f \notin Lip(\alpha)$**!!**

Haar se escribe con H, de Heroicas!

“Los coeficientes de Haar caracterizan las Lip(α)”

En $\mathbb{R}$, si $f \in Lip(\alpha), 0 < \alpha \leq 1$ y 2π-periodica
$\Rightarrow | < f(.), e^{ik\cdot} > | = |\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx| \leq \frac{C}{|k|^\alpha}$

Si $f(x) = \chi_{[0,\pi]}$ en $[0, 2\pi]$, entonces $| < f(.), e^{ik\cdot} > | \leq \frac{C}{|k|^\alpha}$.
Pero $f \notin Lip(\alpha)$!!

Dado $0 < \delta < 1$, $\mathfrak{D}(\delta) = \{\mathcal{D}\}$ es la familia de todas los posibles sistemas diádicos y $\mathcal{H}(\delta) = \{\mathcal{H}\}$ es la familia de todos los posibles sistemas de tipo Haar.

$f \in Lip(\alpha) \Leftrightarrow f \in L^1_{loc}$ **y** $| < f, h > | \leq C(A\delta^j)^\alpha \mu(Q(h))^{1/2}$ **para toda** $h \in \mathcal{H}$ **y todo** $\mathcal{H} \in \mathcal{H}(\delta)$ **(**$Q(h) \in \tilde{\mathcal{D}}^j$ **el soporte de** h**)**

$f \in Lip(\alpha) \Leftrightarrow f \in L^1_{loc}$ **y** $| < f, h > | \leq C(A\delta^j)^\alpha \mu(Q(h))^{1/2}$ **para toda** $h \in \mathcal{H}$ **y todo** $\mathcal{H} \in \mathcal{H}(\delta)$ **(**$Q(h) \in \tilde{\mathcal{D}}^j$ **el soporte de** h**)**

Lemas:

1. **Dados** x, y **en** X**, existen** $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta), Q \in \tilde{\mathcal{D}}^{j_0}, Q_x \ni x$**,** $Q_y \ni y$ **en** $\mathcal{D}^{j_0+1}$ **tal que** $Q_x \cup Q_y \subseteq Q$ **y** $\frac{\delta^{j_0+1}}{2K} < d(x, y)$

$f \in Lip(\alpha) \Leftrightarrow f \in L^1_{loc}$ **y** $| < f, h > | \leq C(A\delta^j)^\alpha \mu(Q(h))^{1/2}$ **para toda** $h \in \mathcal{H}$ **y todo** $\mathcal{H} \in \mathcal{H}(\delta)$ **(**$Q(h) \in \tilde{\mathcal{D}}^j$ **el soporte de** h**)**

Lemas:

1. **Dados** x, y **en** X**, existen** $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta), Q \in \tilde{\mathcal{D}}^{j_0}, Q_x \ni x$**,** $Q_y \ni y$ **en** $\mathcal{D}^{j_0+1}$ **tal que** $Q_x \cup Q_y \subseteq Q$ **y** $\frac{\delta^{j_0+1}}{2K} < d(x, y)$

2. **Si** $\hat{Q}$ **es padre de** Q**, existe** h **"soportada" en** $\hat{Q}$ **tal que** $| < f, h > | = C_{Q,\hat{Q}}|f_Q - f_{\hat{Q}\setminus Q}| = \tilde{C}_{Q,\hat{Q}}|f_Q - f_{\hat{Q}}|$

$f \in Lip(\alpha) \Leftrightarrow f \in L^1_{loc}$ **y** $| < f, h > | \leq C(A\delta^j)^\alpha \mu(Q(h))^{1/2}$ **para toda** $h \in \mathcal{H}$ **y todo** $\mathcal{H} \in \mathcal{H}(\delta)$ **(**$Q(h) \in \tilde{\mathcal{D}}^j$ **el soporte de** h**)**

Lemas:

1. **Dados** x, y **en** X**, existen** $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$, $Q \in \tilde{\mathcal{D}}^{j_0}$, $Q_x \ni x$**,** $Q_y \ni y$ **en** $\mathcal{D}^{j_0+1}$ **tal que** $Q_x \cup Q_y \subseteq Q$ **y** $\frac{\delta^{j_0+1}}{2K} < d(x, y)$

2. **Si** $\hat{Q}$ **es padre de** Q**, existe** h **"soportada" en** $\hat{Q}$ **tal que** $| < f, h > | = C_{Q,\hat{Q}} |f_Q - f_{\hat{Q} \setminus Q}| = \tilde{C}_{Q,\hat{Q}} |f_Q - f_{\hat{Q}}|$

3. **Si** $\hat{Q}$ **es padre de** Q_1 **y** Q_2**, existe** h **"soportada" en** $\hat{Q}$**:** $| < f, h > | = C_{Q_1,Q_2,\hat{Q}} |f_{Q_2} - f_{\hat{Q} \setminus (Q_1 \cup Q_2)}| = \tilde{C}_{Q_1,Q_2,\hat{Q}} |f_{Q_2} - f_{\hat{Q} \setminus Q_1}|$

GRACIAS!!

CONTINUARÁ....