



Acotación de los operadores oscilación y ρ -variación asociados a familias monoparamétricas en algunos semigrupos

Raquel Crescimbeni

Universidad Nacional del Comahue-Neuquén

Santa Fe 2010



Contenidos

1 Trabajos

2 Preliminares

Notación

Generalidades

Antecedentes

Objetivo

3 Hermite

Operadores

Resultados

Esquema de demostración Teorema 1

Esquema de demostracion Teorema 2

Acotación en el extremo

4 Laguerre

Operadores

Resultados

Esquema de prueba

- ① **"The ρ -variation as an operator between maximal operators and singular integrals"**, R.C - T. Menarguez - R. Macías - J. L. Torrea - B. Viviani. Journal of Evolution Equation 9 (2009),81-102.
- ② **"Boundedness with weight of the oscillations and variation for the singular integral operator in the real line"**, R.C- F. Martín Reyes - A. de la Torre - J. L. Torrea. Aceptado en Acta Mathematica Sinica.
- ③ **"The ρ -variation of the heat semigroup in the Hermite setting. Behaviour in L^∞ "**, J. Betancor- R. C. - J. L. Torrea. Enviado a publicar.
- ④ **" Oscillation and variation for the Laguerre heat and Poisson semigroup and Riesz transforms"**, J. Betancor- R. C. - J. L. Torrea. Enviado a publicar.

- ① **"The ρ -variation as an operator between maximal operators and singular integrals", R.C - T. Menarguez - R. Macías - J. L. Torrea - B. Viviani. Journal of Evolution Equation 9 (2009),81-102.**
- ② **"Boundedness with weight of the oscillations and variation for the singular integral operator in the real line", R.C- F. Martín Reyes - A. de la Torre - J. L. Torrea. Aceptado en Acta Mathematica Sinica.**
- ③ **"The ρ -variation of the heat semigroup in the Hermite setting. Behaviour in L^∞ ", J. Betancor- R. C. - J. L. Torrea. Enviado a publicar.**
- ④ **" Oscillation and variation for the Laguerre heat and Poisson semigroup and Riesz transforms", J. Betancor- R. C. - J. L. Torrea. Enviado a publicar.**



Notación

Sea $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ una familia de operadores.

Definición

El operador T_t se define como

$$T_t f(x) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x)\right) = \exp\left(\frac{t}{2} \left(\frac{d}{dx}\right)^2\right) f(x)$$

El operador T_t se define como

$$T_t f(x) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x)\right) = \exp\left(\frac{t}{2} \left(\frac{d}{dx}\right)^2\right) f(x)$$



Sea $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ una familia de operadores.

$$S_2 f(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |T_{t_{i+1}} f(x) - T_{t_i} f(x)|^2 \right)^{1/2} \quad \text{Función cuadrado}$$

Definición

Sea $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ una familia de operadores. Sea f una función. Se define la función cuadrado de f como:

$$S_2 f(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |T_{t_{i+1}} f(x) - T_{t_i} f(x)|^2 \right)^{1/2}$$

donde t_i es una sucesión de números reales que tiende a infinito.



Sea $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ una familia de operadores.

Definición

- ❶ El operador **ρ -variación** se define como

$$\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})f(x) = \sup_{t_i \searrow 0} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |T_{t_i} f(x) - T_{t_{i+1}} f(x)|^\rho \right)^{1/\rho} = \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_\rho}, \quad \rho > 2,$$

- ❷ El operador **oscilación** se define como

$$\mathcal{O}(\mathcal{T})f(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{t_{i+1} < \delta_i \leq t_i} |T_{t_{i+1}} f(x) - T_{\delta_i} f(x)|^2 \right)^{1/2} = \|T_t f(x)\|_{\mathcal{O}}.$$



Sea $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ una familia de operadores.

Definición

- ❶ El operador **ρ -variación** se define como

$$\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})f(x) = \sup_{t_i \searrow 0} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |T_{t_i} f(x) - T_{t_{i+1}} f(x)|^\rho \right)^{1/\rho} = \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_\rho}, \quad \rho > 2,$$

donde el supremo es tomado sobre todas las sucesiones t_i que decrecen a cero.

- ❷ El operador **oscilación** se define como

$$\mathcal{O}(\mathcal{T})f(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{t_{i+1} < \delta_i \leq t_i} |T_{t_{i+1}} f(x) - T_{\delta_i} f(x)|^2 \right)^{1/2} = \|T_t f(x)\|_{\mathcal{O}}.$$



Sea $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ una familia de operadores.

Definición

- ❶ El operador **ρ -variación** se define como

$$\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})f(x) = \sup_{t_i \searrow 0} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |T_{t_i} f(x) - T_{t_{i+1}} f(x)|^\rho \right)^{1/\rho} = \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_\rho}, \quad \rho > 2,$$

donde el supremo es tomado sobre todas las sucesiones t_i que decrecen a cero.

- ❷ El operador **oscilación** se define como

$$\mathcal{O}(\mathcal{T})f(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{t_{i+1} < \delta_i \leq t_i} |T_{t_{i+1}} f(x) - T_{\delta_i} f(x)|^2 \right)^{1/2} = \|T_t f(x)\|_{\mathcal{O}}.$$



Sea $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ una familia de operadores.

Definición

- ❶ El operador **ρ -variación** se define como

$$\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})f(x) = \sup_{t_i \searrow 0} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |T_{t_i} f(x) - T_{t_{i+1}} f(x)|^\rho \right)^{1/\rho} = \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_\rho}, \quad \rho > 2,$$

donde el supremo es tomado sobre todas las sucesiones t_i que decrecen a cero.

- ❷ El operador **oscilación** se define como

$$\mathcal{O}(\mathcal{T})f(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{t_{i+1} < \delta_i \leq t_i} |T_{t_{i+1}} f(x) - T_{\delta_i} f(x)|^2 \right)^{1/2} = \|T_t f(x)\|_{\mathcal{O}}.$$

para t_i una sucesión fija decreciendo a cero.



Generalidades

- 1 Son seminormas sobre la familia T_t .
- 2 El operador $\mathcal{V}_\rho$ está bien definido.
- 3 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_\rho} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}, \quad \rho > 2$
- 4 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{O}} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}$
- 5 Es posible definir operadores T_t que converjan para toda $f \in L^p$ y sin embargo los operadores oscilación y variación ser infinitos.
- 6 Finitud de la ρ -variación en un x implica resultados de convergencia en ese punto.
- 7 Estos operadores aportar otra información sobre la convergencia de los operadores, como velocidad de convergencia y un análisis de la amplitud de los saltos.
- 8 Consideraremos, para la ρ -variación, sólo $\rho > 2$.



- 1 Son seminormas sobre la familia T_t .
- 2 El operador $\mathcal{V}_\rho$ está bien definido.
- 3 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_\rho} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}, \quad \rho > 2$
- 4 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{O}} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}$
- 5 Es posible definir operadores T_t que converjan para toda $f \in L^p$ y sin embargo los operadores oscilación y variación ser infinitos.
- 6 Finitud de la ρ -variación en un x implica resultados de convergencia en ese punto.
- 7 Estos operadores aportar otra información sobre la convergencia de los operadores, como velocidad de convergencia y un análisis de la amplitud de los saltos.
- 8 Consideraremos, para la ρ -variación, sólo $\rho > 2$.



- 1 Son seminormas sobre la familia T_t .
- 2 El operador $\mathcal{V}_\rho$ está bien definido.
- 3 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_\rho} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}, \quad \rho > 2$
- 4 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{O}} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}$
- 5 Es posible definir operadores T_t que converjan para toda $f \in L^p$ y sin embargo los operadores oscilación y variación ser infinitos.
- 6 Finitud de la ρ -variación en un x implica resultados de convergencia en ese punto.
- 7 Estos operadores aportar otra información sobre la convergencia de los operadores, como velocidad de convergencia y un análisis de la amplitud de los saltos.
- 8 Consideraremos, para la ρ -variación, sólo $\rho > 2$.



Generalidades

- 1 Son seminormas sobre la familia T_t .
- 2 El operador $\mathcal{V}_\rho$ está bien definido.
- 3 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_\rho} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}, \quad \rho > 2$
- 4 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{O}} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}$
- 5 Es posible definir operadores T_t que converjan para toda $f \in L^p$ y sin embargo los operadores oscilación y variación ser infinitos.
- 6 Finitud de la ρ -variación en un x implica resultados de convergencia en ese punto.
- 7 Estos operadores aportar otra información sobre la convergencia de los operadores, como velocidad de convergencia y un análisis de la amplitud de los saltos.
- 8 Consideraremos, para la ρ -variación, sólo $\rho > 2$.



Generalidades

- 1 Son seminormas sobre la familia T_t .
- 2 El operador $\mathcal{V}_\rho$ está bien definido.
- 3 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_\rho} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}, \quad \rho > 2$
- 4 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{O}} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}$
- 5 Es posible definir operadores T_t que converjan para toda $f \in L^p$ y sin embargo los operadores oscilación y variación ser infinitos.
- 6 Finitud de la ρ -variación en un x implica resultados de convergencia en ese punto.
- 7 Estos operadores aportar otra información sobre la convergencia de los operadores, como velocidad de convergencia y un análisis de la amplitud de los saltos.
- 8 Consideraremos, para la ρ -variación, sólo $\rho > 2$.



Generalidades

- 1 Son seminormas sobre la familia T_t .
- 2 El operador $\mathcal{V}_\rho$ está bien definido.
- 3 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_\rho} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}, \quad \rho > 2$
- 4 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{O}} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}$
- 5 Es posible definir operadores T_t que converjan para toda $f \in L^p$ y sin embargo los operadores oscilación y variación ser infinitos.
- 6 Finitud de la ρ -variación en un x implica resultados de convergencia en ese punto.
- 7 Estos operadores aportar otra información sobre la convergencia de los operadores, como velocidad de convergencia y un análisis de la amplitud de los saltos.
- 8 Consideraremos, para la ρ -variación, sólo $\rho > 2$.



Generalidades

- 1 Son seminormas sobre la familia T_t .
- 2 El operador $\mathcal{V}_\rho$ está bien definido.
- 3 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_\rho} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}, \quad \rho > 2$
- 4 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{O}} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}$
- 5 Es posible definir operadores T_t que converjan para toda $f \in L^p$ y sin embargo los operadores oscilación y variación ser infinitos.
- 6 Finitud de la ρ -variación en un x implica resultados de convergencia en ese punto.
- 7 Estos operadores aportar otra información sobre la convergencia de los operadores, como velocidad de convergencia y un análisis de la amplitud de los saltos.
- 8 Consideraremos, para la ρ -variación, sólo $\rho > 2$.



Generalidades

- 1 Son seminormas sobre la familia T_t .
- 2 El operador $\mathcal{V}_\rho$ está bien definido.
- 3 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_\rho} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}, \quad \rho > 2$
- 4 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{O}} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}$
- 5 Es posible definir operadores T_t que converjan para toda $f \in L^p$ y sin embargo los operadores oscilación y variación ser infinitos.
- 6 Finitud de la ρ -variación en un x implica resultados de convergencia en ese punto.
- 7 Estos operadores aportar otra información sobre la convergencia de los operadores, como velocidad de convergencia y un análisis de la amplitud de los saltos.
- 8 Consideraremos, para la ρ -variación, sólo $\rho > 2$.



Generalidades

- 1 Son seminormas sobre la familia T_t .
- 2 El operador $\mathcal{V}_\rho$ está bien definido.
- 3 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_\rho} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}, \quad \rho > 2$
- 4 $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{O}} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}$
- 5 Es posible definir operadores T_t que converjan para toda $f \in L^p$ y sin embargo los operadores oscilación y variación ser infinitos.
- 6 Finitud de la ρ -variación en un x implica resultados de convergencia en ese punto.
- 7 Estos operadores aportar otra información sobre la convergencia de los operadores, como velocidad de convergencia y un análisis de la amplitud de los saltos.
- 8 Consideraremos, para la ρ -variación, sólo $\rho > 2$.

○
○
○○○

○
○
○○○
○○○
○○○○

○
○
○○○○○

Antecedentes

- 1 Gaposhkin (1981) primero en considerar acotaciones (en L^2) del operador oscilación para usuales promedios ergódicos (sucesiones lacunary).
- 2 Bourgain (1988) considera maximales ergódicas más generales (sucesiones lacunary).
- 3 White (1991) usando método de Bourgain mejora resultados en L^2 .
- 4 Bourgain (1989) primero en considerar el operador ρ -variación en el contexto de martingalas (en L^2). Derivando resultados para el operador de Poisson $P_t f(x)$ y para el operador $f * \chi_t$ con $\chi = \chi_{[0,1]}$.
- 5 Burkholder (1973) obtienen resultados para la función cuadrado asociada a martingalas.
- 6 R. Jones-Kaufman-Rosenblatt-Wierdl (1998) prueban acotaciones (p, p) fuerte, débil $(1, 1)$ y $L^\infty - BMO$ para promedios ergódicos y acotaciones (p, p) fuerte y débil $(1, 1)$ para martingalas usando las técnicas de Burkholder.

○
○
○○○

○
○
○○○
○○○
○○○○

○
○
○○○○○

Antecedentes

- ➊ Gaposhkin (1981) primero en considerar acotaciones (en L^2) del operador oscilación para usuales promedios ergódicos (sucesiones lacunary).
- ➋ Bourgain (1988) considera maximales ergódicas más generales (sucesiones lacunary).
- ➌ White (1991) usando método de Bourgain mejora resultados en L^2 .
- ➍ Bourgain (1989) primero en considerar el operador ρ -variación en el contexto de martingalas (en L^2). Derivando resultados para el operador de Poisson $P_t f(x)$ y para el operador $f * \chi_t$ con $\chi = \chi_{[0,1]}$.
- ➎ Burkholder (1973) obtienen resultados para la función cuadrado asociada a martingalas.
- ➏ R. Jones-Kaufman-Rosenblatt-Wierdl (1998) prueban acotaciones (p, p) fuerte, débil $(1, 1)$ y $L^\infty - BMO$ para promedios ergódicos y acotaciones (p, p) fuerte y débil $(1, 1)$ para martingalas usando las técnicas de Burkholder.

○
○
○○○

○
○
○○○
○○○
○○○○

○
○
○○○○○

Antecedentes

- 1 Gaposhkin (1981) primero en considerar acotaciones (en L^2) del operador oscilación para usuales promedios ergódicos (sucesiones lacunary).
- 2 Bourgain (1988) considera maximales ergódicas más generales (sucesiones lacunary).
- 3 White (1991) usando método de Bourgain mejora resultados en L^2 .
- 4 Bourgain (1989) primero en considerar el operador ρ -variación en el contexto de martingalas (en L^2). Derivando resultados para el operador de Poisson $P_t f(x)$ y para el operador $f * \chi_t$ con $\chi = \chi_{[0,1]}$.
- 5 Burkholder (1973) obtienen resultados para la función cuadrado asociada a martingalas.
- 6 R. Jones-Kaufman-Rosenblatt-Wierdl (1998) prueban acotaciones (p, p) fuerte, débil $(1, 1)$ y $L^\infty - BMO$ para promedios ergódicos y acotaciones (p, p) fuerte y débil $(1, 1)$ para martingalas usando las técnicas de Burkholder.



- 1 Gaposhkin (1981) primero en considerar acotaciones (en L^2) del operador oscilación para usuales promedios ergódicos (sucesiones lacunary).
- 2 Bourgain (1988) considera maximales ergódicas más generales (sucesiones lacunary).
- 3 White (1991) usando método de Bourgain mejora resultados en L^2 .
- 4 Bourgain (1989) primero en considerar el operador ρ -variación en el contexto de martingalas (en L^2). Derivando resultados para el operador de Poisson $P_t f(x)$ y para el operador $f * \chi_t$ con $\chi = \chi_{[0,1]}$.
- 5 Burkholder (1973) obtienen resultados para la función cuadrado asociada a martingalas.
- 6 R. Jones-Kaufman-Rosenblatt-Wierdl (1998) prueban acotaciones (p, p) fuerte, débil $(1, 1)$ y $L^\infty - BMO$ para promedios ergódicos y acotaciones (p, p) fuerte y débil $(1, 1)$ para martingalas usando las técnicas de Burkholder.



- 1 Gaposhkin (1981) primero en considerar acotaciones (en L^2) del operador oscilación para usuales promedios ergódicos (sucesiones lacunary).
- 2 Bourgain (1988) considera maximales ergódicas más generales (sucesiones lacunary).
- 3 White (1991) usando método de Bourgain mejora resultados en L^2 .
- 4 Bourgain (1989) primero en considerar el operador ρ -variación en el contexto de martingalas (en L^2). Derivando resultados para el operador de Poisson $P_t f(x)$ y para el operador $f * \chi_t$ con $\chi = \chi_{[0,1]}$.
- 5 Burkholder (1973) obtienen resultados para la función cuadrado asociada a martingalas.
- 6 R. Jones-Kaufman-Rosenblatt-Wierdl (1998) prueban acotaciones (p, p) fuerte, débil $(1, 1)$ y $L^\infty - BMO$ para promedios ergódicos y acotaciones (p, p) fuerte y débil $(1, 1)$ para martingalas usando las técnicas de Burkholder.



- 1 Gaposhkin (1981) primero en considerar acotaciones (en L^2) del operador oscilación para usuales promedios ergódicos (sucesiones lacunary).
- 2 Bourgain (1988) considera maximales ergódicas más generales (sucesiones lacunary).
- 3 White (1991) usando método de Bourgain mejora resultados en L^2 .
- 4 Bourgain (1989) primero en considerar el operador ρ -variación en el contexto de martingalas (en L^2). Derivando resultados para el operador de Poisson $P_t f(x)$ y para el operador $f * \chi_t$ con $\chi = \chi_{[0,1]}$.
- 5 Burkholder (1973) obtienen resultados para la función cuadrado asociada a martingalas.
- 6 R. Jones-Kaufman-Rosenblatt-Wierdl (1998) prueban acotaciones (p, p) fuerte, débil $(1, 1)$ y $L^\infty - BMO$ para promedios ergódicos y acotaciones (p, p) fuerte y débil $(1, 1)$ para martingalas usando las técnicas de Burkholder.



- 1 Bourgain-Burkholder establecen que la ρ -variación en el caso de martingalas tiene mal comportamiento para $\rho = 2$
- 2 Akcoglu-Jones-P. Schwartz (1998) analizan con múltiples ejemplos, que en el caso de operadores ergódicos, martingalas y de diferenciación la ρ -variación para $\rho \leq 2$ tiene un mal comportamiento.
- 3 Campbell-Jones-Reinhold-Wierdl (2000) obtienen resultados de acotaciones débiles y fuertes de ambos operadores asociados a la transformada de Hilbert y en (2002) para integrales singulares en $\mathbb{R}^n$
- 4 Jones-Reinhold (2001) obtienen la acotación fuerte (p, p) $1 < p < \infty$ de ambos operadores asociados a semigrupos de difusión simétricos.
- 5 Gillespie-Torrea (2004) han obtenido algunos resultados (p, p) pesados $1 < p < \infty$ para las truncaciones de la transformada de Riesz (independiente de la dimensión)



- 1 Bourgain-Burkholder establecen que la ρ -variación en el caso de martingalas tiene mal comportamiento para $\rho = 2$
- 2 Akcoglu-Jones-P. Schwartz (1998) analizan con múltiples ejemplos, que en el caso de operadores ergódicos, martingalas y de diferenciación la ρ -variación para $\rho \leq 2$ tiene un mal comportamiento.
- 3 Campbell-Jones-Reinhold-Wierdl (2000) obtienen resultados de acotaciones débiles y fuertes de ambos operadores asociados a la transformada de Hilbert y en (2002) para integrales singulares en $\mathbb{R}^n$
- 4 Jones-Reinhold (2001) obtienen la acotación fuerte (p, p) $1 < p < \infty$ de ambos operadores asociados a semigrupos de difusión simétricos.
- 5 Gillespie-Torrea (2004) han obtenido algunos resultados (p, p) pesados $1 < p < \infty$ para las truncaciones de la transformada de Riesz (independiente de la dimensión)



Antecedentes

- 1 Bourgain-Burkholder establecen que la ρ -variación en el caso de martingalas tiene mal comportamiento para $\rho = 2$
- 2 Akcoglu-Jones-P. Schwartz (1998) analizan con múltiples ejemplos, que en el caso de operadores ergódicos, martingalas y de diferenciación la ρ -variación para $\rho \leq 2$ tiene un mal comportamiento.
- 3 Campbell-Jones-Reinhold-Wierdl (2000) obtienen resultados de acotaciones débiles y fuertes de ambos operadores asociados a la transformada de Hilbert y en (2002) para integrales singulares en $\mathbb{R}^n$
- 4 Jones-Reinhold (2001) obtienen la acotación fuerte (p, p) $1 < p < \infty$ de ambos operadores asociados a semigrupos de difusión simétricos.
- 5 Gillespie-Torrea (2004) han obtenido algunos resultados (p, p) pesados $1 < p < \infty$ para las truncaciones de la transformada de Riesz (independiente de la dimensión)



- 1 Bourgain-Burkholder establecen que la ρ -variación en el caso de martingalas tiene mal comportamiento para $\rho = 2$
- 2 Akcoglu-Jones-P. Schwartz (1998) analizan con múltiples ejemplos, que en el caso de operadores ergódicos, martingalas y de diferenciación la ρ -variación para $\rho \leq 2$ tiene un mal comportamiento.
- 3 Campbell-Jones-Reinhold-Wierdl (2000) obtienen resultados de acotaciones débiles y fuertes de ambos operadores asociados a la transformada de Hilbert y en (2002) para integrales singulares en $\mathbb{R}^n$
- 4 Jones-Reinhold (2001) obtienen la acotación fuerte (p, p) $1 < p < \infty$ de ambos operadores asociados a semigrupos de difusión simétricos.
- 5 Gillespie-Torrea (2004) han obtenido algunos resultados (p, p) pesados $1 < p < \infty$ para las truncaciones de la transformada de Riesz (independiente de la dimensión)



- 1 Bourgain-Burkholder establecen que la ρ -variación en el caso de martingalas tiene mal comportamiento para $\rho = 2$
- 2 Akcoglu-Jones-P. Schwartz (1998) analizan con múltiples ejemplos, que en el caso de operadores ergódicos, martingalas y de diferenciación la ρ -variación para $\rho \leq 2$ tiene un mal comportamiento.
- 3 Campbell-Jones-Reinhold-Wierdl (2000) obtienen resultados de acotaciones débiles y fuertes de ambos operadores asociados a la transformada de Hilbert y en (2002) para integrales singulares en $\mathbb{R}^n$
- 4 Jones-Reinhold (2001) obtienen la acotación fuerte (p, p) $1 < p < \infty$ de ambos operadores asociados a semigrupos de difusión simétricos.
- 5 Gillespie-Torrea (2004) han obtenido algunos resultados (p, p) pesados $1 < p < \infty$ para las truncaciones de la transformada de Riesz (independiente de la dimensión)

Objetivo

Obtener resultados de acotación con pesos y en el rango $1 \leq p < \infty$ para estos operadores cuando la familia $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es:

- ① Semigrupo del calor y el semigrupo de Poisson asociado al operador de Hermite $\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$.
- ② Truncaciones de la transformada de Riesz asociada al operador de Hermite en $\mathbb{R}$.
- ③ Resultados en el extremo.
- ④ Resultados para semigrupos asociados al operador de Laguerre $L_\alpha = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(\alpha^2 - \frac{1}{4} \right) \right)$, $\alpha > -1$.

Objetivo

Obtener resultados de acotación con pesos y en el rango $1 \leq p < \infty$ para estos operadores cuando la familia $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es:

- 1 Semigrupo del calor y el semigrupo de Poisson asociado al operador de Hermite $\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$.
- 2 Truncaciones de la transformada de Riesz asociada al operador de Hermite en $\mathbb{R}$.
- 3 Resultados en el extremo.
- 4 Resultados para semigrupos asociados al operador de Laguerre $L_\alpha = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(\alpha^2 - \frac{1}{4} \right) \right)$, $\alpha > -1$.

Objetivo

Obtener resultados de acotación con pesos y en el rango $1 \leq p < \infty$ para estos operadores cuando la familia $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es:

- 1 Semigrupo del calor y el semigrupo de Poisson asociado al operador de Hermite $\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$.
- 2 Truncaciones de la transformada de Riesz asociada al operador de Hermite en $\mathbb{R}$.
- 3 Resultados en el extremo.
- 4 Resultados para semigrupos asociados al operador de Laguerre $L_\alpha = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(\alpha^2 - \frac{1}{4} \right) \right)$, $\alpha > -1$.

Objetivo

Obtener resultados de acotación con pesos y en el rango $1 \leq p < \infty$ para estos operadores cuando la familia $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es:

- ❶ Semigrupo del calor y el semigrupo de Poisson asociado al operador de Hermite $\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$.
- ❷ Truncaciones de la transformada de Riesz asociada al operador de Hermite en $\mathbb{R}$.
- ❸ Resultados en el extremo.
- ❹ Resultados para semigrupos asociados al operador de Laguerre $L_\alpha = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(\alpha^2 - \frac{1}{4} \right) \right)$, $\alpha > -1$.

Objetivo

Obtener resultados de acotación con pesos y en el rango $1 \leq p < \infty$ para estos operadores cuando la familia $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es:

- ❶ Semigrupo del calor y el semigrupo de Poisson asociado al operador de Hermite $\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$.
- ❷ Truncaciones de la transformada de Riesz asociada al operador de Hermite en $\mathbb{R}$.
- ❸ Resultados en el extremo.
- ❹ Resultados para semigrupos asociados al operador de Laguerre $L_\alpha = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(\alpha^2 - \frac{1}{4} \right) \right)$, $\alpha > -1$.

Oscilación como una seminorma a valores vectoriales

Definimos la norma mixta E_p

$$\|h\|_{E_p} \equiv \left(\sum_i \left(\sup_s |h(s, i)| \right)^p \right)^{1/p} \quad (s, i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$$

$$U(\mathcal{T})f(x) = \{T_{t_{i+1}} f(x) - T_s f(x)\} \chi_{J_i}(s), \quad J_i = (t_{i+1}, t_i]$$

$$\mathcal{O}(\mathcal{T})f(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{t_{i+1} < s \leq t_i} |T_{t_{i+1}} f(x) - T_s f(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{O}(\mathcal{T})f(x) = \left\| \{T_{t_{i+1}} f(x) - T_s f(x)\} \chi_{J_i}(s) \right\|_{E_2} = \|U(\mathcal{T})f(x)\|_{E_2}$$

Objetivo

 ρ -variación como una seminorma a valores vectoriales

$$\Theta = \{\epsilon : \epsilon = \{\epsilon_i\}, \epsilon_i \in \mathbb{R}, \epsilon_i \searrow 0\}.$$

Definimos la norma mixta F_ρ como

$$\|g\|_{F_\rho} \equiv \sup_{\epsilon} \left(\sum_i |g(i, \epsilon)|^\rho \right)^{1/\rho} \quad (i, \epsilon) \in \mathbb{N} \times \Theta$$

$$V(\mathcal{T})f(x) = \{T_{\epsilon_{i+1}}f(x) - T_{\epsilon_i}f(x)\}_{\epsilon \in \Theta}$$

$$\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})f(x) = \sup_{\epsilon_i \searrow 0} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |T_{\epsilon_i}f(x) - T_{\epsilon_{i+1}}f(x)|^\rho \right)^{1/\rho}, \quad \rho > 2$$

Por lo tanto

$$\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})f(x) = \|V(\mathcal{T})f(x)\|_{F_\rho}$$



El operador diferencial de Hermite u oscilador armónico

$$\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$$



El operador diferencial de Hermite u oscilador armónico

$$\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$$

Semigrupo de difusión con generador infinitesimal $-\mathcal{L}$ es

$$T_t = e^{-t\mathcal{L}}$$



El operador diferencial de Hermite u oscilador armónico

$$\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$$

Semigrupo de difusión con generador infinitesimal $-\mathcal{L}$ es

$$T_t = e^{-t\mathcal{L}}$$

Semigrupo de Poisson es

$$P_t = e^{-t\sqrt{-A}}$$



El operador diferencial de Hermite u oscilador armónico

$$\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$$

Semigrupo de difusión con generador infinitesimal $-\mathcal{L}$ es

$$T_t = e^{-t\mathcal{L}}$$

Semigrupo de Poisson es

$$P_t = e^{-t\sqrt{-\mathcal{A}}}$$

Se define vía la fórmula de subordinación como ($T_s = e^{-s\mathcal{L}}$)

$$\begin{aligned} P_t f(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty t e^{-t^2/4s} T_s f(x) s^{-3/2} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} T_{t^2/4u} f(x) du. \end{aligned}$$



El operador diferencial de Hermite u oscilador armónico

$$\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$$

Semigrupo de difusión con generador infinitesimal $-\mathcal{L}$ es

$$T_t = e^{-t\mathcal{L}}$$

Semigrupo de Poisson es

$$P_t = e^{-t\sqrt{-A}}$$

Potenciales de Riesz:

$$\text{Dado } a > 0, \quad (-\mathcal{L})^{-a}f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} T_t f(x) dt.$$



El operador diferencial de Hermite u oscilador armónico

$$\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$$

Semigrupo de difusión con generador infinitesimal $-\mathcal{L}$ es

$$T_t = e^{-t\mathcal{L}}$$

Semigrupo de Poisson es

$$P_t = e^{-t\sqrt{-A}}$$

Potenciales de Riesz:

$$\text{Dado } a > 0, \quad (-\mathcal{L})^{-a}f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} T_t f(x) dt.$$

Transformada de Riesz:

$$\text{Para } 1 \leq i \leq n, \quad \mathcal{R}_i f(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \mathcal{L}^{-1/2} f(x).$$



El operador diferencial de Hermite u oscilador armónico

$$\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$$

Semigrupo de difusión con generador infinitesimal $-\mathcal{L}$ es

$$T_t = e^{-t\mathcal{L}}$$

Semigrupo de Poisson es

$$P_t = e^{-t\sqrt{-A}}$$

Potenciales de Riesz:

$$\text{Dado } a > 0, \quad (-\mathcal{L})^{-a}f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} T_t f(x) dt.$$

Transformada de Riesz:

$$\text{Para } 1 \leq i \leq n, \quad \mathcal{R}_i f(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \mathcal{L}^{-1/2} f(x) \right\rangle.$$

$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \cdot \right\rangle$ denota la componente del gradiente asociado al operador $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (A_i^* A_i + A_i A_i^*).$$



El operador diferencial de Hermite u oscilador armónico

$$\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$$

Semigrupo de difusión con generador infinitesimal $-\mathcal{L}$ es

$$T_t = e^{-t\mathcal{L}}$$

Semigrupo de Poisson es

$$P_t = e^{-t\sqrt{-A}}$$

Potenciales de Riesz:

$$\text{Dado } a > 0, \quad (-\mathcal{L})^{-a}f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} T_t f(x) dt.$$

Transformada de Riesz:

$$\text{Para } 1 \leq i \leq n, \quad \mathcal{R}_i f(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \mathcal{L}^{-1/2} f(x).$$

$$\text{En este caso } \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \text{ será } A_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + x_i \text{ o } A_i^* = -\frac{\partial}{\partial x_i} + x_i.$$



El operador diferencial de Hermite u oscilador armónico

$$\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$$

Semigrupo de difusión con generador infinitesimal $-\mathcal{L}$ es

$$T_t = e^{-t\mathcal{L}}$$

Semigrupo de Poisson es

$$P_t = e^{-t\sqrt{-A}}$$

Potenciales de Riesz:

$$\text{Dado } a > 0, \quad (-\mathcal{L})^{-a}f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} T_t f(x) dt.$$

Transformada de Riesz:

$$\text{Para } 1 \leq i \leq n, \quad \mathcal{R}_i f(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L}^{-1/2} f(x).$$

$$\mathcal{R}_i^+ = A_i \mathcal{L}^{-1/2} \quad \mathcal{R}_i^- = A_i^* \mathcal{L}^{-1/2}$$



Teorema

Sea $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ el semigrupo del calor o de Poisson para $\mathcal{L}$. Luego para $\rho > 2$

- ① Si $w \in A_p$, $1 < p < \infty$ entonces $\mathcal{O}(\mathcal{T}), \mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ mapea $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ en $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$
- ② Si $w \in A_1$, entonces $\mathcal{O}(\mathcal{T}), \mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ mapea $L^1(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$



Teorema

Sea $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ el semigrupo del calor o de Poisson para $\mathcal{L}$. Luego para $\rho > 2$

- ❶ Si $w \in A_p$, $1 < p < \infty$ entonces $\mathcal{O}(\mathcal{T}), \mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ mapea $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ en $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$
- ❷ Si $w \in A_1$, entonces $\mathcal{O}(\mathcal{T}), \mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ mapea $L^1(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$



Teorema

Sea $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ el semigrupo del calor o de Poisson para $\mathcal{L}$. Luego para $\rho > 2$

- ❶ Si $w \in A_p$, $1 < p < \infty$ entonces $\mathcal{O}(\mathcal{T}), \mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ mapea $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ en $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$
- ❷ Si $w \in A_1$, entonces $\mathcal{O}(\mathcal{T}), \mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ mapea $L^1(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$

Teorema

Sea $\rho > 2$.

- ❶ Si $w \in A_p$ con $1 < p < \infty$ luego $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{R}^\pm)$ y $\mathcal{O}(\mathcal{R}^\pm)$ mapea $L^p(\mathbb{R}, w(x)dx)$ en $L^p(\mathbb{R}, w(x)dx)$.
- ❷ Si $w \in A_1$ luego $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{R}^\pm)$ y $\mathcal{O}(\mathcal{R}^\pm)$ mapea $L^1(\mathbb{R}, w(x)dx)$ en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}, w(x)dx)$.



Teorema

Sea $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ el semigrupo del calor o de Poisson para $\mathcal{L}$. Luego para $\rho > 2$

- ❶ Si $w \in A_p$, $1 < p < \infty$ entonces $\mathcal{O}(\mathcal{T}), \mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ mapea $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ en $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$
- ❷ Si $w \in A_1$, entonces $\mathcal{O}(\mathcal{T}), \mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ mapea $L^1(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$

Teorema

Sea $\rho > 2$.

- ❶ Si $w \in A_p$ con $1 < p < \infty$ luego $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{R}^\pm)$ y $\mathcal{O}(\mathcal{R}^\pm)$ mapea $L^p(\mathbb{R}, w(x)dx)$ en $L^p(\mathbb{R}, w(x)dx)$.
- ❷ Si $w \in A_1$ luego $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{R}^\pm)$ y $\mathcal{O}(\mathcal{R}^\pm)$ mapea $L^1(\mathbb{R}, w(x)dx)$ en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}, w(x)dx)$.



Esquema de demostración Teorema 1

Si la familia de operadores $\mathcal{T} = \{T_t\}$ está definida de la siguiente manera

- ① Los núcleos satisfacen condiciones standard de tamaño y regularidad.
- ② $U(\mathcal{T})$ y $V(\mathcal{T})$ son acotados de $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ en $L^2_{E_2}(\mathbb{R}^n, dx)$ y desde $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ into $L^2_{F_p}(\mathbb{R}^n, dx)$ respectivamente.



Si la familia de operadores $\mathcal{T} = \{T_t\}$ está definida de la siguiente manera

$$T_t f(x) = \int M_t(x, y) f(y) dy$$

- ① Los núcleos satisfacen condiciones standard de tamaño y regularidad.
- ② $U(\mathcal{T})$ y $V(\mathcal{T})$ son acotados de $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ en $L^2_{E_2}(\mathbb{R}^n, dx)$ y desde $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ into $L^2_{F_\rho}(\mathbb{R}^n, dx)$ respectivamente.



Si la familia de operadores $\mathcal{T} = \{T_t\}$ está definida de la siguiente manera

$$T_t f(x) = \int M_t(x, y) f(y) dy$$

luego el operador $U(\mathcal{T})$ tiene un núcleo asociado a valores vectoriales vector-valued kernel $\mathcal{U}$

- ① Los núcleos satisfacen condiciones standard de tamaño y regularidad.
- ② $U(\mathcal{T})$ y $V(\mathcal{T})$ son acotados de $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ en $L_{E_2}^2(\mathbb{R}^n, dx)$ y desde $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ into $L_{F_\rho}^2(\mathbb{R}^n, dx)$ respectivamente.



Si la familia de operadores $\mathcal{T} = \{T_t\}$ está definida de la siguiente manera

$$T_t f(x) = \int M_t(x, y) f(y) dy$$

luego el operador $U(\mathcal{T})$ tiene un núcleo asociado a valores vectoriales vector-valued kernel $\mathcal{U}$

$$U(\mathcal{T})f(x) = \int \mathcal{U}(x, y) f(y) dy = \int \left\{ (M_{t_{i+1}}(x, y) - M_s(x, y)) \chi_{J_i}(s) \right\}_{s,i} f(y) dy.$$

- ① Los núcleos satisfacen condiciones standard de tamaño y regularidad.
- ② $U(\mathcal{T})$ y $V(\mathcal{T})$ son acotados de $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ en $L^2_{E_2}(\mathbb{R}^n, dx)$ y desde $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ into $L^2_{F_\rho}(\mathbb{R}^n, dx)$ respectivamente.



Si la familia de operadores $\mathcal{T} = \{T_t\}$ está definida de la siguiente manera

$$T_t f(x) = \int M_t(x, y) f(y) dy$$

luego el operador $U(\mathcal{T})$ tiene un núcleo asociado a valores vectoriales vector-valued kernel $\mathcal{U}$

$$U(\mathcal{T})f(x) = \int \mathcal{U}(x, y)f(y)dy = \int \left\{ (M_{t_{i+1}}(x, y) - M_s(x, y))\chi_{J_i}(s) \right\}_{s,i} f(y)dy.$$

De manera análoga podemos considerar el operador $V(\mathcal{T})$ asociado a la variación

- ① Los núcleos satisfacen condiciones standard de tamaño y regularidad.
- ② $U(\mathcal{T})$ y $V(\mathcal{T})$ son acotados de $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ en $L^2_{E_2}(\mathbb{R}^n, dx)$ y desde $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ into $L^2_{F_\rho}(\mathbb{R}^n, dx)$ respectivamente.



Si la familia de operadores $\mathcal{T} = \{T_t\}$ está definida de la siguiente manera

$$T_t f(x) = \int M_t(x, y) f(y) dy$$

luego el operador $U(\mathcal{T})$ tiene un núcleo asociado a valores vectoriales vector-valued kernel $\mathcal{U}$

$$U(\mathcal{T})f(x) = \int \mathcal{U}(x, y) f(y) dy = \int \left\{ (M_{t_{i+1}}(x, y) - M_s(x, y)) \chi_{J_i}(s) \right\}_{s,i} f(y) dy.$$

Por medio de la teoría a valores vectoriales de Calderón-Zygmund es suficiente mostrar

- ① Los núcleos satisfacen condiciones standard de tamaño y regularidad.
- ② $U(\mathcal{T})$ y $V(\mathcal{T})$ son acotados de $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ en $L^2_{E_2}(\mathbb{R}^n, dx)$ y desde $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ into $L^2_{F_\rho}(\mathbb{R}^n, dx)$ respectivamente.



Si la familia de operadores $\mathcal{T} = \{T_t\}$ está definida de la siguiente manera

$$T_t f(x) = \int M_t(x, y) f(y) dy$$

luego el operador $U(\mathcal{T})$ tiene un núcleo asociado a valores vectoriales vector-valued kernel $\mathcal{U}$

$$U(\mathcal{T})f(x) = \int \mathcal{U}(x, y) f(y) dy = \int \left\{ (M_{t_{i+1}}(x, y) - M_s(x, y)) \chi_{J_i}(s) \right\}_{s,i} f(y) dy.$$

Por medio de la teoría a valores vectoriales de Calderón-Zygmund es suficiente mostrar

- ① Los núcleos satisfacen condiciones standard de tamaño y regularidad.
- ② $U(\mathcal{T})$ y $V(\mathcal{T})$ son acotados de $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ en $L^2_{E_2}(\mathbb{R}^n, dx)$ y desde $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ into $L^2_{F_\rho}(\mathbb{R}^n, dx)$ respectivamente.



Si la familia de operadores $\mathcal{T} = \{T_t\}$ está definida de la siguiente manera

$$T_t f(x) = \int M_t(x, y) f(y) dy$$

luego el operador $U(\mathcal{T})$ tiene un núcleo asociado a valores vectoriales vector-valued kernel $\mathcal{U}$

$$U(\mathcal{T})f(x) = \int \mathcal{U}(x, y) f(y) dy = \int \left\{ (M_{t_{i+1}}(x, y) - M_s(x, y)) \chi_{J_i}(s) \right\}_{s,i} f(y) dy.$$

Por medio de la teoría a valores vectoriales de Calderón-Zygmund es suficiente mostrar

- ① Los núcleos satisfacen condiciones standard de tamaño y regularidad.
- ② $U(\mathcal{T})$ y $V(\mathcal{T})$ son acotados de $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ en $L^2_{E_2}(\mathbb{R}^n, dx)$ y desde $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ into $L^2_{F_\rho}(\mathbb{R}^n, dx)$ respectivamente.



Esquema de demostración Teorema 1

Si $\mathcal{T} = \{T_t\}$ es el semigrupo del calor para $\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$ luego el núcleo puede ser expresado como

$$\textcircled{1} \quad \|\mathcal{U}(x, y)(s, i)\|_{E_2} \leq \frac{C}{|x-y|^n}$$

$$\textcircled{2} \quad \|\nabla_x \mathcal{U}(x, y)(s, i)\|_{E_2} + \|\nabla_y \mathcal{U}(x, y)(s, i)\|_{E_2} \leq \frac{C}{|x-y|^{n+1}}$$



Esquema de demostración Teorema 1

Si $\mathcal{T} = \{T_t\}$ es el semigrupo del calor para $\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$ luego el núcleo puede ser expresado como

$$\mathcal{U}(x, y)(s, i) = (T_{s_{i+1}}(x, y) - T_s(x, y))\chi_{J_i}(s)$$

- 1 $\|\mathcal{U}(x, y)(s, i)\|_{E_2} \leq \frac{C}{|x-y|^n}$
- 2 $\|\nabla_x \mathcal{U}(x, y)(s, i)\|_{E_2} + \|\nabla_y \mathcal{U}(x, y)(s, i)\|_{E_2} \leq \frac{C}{|x-y|^{n+1}}$



Si $\mathcal{T} = \{T_t\}$ es el semigrupo del calor para $\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$ luego el núcleo puede ser expresado como

$$\mathcal{U}(x, y)(s, i) = (T_{s_{i+1}}(x, y) - T_s(x, y))\chi_{J_i}(s)$$

$$\text{donde } T_s(x, y) = \left(\frac{1-s^2}{4\pi s}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{4}(s|x+y|^2 + \frac{1}{s}|x-y|^2)}$$

- ① $\|\mathcal{U}(x, y)(s, i)\|_{E_2} \leq \frac{C}{|x-y|^n}$
- ② $\|\nabla_x \mathcal{U}(x, y)(s, i)\|_{E_2} + \|\nabla_y \mathcal{U}(x, y)(s, i)\|_{E_2} \leq \frac{C}{|x-y|^{n+1}}$



Si $\mathcal{T} = \{T_t\}$ es el semigrupo del calor para $\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$ luego el núcleo puede ser expresado como

$$\mathcal{U}(x, y)(s, i) = (T_{s_{i+1}}(x, y) - T_s(x, y))\chi_{J_i}(s)$$

$$\text{donde } T_s(x, y) = \left(\frac{1-s^2}{4\pi s}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{4}(s|x+y|^2 + \frac{1}{s}|x-y|^2)}$$

$$\textcircled{1} \quad \|\mathcal{U}(x, y)(s, i)\|_{E_2} \leq \frac{C}{|x-y|^n}$$

$$\textcircled{2} \quad \|\nabla_x \mathcal{U}(x, y)(s, i)\|_{E_2} + \|\nabla_y \mathcal{U}(x, y)(s, i)\|_{E_2} \leq \frac{C}{|x-y|^{n+1}}$$



Si $\mathcal{T} = \{T_t\}$ es el semigrupo del calor para $\mathcal{L} = -\Delta + |x|^2$ luego el núcleo puede ser expresado como

$$\mathcal{U}(x, y)(s, i) = (T_{s_{i+1}}(x, y) - T_s(x, y))\chi_{J_i}(s)$$

$$\text{donde } T_s(x, y) = \left(\frac{1-s^2}{4\pi s}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{4}(s|x+y|^2 + \frac{1}{s}|x-y|^2)}$$

$$\textcircled{1} \quad \|\mathcal{U}(x, y)(s, i)\|_{E_2} \leq \frac{C}{|x-y|^n}$$

$$\textcircled{2} \quad \|\nabla_x \mathcal{U}(x, y)(s, i)\|_{E_2} + \|\nabla_y \mathcal{U}(x, y)(s, i)\|_{E_2} \leq \frac{C}{|x-y|^{n+1}}$$



Teorema

(Jones-Reinhold [2001]) Sea $(\Sigma, d\mu)$ un espacio de medida positivo y sea $\mathcal{T} = \{T_t\}_t$ un semigrupo de difusión simétrico.

- $T_t T_s = T_{t+s}$, $T_0 = I_d$,
- $\lim_{t \rightarrow 0} T_t f \stackrel{L^2}{=} f$
- $\|T_t f\|_p \leq \|f\|_p$, para $1 \leq p \leq \infty$;
- Cada T_t es un operador autoadjunto en $L^2(X)$,
- Cada $T_t f \geq 0$ si $f \geq 0$;
- Para cada t , $T_t(1) = 1$.

Luego los operadores $\mathcal{O}(\mathcal{T})$ y $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ son acotados en $L^p(\Sigma, d\mu)$, para $1 < p < \infty$.

- 1 Los operadores $\mathcal{O}(\mathcal{T}_{OU})$ y $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T}_{OU})$ son acotados en $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma(x))$
- 2 El operador $U f(x) = f(x) \pi^{n/4} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, es una isometría desde $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma(x))$ en $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$.
- 3 Abu-Falahah and Torrea-2006

$$e^{-t(\mathcal{L} - nI_d)} \circ U f(x) = U \circ e^{-t\mathcal{L}} f(x)$$

○
○
○○
○○○

○
○

○○○
○○○○

○
○
○○○○○

Esquema de demostración Teorema 1

• La familia $\mathcal{T} = \{e^{-t\mathcal{L}}\}_t$ NO ES un semigrupo de difusión simétrico, pues $e^{-t\mathcal{L}}(1)(x) = e^{-t|x|^2}$, y el resultado de Jones-Reinhold no puede ser aplicado directamente.

- 1 Los operadores $\mathcal{O}(\mathcal{T}_{OU})$ y $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T}_{OU})$ son acotados en $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma(x))$
- 2 El operador $Uf(x) = f(x)\pi^{n/4}e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, es una isometría desde $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma(x))$ en $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$.
- 3 Abu-Falahah and Torrea-2006

$$e^{-t(\mathcal{L}-nI_d)} \circ Uf(x) = U \circ e^{-t\mathcal{L}}f(x)$$

- 4 Es posible probar además que

$$\mathcal{O}(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t(\mathcal{L}-nI_d)})$$

$$\mathcal{V}_\rho(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t(\mathcal{L}-nI_d)})$$

son acotados en $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ para $1 < p < \infty$



- La familia $\mathcal{T} = \{e^{-t\mathcal{L}}\}_t$ NO ES un semigrupo de difusión simétrico, pues $e^{-t\mathcal{L}}(1)(x) = e^{-t|x|^2}$, y el resultado de Jones-Reinhold no puede ser aplicado directamente.
- Para resolver esta dificultad consideramos el operador de Ornstein-Uhlenbeck $\mathbf{L} = -\Delta + 2x \cdot \nabla$. Es conocido que el semigrupo del calor $\mathcal{T}_{\text{OU}} = \{e^{-t\mathbf{L}}\}_t$ es un semigrupo de difusión simétrico en el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, d\gamma(x))$, para $d\gamma(x) = \pi^{-n/2} e^{-|x|^2} dx$.

- 1 Los operadores $\mathcal{O}(\mathcal{T}_{\text{OU}})$ y $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T}_{\text{OU}})$ son acotados en $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma(x))$
- 2 El operador $Uf(x) = f(x)\pi^{n/4} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, es una isometría desde $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma(x))$ en $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$.

3 Abu-Falahah and Torrea-2006

$$e^{-t(\mathcal{L} - nI_d)} \circ Uf(x) = U \circ e^{-t\mathbf{L}}f(x)$$

- 4 Es posible probar además que

$$\mathcal{O}(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t(\mathcal{L} - nI_d)})$$

$$\mathcal{V}_\rho(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t(\mathcal{L} - nI_d)})$$

○
○
○○
○○○

○
○

○○○
○○○○

○
○
○○○○○

Esquema de demostración Teorema 1

• La familia $\mathcal{T} = \{e^{-t\mathcal{L}}\}_t$ NO ES un semigrupo de difusión simétrico, pues $e^{-t\mathcal{L}}(1)(x) = e^{-t|x|^2}$, y el resultado de Jones-Reinhold no puede ser aplicado directamente.

- 1 Los operadores $\mathcal{O}(\mathcal{T}_{\text{OU}})$ y $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T}_{\text{OU}})$ son acotados en $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma(x))$
- 2 El operador $Uf(x) = f(x)\pi^{n/4}e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, es una isometría desde $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma(x))$ en $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$.

3 Abu-Falahah and Torrea-2006

$$e^{-t(\mathcal{L}-nI_d)} \circ Uf(x) = U \circ e^{-t\mathcal{L}}f(x)$$

- 4 Es posible probar además que

$$\mathcal{O}(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t(\mathcal{L}-nI_d)})$$

$$\mathcal{V}_\rho(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t(\mathcal{L}-nI_d)})$$

son acotados en $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ para $1 < p < \infty$

○
○
○○
○○○

○
○

○○○
○○○○

○
○
○○○○○

Esquema de demostración Teorema 1

• La familia $\mathcal{T} = \{e^{-t\mathcal{L}}\}_t$ NO ES un semigrupo de difusión simétrico, pues $e^{-t\mathcal{L}}(1)(x) = e^{-t|x|^2}$, y el resultado de Jones-Reinhold no puede ser aplicado directamente.

- 1 Los operadores $\mathcal{O}(\mathcal{T}_{\text{OU}})$ y $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T}_{\text{OU}})$ son acotados en $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma(x))$
- 2 El operador $Uf(x) = f(x)\pi^{n/4}e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, es una isometría desde $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma(x))$ en $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$.

3 Abu-Falahah and Torrea-2006

$$e^{-t(\mathcal{L}-nI_d)} \circ Uf(x) = U \circ e^{-t\mathcal{L}}f(x)$$

- 4 Es posible probar además que

$$\mathcal{O}(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t(\mathcal{L}-nI_d)})$$

$$\mathcal{V}_\rho(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t(\mathcal{L}-nI_d)})$$

son acotados en $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ para $1 < p < \infty$



• La familia $\mathcal{T} = \{e^{-t\mathcal{L}}\}_t$ NO ES un semigrupo de difusión simétrico, pues $e^{-t\mathcal{L}}(1)(x) = e^{-t|x|^2}$, y el resultado de Jones-Reinhold no puede ser aplicado directamente.

- 1 Los operadores $\mathcal{O}(\mathcal{T}_{\text{OU}})$ y $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T}_{\text{OU}})$ son acotados en $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma(x))$
- 2 El operador $Uf(x) = f(x)\pi^{n/4}e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, es una isometría desde $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma(x))$ en $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$.

3 Abu-Falahah and Torrea-2006

$$e^{-t(\mathcal{L}-nI_d)} \circ Uf(x) = U \circ e^{-t\mathcal{L}}f(x)$$

- 4 Es posible probar además que

$$\mathcal{O}(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t(\mathcal{L}-nI_d)})$$

$$\mathcal{V}_\rho(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t(\mathcal{L}-nI_d)})$$

son acotados en $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ para $1 < p < \infty$



• La familia $\mathcal{T} = \{e^{-t\mathcal{L}}\}_t$ NO ES un semigrupo de difusión simétrico, pues $e^{-t\mathcal{L}}(1)(x) = e^{-t|x|^2}$, y el resultado de Jones-Reinhold no puede ser aplicado directamente.

- 1 Los operadores $\mathcal{O}(\mathcal{T}_{\text{OU}})$ y $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T}_{\text{OU}})$ son acotados en $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma(x))$
- 2 El operador $Uf(x) = f(x)\pi^{n/4}e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, es una isometría desde $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma(x))$ en $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$.

3 Abu-Falahah and Torrea-2006

$$e^{-t(\mathcal{L}-nI_d)} \circ Uf(x) = U \circ e^{-t\mathcal{L}}f(x)$$

- 4 Es posible probar además que

$$\mathcal{O}(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t(\mathcal{L}-nI_d)})$$

$$\mathcal{V}_\rho(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t(\mathcal{L}-nI_d)})$$

son acotados en $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ para $1 < p < \infty$



Esquema de demostración Teorema 2

Sea K un núcleo definido en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \Delta$ donde $\Delta = \{(x, y) : x \neq y\}$ satisfaciendo standard condiciones de tamaño y regularidad.



Sea K un núcleo definido en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \Delta$ donde $\Delta = \{(x, y) : x \neq y\}$ satisfaciendo standard condiciones de tamaño y regularidad.

Consideramos los operadores truncados

$$T_\epsilon f(x) = \int_{\{y : |x-y| > \epsilon\}} K(x, y) f(y) dy.$$



Esquema de demostración Teorema 2

Sea K un núcleo definido en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \Delta$ donde $\Delta = \{(x, y) : x \neq y\}$ satisfaciendo standard condiciones de tamaño y regularidad.

Consideramos los operadores truncados

$$T_\epsilon f(x) = \int_{\{y : |x-y| > \epsilon\}} K(x, y) f(y) dy.$$

Teorema

Sea $\rho > 2$. Para la familia $\mathcal{T} = \{T_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$, si suponemos que los operadores ρ -variación y oscilación son acotados en $L^2(\mathbb{R}, dx)$ luego

- ❶ Para $w \in A_p$ con $1 < p < \infty$ los operadores $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ y $\mathcal{O}(\mathcal{T})$ mapean $L^p(\mathbb{R}, w(x)dx)$ en $L^p(\mathbb{R}, w(x)dx)$.
- ❷ Para $w \in A_1$ los operadores $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ y $\mathcal{O}(\mathcal{T})$ mapean $L^1(\mathbb{R}, w(x)dx)$ en $L^1(\mathbb{R}, w(x)dx)$ -débil.



Stempak-Torrea (2003)

$\mathcal{R}_i^+$ y $\mathcal{R}_i^-$ satisfacen tamaño y regularidad



Stempak-Torrea (2003)

$\mathcal{R}_i^+$ y $\mathcal{R}_i^-$ satisfacen tamaño y regularidad

Hay que probar acotación en L^2



Stempak-Torrea (2003)

$\mathcal{R}_i^+$ y $\mathcal{R}_i^-$ satisfacen tamaño y regularidad

Hay que probar acotación en L^2

$$\mathbf{L} = -\Delta + 2x \cdot \nabla \quad \text{Ornstein-Uhlenbeck}$$



Stempak-Torrea (2003)

$\mathcal{R}_i^+$ y $\mathcal{R}_i^-$ satisfacen tamaño y regularidad

Hay que probar acotación en L^2

$$\mathbf{L} = -\Delta + 2x \cdot \nabla \quad \text{Ornstein-Uhlenbeck}$$

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \delta_i^* \delta_i,$$

donde $\delta_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $\delta_i^* = -\frac{\partial}{\partial x_i} + 2x_i$.

**Stempak-Torrea (2003)**

$\mathcal{R}_i^+$ y $\mathcal{R}_i^-$ satisfacen tamaño y regularidad

Hay que probar acotación en L^2

$$\mathbf{L} = -\Delta + 2x \cdot \nabla \quad \text{Ornstein-Uhlenbeck}$$

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \delta_i^* \delta_i,$$

donde $\delta_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $\delta_i^* = -\frac{\partial}{\partial x_i} + 2x_i$.

Difusión**Potencial****Transf. Riesz**

$$e^{-t\mathbf{L}} \longrightarrow (-\mathbf{L})^{-a} \longrightarrow \mathbf{R}_i = \delta_i(-\mathbf{L})^{-1/2}$$



Esquema de demostración Teorema 2

❶ $Uf(x) = f(x)\pi^{n/4}e^{-|x|^2/2}$ es una isometría de $L^2(d\gamma)$ en $L^2(dx)$

❷ Abu Falahah-Torrea (2006)

$$A_i(\mathcal{L} - n)^{-1/2}f(x) = UR_iU^{-1}f(x)$$

$$(A_i(\mathcal{L} - n)^{-1/2} - \mathcal{R}_i^+)f(x) = \int L_i^+(x, y)f(y)dy$$

con $L_i^+(x, y)$ integrable.

❸ Harboure-Macías-Menárguez-Torrea (2005)

$$\mathcal{O}(\mathbf{R}_i), \mathcal{V}_\rho(\mathbf{R}_i) : L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma) \quad \rho > 2$$

❹ Bongioanni-Torrea (2003)

$$\mathcal{R}_i^+f(x) + \mathcal{R}_i^-f(x) = x_i\mathcal{L}^{-1/2}f(x)$$

tiene núcleo en L^1



Esquema de demostración Teorema 2

❶ $Uf(x) = f(x)\pi^{n/4}e^{-|x|^2/2}$ es una isometría de $L^2(d\gamma)$ en $L^2(dx)$

❷ **Abu Falahah-Torrea (2006)**

$$A_i(\mathcal{L} - n)^{-1/2}f(x) = UR_iU^{-1}f(x)$$

$$(A_i(\mathcal{L} - n)^{-1/2} - \mathcal{R}_i^+)f(x) = \int L_i^+(x, y)f(y)dy$$

con $L_i^+(x, y)$ integrable.

❸ Harboure-Macías-Menárguez-Torrea (2005)

$$\mathcal{O}(\mathbf{R}_i), \mathcal{V}_\rho(\mathbf{R}_i) : L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma) \quad \rho > 2$$

❹ Bongioanni-Torrea (2003)

$$\mathcal{R}_i^+f(x) + \mathcal{R}_i^-f(x) = x_i\mathcal{L}^{-1/2}f(x)$$

tiene núcleo en L^1



❶ $Uf(x) = f(x)\pi^{n/4}e^{-|x|^2/2}$ es una isometría de $L^2(d\gamma)$ en $L^2(dx)$

❷ **Abu Falahah-Torrea (2006)**

$$A_i(\mathcal{L} - n)^{-1/2}f(x) = UR_iU^{-1}f(x)$$

$$(A_i(\mathcal{L} - n)^{-1/2} - \mathcal{R}_i^+)f(x) = \int L_i^+(x, y)f(y)dy$$

con $L_i^+(x, y)$ integrable.

❸ **Harboure-Macías-Menárguez-Torrea (2005)**

$$\mathcal{O}(\mathbf{R}_i), \mathcal{V}_\rho(\mathbf{R}_i) : L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma) \quad \rho > 2$$

❹ **Bongioanni-Torrea (2003)**

$$\mathcal{R}_i^+f(x) + \mathcal{R}_i^-f(x) = x_i\mathcal{L}^{-1/2}f(x)$$

tiene núcleo en L^1



❶ $Uf(x) = f(x)\pi^{n/4}e^{-|x|^2/2}$ es una isometría de $L^2(d\gamma)$ en $L^2(dx)$

❷ **Abu Falahah-Torrea (2006)**

$$A_i(\mathcal{L} - n)^{-1/2}f(x) = UR_iU^{-1}f(x)$$

$$(A_i(\mathcal{L} - n)^{-1/2} - \mathcal{R}_i^+)f(x) = \int L_i^+(x, y)f(y)dy$$

con $L_i^+(x, y)$ integrable.

❸ **Harboure-Macías-Menárguez-Torrea (2005)**

$$\mathcal{O}(\mathbf{R}_i), \mathcal{V}_\rho(\mathbf{R}_i) : L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma) \quad \rho > 2$$

❹ **Bongioanni-Torrea (2003)**

$$\mathcal{R}_i^+f(x) + \mathcal{R}_i^-f(x) = x_i\mathcal{L}^{-1/2}f(x)$$

tiene núcleo en L^1



- ❶ $Uf(x) = f(x)\pi^{n/4}e^{-|x|^2/2}$ es una isometría de $L^2(d\gamma)$ en $L^2(dx)$
- ❷ **Abu Falahah-Torrea (2006)**

$$A_i(\mathcal{L} - n)^{-1/2}f(x) = U\mathbf{R}_iU^{-1}f(x)$$

$$(A_i(\mathcal{L} - n)^{-1/2} - \mathcal{R}_i^+)f(x) = \int L_i^+(x, y)f(y)dy$$

con $L_i^+(x, y)$ integrable.

- ❸ **Harboure-Macías-Menárguez-Torrea (2005)**

$$\mathcal{O}(\mathbf{R}_i), \mathcal{V}_\rho(\mathbf{R}_i) : L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma) \quad \rho > 2$$

- ❹ **Bongioanni-Torrea (2003)**

$$\mathcal{R}_i^+f(x) + \mathcal{R}_i^-f(x) = x_i\mathcal{L}^{-1/2}f(x)$$

tiene núcleo en L^1

Corolario

Para $\rho > 2$ obtenemos

$$\mathcal{O}(\mathcal{R}_i^\pm), \mathcal{V}_\rho(\mathcal{R}_i^\pm) : L^2(\mathbb{R}^n, dx) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n, dx)$$



Es conocido que $T^*f(x) = \sup_{t>0} |T_t f(x)|$ es un operador acotado de L^∞ en sí mismo, para T_t el semigrupo del calor asociado al operador de Hermite.



Es conocido que $T^*f(x) = \sup_{t>0} |T_t f(x)|$ es un operador acotado de L^∞ en sí mismo, para T_t el semigrupo del calor asociado al operador de Hermite.

Teorema

Sea $\rho > 2$.

- (i) $\mathcal{V}_\rho(T)(f)(x) < \infty$ a.e. $x \in \mathbb{R}$ para toda $f \in L^\infty(\mathbb{R}, dx)$.
- (ii) Existe una función $G \in L^\infty(\mathbb{R}, dx)$ tal que $\mathcal{V}_\rho(T)(G) \notin L^\infty(\mathbb{R}, dx)$.



Es conocido que $T^*f(x) = \sup_{t>0} |T_t f(x)|$ es un operador acotado de L^∞ en sí mismo, para T_t el semigrupo del calor asociado al operador de Hermite.

Teorema

Sea $\rho > 2$.

- (i) $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})(f)(x) < \infty$ a.e. $x \in \mathbb{R}$ para toda $f \in L^\infty(\mathbb{R}, dx)$.
- (ii) Existe una función $G \in L^\infty(\mathbb{R}, dx)$ tal que $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})(G) \notin L^\infty(\mathbb{R}, dx)$.

○
○
○
○○
○○○

○
○
○
○○○
○○○

○
○
○
○○○○○

En el año 2005 **J. Dziubansky-G. Garrigós-T.Martinez-J.L.Torrea-J.Zienkiewicz** identifican el espacio dual del H^1 -Hermite (**J.Dziubansky-J.Zienkiewicz**)



En el año 2005 **J. Dziubansky-G. Garrigós-T.Martinez-J.L.Torrea-J.Zienkiewicz** identifican el espacio dual del H^1 -Hermite (**J.Dziubansky-J.Zienkiewicz**)

$$BMO_H = \{ f \in BMO / \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(x)| dx \leq C, \quad 0 < r \leq \gamma(x) \}$$



En el año 2005 **J. Dziubansky-G. Garrigós-T.Martinez-J.L.Torrea-J.Zienkiewicz** identifican el espacio dual del H^1 -Hermite (**J.Dziubansky-J.Zienkiewicz**)

$$BMO_H = \{ f \in BMO / \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(x)| dx \leq C, \quad 0 < r \leq \gamma(x) \}$$

$$\text{donde } \gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+|x|}, & |x| \geq 1; \\ \frac{1}{2}, & |x| \leq 1. \end{cases}$$



En el año 2005 **J. Dziubansky-G. Garrigós-T.Martinez-J.L.Torrea-J.Zienkiewicz** identifican el espacio dual del H^1 -Hermite (**J.Dziubansky-J.Zienkiewicz**)

$$BMO_H = \{ f \in BMO / \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(x)| dx \leq C, \quad 0 < r \leq \gamma(x) \}$$

$$\text{donde } \gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+|x|}, & |x| \geq 1; \\ \frac{1}{2}, & |x| \leq 1. \end{cases}$$

$$H_H^1 = \{ f \in L^1 / T^*f = \sup |T_t f| \in L^1 \}$$



En el año 2005 **J. Dziubansky-G. Garrigós-T.Martinez-J.L.Torrea-J.Zienkiewicz** identifican el espacio dual del H^1 -Hermite (**J.Dziubansky-J.Zienkiewicz**)

$$BMO_H = \{ f \in BMO / \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(x)| dx \leq C, \quad 0 < r \leq \gamma(x) \}$$

$$\text{donde } \gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+|x|}, & |x| \geq 1; \\ \frac{1}{2}, & |x| \leq 1. \end{cases}$$

$$H_H^1 = \{ f \in L^1 / T^*f = \sup |T_t f| \in L^1 \}$$

Teorema

- (i) $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ mapea $BMO_H(\mathbb{R}, dx)$ en $BMO_H(\mathbb{R}, dx)$.
- (ii) $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ mapea $H_H^1(\mathbb{R}, dx)$ en $H_H^1(\mathbb{R}, dx)$.



En el año 2005 **J. Dziubansky-G. Garrigós-T.Martinez-J.L.Torrea-J.Zienkiewicz** identifican el espacio dual del H^1 -Hermite (**J.Dziubansky-J.Zienkiewicz**)

$$BMO_H = \{ f \in BMO / \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(x)| dx \leq C, \quad 0 < r \leq \gamma(x) \}$$

$$\text{donde } \gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+|x|}, & |x| \geq 1; \\ \frac{1}{2}, & |x| \leq 1. \end{cases}$$

$$H_H^1 = \{ f \in L^1 / T^* f = \sup |T_t f| \in L^1 \}$$

Teorema

- (i) $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ mapea $BMO_H(\mathbb{R}, dx)$ en $BMO_H(\mathbb{R}, dx)$.
- (ii) $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$ mapea $H_H^1(\mathbb{R}, dx)$ en $H_H^1(\mathbb{R}, dx)$.

Teorema

Sea $\rho > 2$. El espacio de Hardy $H_H^1(\mathbb{R}, dx)$ coincide con el espacio de funciones $f \in L^1$ tal que $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})(f) \in L^1(\mathbb{R}, dx)$.



Teorema

Sea T un operador lineal definido por

$$T(f)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-y| > \epsilon} K(x, y) f(y) dy, \quad a.e. \ x \in \mathbb{R},$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$. Supongamos que

- 1 T mapea $L^2(\mathbb{R})$ into $L^2(\mathbb{R})$,
- 2 La función $T1$, $T1(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-y| > \epsilon} K(x, y) dy$, existe y es diferenciable $x \in \mathbb{R}$. Más aún, existe una constante $C > 0$ tal que $\left| T1(x) \right| + \left| \frac{d}{dx} T1(x) \right| \leq C$,
- 3 El núcleo $K(x, y)$ satisface

$$\begin{aligned} \bullet |K(x, y)| &\leq C \frac{1}{|x-y|} e^{-c|x||x-y|} e^{-c|x-y|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq y, \\ \bullet \left| \frac{\partial}{\partial x} K(x, y) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} K(x, y) \right| &\leq C \frac{1}{|x-y|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq y. \end{aligned}$$

Luego T mapea $BMO_H(\mathbb{R})$ en $BMO_H(\mathbb{R})$.



Teorema

Sea T un operador lineal definido por

$$T(f)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-y| > \epsilon} K(x, y) f(y) dy, \quad a.e. \ x \in \mathbb{R},$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$. Supongamos que

- 1 T mapea $L^2(\mathbb{R})$ into $L^2(\mathbb{R})$,
- 2 La función $T1$, $T1(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-y| > \epsilon} K(x, y) dy$, existe y es diferenciable $x \in \mathbb{R}$. Más aún, existe una constante $C > 0$ tal que $\left| T1(x) \right| + \left| \frac{d}{dx} T1(x) \right| \leq C$,
- 3 El núcleo $K(x, y)$ satisface

$$\begin{aligned} \bullet |K(x, y)| &\leq C \frac{1}{|x-y|} e^{-c|x||x-y|} e^{-c|x-y|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq y, \\ \bullet \left| \frac{\partial}{\partial x} K(x, y) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} K(x, y) \right| &\leq C \frac{1}{|x-y|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq y. \end{aligned}$$

Luego T mapea $BMO_H(\mathbb{R})$ en $BMO_H(\mathbb{R})$.



Teorema

Sea T un operador lineal definido por

$$T(f)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-y| > \epsilon} K(x, y) f(y) dy, \quad a.e. \ x \in \mathbb{R},$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$. Supongamos que

- 1 T mapea $L^2(\mathbb{R})$ into $L^2(\mathbb{R})$,
- 2 La función $T1$, $T1(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-y| > \epsilon} K(x, y) dy$, existe y es diferenciable $x \in \mathbb{R}$. Más aún, existe una constante $C > 0$ tal que $\left| T1(x) \right| + \left| \frac{d}{dx} T1(x) \right| \leq C$,
- 3 El núcleo $K(x, y)$ satisface

$$\begin{aligned} \bullet & \left| K(x, y) \right| \leq C \frac{1}{|x-y|} e^{-c|x||x-y|} e^{-c|x-y|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq y, \\ \bullet & \left| \frac{\partial}{\partial x} K(x, y) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} K(x, y) \right| \leq C \frac{1}{|x-y|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq y. \end{aligned}$$

Luego T mapea $BMO_H(\mathbb{R})$ en $BMO_H(\mathbb{R})$.



Teorema

Sea T un operador lineal definido por

$$T(f)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-y| > \epsilon} K(x, y) f(y) dy, \quad a.e. \ x \in \mathbb{R},$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$. Supongamos que

- 1 T mapea $L^2(\mathbb{R})$ into $L^2(\mathbb{R})$,
- 2 La función $T1$, $T1(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-y| > \epsilon} K(x, y) dy$, existe y es diferenciable $x \in \mathbb{R}$. Más aún, existe una constante $C > 0$ tal que $\left| T1(x) \right| + \left| \frac{d}{dx} T1(x) \right| \leq C$,
- 3 El núcleo $K(x, y)$ satisface

$$\begin{aligned} \bullet & |K(x, y)| \leq C \frac{1}{|x-y|} e^{-c|x||x-y|} e^{-c|x-y|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq y, \\ \bullet & \left| \frac{\partial}{\partial x} K(x, y) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} K(x, y) \right| \leq C \frac{1}{|x-y|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq y. \end{aligned}$$

Luego T mapea $BMO_H(\mathbb{R})$ en $BMO_H(\mathbb{R})$.



Sea $\mathbb{H}$ la transformada de Hilbert, $f = \chi_{(0,1)}$ and $I_r = (-r, 0)$, $0 < r < 1$.

$$\frac{1}{r} \int_{-r}^0 \mathbb{H}(-\chi_{(0,1)})(x) dx \sim \log \frac{e}{r}$$



Sea $\mathbb{H}$ la transformada de Hilbert, $f = \chi_{(0,1)}$ and $I_r = (-r, 0)$, $0 < r < 1$.

$$\frac{1}{r} \int_{-r}^0 \mathbb{H}(-\chi_{(0,1)})(x) dx \sim \log \frac{e}{r}$$

Teorema

Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset B(0, 1)$ existe una función acotada f tal que

$$\frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} \partial_x(\mathcal{L})^{-1/2} f(x) dx \sim \log \frac{e}{r}.$$



Sea $\mathbb{H}$ la transformada de Hilbert, $f = \chi_{(0,1)}$ and $I_r = (-r, 0)$, $0 < r < 1$.

$$\frac{1}{r} \int_{-r}^0 \mathbb{H}(-\chi_{(0,1)})(x) dx \sim \log \frac{e}{r}$$

Teorema

Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset B(0, 1)$ existe una función acotada f tal que

$$\frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} \partial_x(\mathcal{L})^{-1/2} f(x) dx \sim \log \frac{e}{r}.$$

Teorema

Existe una constante $C > 0$ tal que, para toda función $f \in L^\infty(\mathbb{R}, dx)$ con soporte contenido en $[-1, 1]$, y toda bola $B_r = B(x_0, r) \subset [-1, 1]$, tenemos que

$$\frac{1}{r} \int_{B_r} \mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})(f)(x) dx \leq C \left(\log \frac{1}{2r} \right)^{1/\rho} \|f\|_\infty.$$



$$L_{\alpha} = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} (\alpha^2 - \frac{1}{4}) \right), \quad \alpha > -1$$

1 Semigrupo del Calor

$$\mathcal{W}_t^{\alpha} f(x) = \int_0^{\infty} W_t^{\alpha}(x, y) f(y) dy, \quad x \in (0, \infty)$$

donde $W_t^{\alpha}(x, y) = 2(xy)^{1/2} \frac{e^{-t}}{1-e^{-2t}} I_{\alpha} \left(\frac{2xye^{-t}}{1-e^{-2t}} \right) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \frac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2t}}}$
 I_{α} funciones de Bessel modificadas de primer tipo y orden α .

- 2 Factorización $L_{\alpha} = \frac{1}{2} D_{\alpha}^* D_{\alpha} + \alpha + 1$,
 donde $D_{\alpha} f(x) = x^{\alpha+1/2} \frac{d}{dx} (x^{-\alpha-1/2} f(x)) + x f(x)$, D_{α}^* adjunto formal de D_{α} en $L^2(0, \infty)$.

3 Transformada de Riesz

$$\mathcal{R}_{\alpha} f = D_{\alpha} L_{\alpha}^{-1/2} f$$

$$\mathcal{R}_{\alpha} f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{R}_{\alpha, \epsilon} f(x)$$



$$L_{\alpha} = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} (\alpha^2 - \frac{1}{4}) \right), \quad \alpha > -1$$

1 Semigrupo del Calor

$$\mathcal{W}_t^{\alpha} f(x) = \int_0^{\infty} W_t^{\alpha}(x, y) f(y) dy, \quad x \in (0, \infty)$$

donde $W_t^{\alpha}(x, y) = 2(xy)^{1/2} \frac{e^{-t}}{1-e^{-2t}} I_{\alpha} \left(\frac{2xye^{-t}}{1-e^{-2t}} \right) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \frac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2t}}}$
 I_{α} funciones de Bessel modificadas de primer tipo y orden α .

- 2 Factorización $L_{\alpha} = \frac{1}{2} D_{\alpha}^* D_{\alpha} + \alpha + 1$,
 donde $D_{\alpha} f(x) = x^{\alpha+1/2} \frac{d}{dx} (x^{-\alpha-1/2} f(x)) + x f(x)$, D_{α}^* adjunto formal de D_{α} en $L^2(0, \infty)$.

- 3 Transformada de Riesz

$$\mathcal{R}_{\alpha} f = D_{\alpha} L_{\alpha}^{-1/2} f$$

$$\mathcal{R}_{\alpha} f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{R}_{\alpha, \epsilon} f(x)$$



$$L_{\alpha} = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} (\alpha^2 - \frac{1}{4}) \right), \quad \alpha > -1$$

1 Semigrupo del Calor

$$\mathcal{W}_t^{\alpha} f(x) = \int_0^{\infty} W_t^{\alpha}(x, y) f(y) dy, \quad x \in (0, \infty)$$

donde $W_t^{\alpha}(x, y) = 2(xy)^{1/2} \frac{e^{-t}}{1-e^{-2t}} I_{\alpha} \left(\frac{2xye^{-t}}{1-e^{-2t}} \right) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \frac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2t}}}$
 I_{α} funciones de Bessel modificadas de primer tipo y orden α .

2 Factorización $L_{\alpha} = \frac{1}{2} D_{\alpha}^* D_{\alpha} + \alpha + 1$,

donde $D_{\alpha} f(x) = x^{\alpha+1/2} \frac{d}{dx} (x^{-\alpha-1/2} f(x)) + x f(x)$, D_{α}^* adjunto formal de D_{α} en $L^2(0, \infty)$.

3 Transformada de Riesz

$$\mathcal{R}_{\alpha} f = D_{\alpha} L_{\alpha}^{-1/2} f$$

$$\mathcal{R}_{\alpha} f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{R}_{\alpha, \epsilon} f(x)$$



$$L_{\alpha} = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} (\alpha^2 - \frac{1}{4}) \right), \quad \alpha > -1$$

1 Semigrupo del Calor

$$\mathcal{W}_t^{\alpha} f(x) = \int_0^{\infty} W_t^{\alpha}(x, y) f(y) dy, \quad x \in (0, \infty)$$

donde $W_t^{\alpha}(x, y) = 2(xy)^{1/2} \frac{e^{-t}}{1-e^{-2t}} I_{\alpha} \left(\frac{2xye^{-t}}{1-e^{-2t}} \right) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \frac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2t}}}$
 I_{α} funciones de Bessel modificadas de primer tipo y orden α .

- 2 Factorización $L_{\alpha} = \frac{1}{2} D_{\alpha}^* D_{\alpha} + \alpha + 1$,
 donde $D_{\alpha} f(x) = x^{\alpha+1/2} \frac{d}{dx} (x^{-\alpha-1/2} f(x)) + x f(x)$, D_{α}^* adjunto formal de D_{α} en $L^2(0, \infty)$.

3 Transformada de Riesz

$$\mathcal{R}_{\alpha} f = D_{\alpha} L_{\alpha}^{-1/2} f$$

$$\mathcal{R}_{\alpha} f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{R}_{\alpha, \epsilon} f(x)$$

○
○
○○
○○○

○
○
○○○
○○○
○○○○

○
○○○○○

Teorema

Sea $\alpha > -1$ and $\rho > 2$. El operador oscilación $\mathcal{O}(\mathcal{W}_t^\alpha)$ y el operador variación $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)$ son

- (i) de tipo fuerte (p, p) respecto a $x^\delta dx$ si $-(\alpha + \frac{1}{2})p - 1 < \delta < (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$ and $1 < p < \infty$,
- (ii) de tipo débil $(1, 1)$ respecto a $x^\delta dx$ para $-\alpha - \frac{3}{2} \leq \delta \leq \alpha + \frac{1}{2}$ cuando $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ y para $-1 < \delta \leq 0$ cuando $\alpha = -\frac{1}{2}$,
- (iii) de tipo débil restringido (p, p) respecto a $x^\delta dx$ cuando $1 < p < \infty$ y $\delta = -(\alpha + \frac{1}{2})p - 1$ ó $\delta = (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$.

Observaciones

- Los resultados son sharp para el operador variación ya que $\sup_{t>0} |\mathcal{W}_t^\alpha(f)| \leq 2\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)(f)$.
- Es posible deducir los mismos resultados para el semigrupo de Poisson $\mathcal{P}_t^\alpha$.
- Para $\delta = 0$ se satisface el Fenómeno del lápiz 

○
○
○○
○○○

○
○
○○○
○○○
○○○○

○
○○○○○

Teorema

Sea $\alpha > -1$ and $\rho > 2$. El operador oscilación $\mathcal{O}(\mathcal{W}_t^\alpha)$ y el operador variación $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)$ son

- (i) de tipo fuerte (p, p) respecto a $x^\delta dx$ si $-(\alpha + \frac{1}{2})p - 1 < \delta < (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$ and $1 < p < \infty$,
- (ii) de tipo débil $(1, 1)$ respecto a $x^\delta dx$ para $-\alpha - \frac{3}{2} \leq \delta \leq \alpha + \frac{1}{2}$ cuando $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ y para $-1 < \delta \leq 0$ cuando $\alpha = -\frac{1}{2}$,
- (iii) de tipo débil restringido (p, p) respecto a $x^\delta dx$ cuando $1 < p < \infty$ y $\delta = -(\alpha + \frac{1}{2})p - 1$ ó $\delta = (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$.

Observaciones

- Los resultados son sharp para el operador variación ya que $\sup_{t>0} |\mathcal{W}_t^\alpha(f)| \leq 2\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)(f)$.
- Es posible deducir los mismos resultados para el semigrupo de Poisson $\mathcal{P}_t^\alpha$.
- Para $\delta = 0$ se satisface el Fenómeno del lápiz 



Teorema

Sea $\alpha > -1$ and $\rho > 2$. El operador oscilación $\mathcal{O}(\mathcal{W}_t^\alpha)$ y el operador variación $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)$ son

- (i) de tipo fuerte (p, p) respecto a $x^\delta dx$ si $-(\alpha + \frac{1}{2})p - 1 < \delta < (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$ and $1 < p < \infty$,
- (ii) de tipo débil $(1, 1)$ respecto a $x^\delta dx$ para $-\alpha - \frac{3}{2} \leq \delta \leq \alpha + \frac{1}{2}$ cuando $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ y para $-1 < \delta \leq 0$ cuando $\alpha = -\frac{1}{2}$,
- (iii) de tipo débil restringido (p, p) respecto a $x^\delta dx$ cuando $1 < p < \infty$ y $\delta = -(\alpha + \frac{1}{2})p - 1$ ó $\delta = (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$.

Observaciones

- Los resultados son sharp para el operador variación ya que $\sup_{t>0} |\mathcal{W}_t^\alpha(f)| \leq 2\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)(f)$.
- Es posible deducir los mismos resultados para el semigrupo de Poisson $\mathcal{P}_t^\alpha$.
- Para $\delta = 0$ se satisface el Fenómeno del lápiz .



Teorema

Sea $\alpha > -1$ and $\rho > 2$. El operador oscilación $\mathcal{O}(\mathcal{W}_t^\alpha)$ y el operador variación $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)$ son

- (i) de tipo fuerte (p, p) respecto a $x^\delta dx$ si $-(\alpha + \frac{1}{2})p - 1 < \delta < (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$ and $1 < p < \infty$,
- (ii) de tipo débil $(1, 1)$ respecto a $x^\delta dx$ para $-\alpha - \frac{3}{2} \leq \delta \leq \alpha + \frac{1}{2}$ cuando $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ y para $-1 < \delta \leq 0$ cuando $\alpha = -\frac{1}{2}$,
- (iii) de tipo débil restringido (p, p) respecto a $x^\delta dx$ cuando $1 < p < \infty$ y $\delta = -(\alpha + \frac{1}{2})p - 1$ ó $\delta = (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$.

Observaciones

- Los resultados son sharp para el operador variación ya que $\sup_{t>0} |\mathcal{W}_t^\alpha(f)| \leq 2\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)(f)$.
- Es posible deducir los mismos resultados para el semigrupo de Poisson $\mathcal{P}_t^\alpha$.
- Para $\delta = 0$ se satisface el Fenómeno del lápiz .



Teorema

Sea $\alpha > -1$ and $\rho > 2$. El operador oscilación $\mathcal{O}(\mathcal{W}_t^\alpha)$ y el operador variación $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)$ son

- (i) de tipo fuerte (p, p) respecto a $x^\delta dx$ si $-(\alpha + \frac{1}{2})p - 1 < \delta < (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$ and $1 < p < \infty$,
- (ii) de tipo débil $(1, 1)$ respecto a $x^\delta dx$ para $-\alpha - \frac{3}{2} \leq \delta \leq \alpha + \frac{1}{2}$ cuando $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ y para $-1 < \delta \leq 0$ cuando $\alpha = -\frac{1}{2}$,
- (iii) de tipo débil restringido (p, p) respecto a $x^\delta dx$ cuando $1 < p < \infty$ y $\delta = -(\alpha + \frac{1}{2})p - 1$ ó $\delta = (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$.

Observaciones

- Los resultados son sharp para el operador variación ya que $\sup_{t>0} |\mathcal{W}_t^\alpha(f)| \leq 2\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)(f)$.
- Es posible deducir los mismos resultados para el semigrupo de Poisson $\mathcal{P}_t^\alpha$.
- Para $\delta = 0$ se satisface el **Fenómeno del lápiz** ► Dibujo



Teorema

Sea $\alpha > -1$ and $\rho > 2$. El operador oscilación $\mathcal{O}(\mathcal{W}_t^\alpha)$ y el operador variación $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)$ son

- (i) de tipo fuerte (p, p) respecto a $x^\delta dx$ si $-(\alpha + \frac{1}{2})p - 1 < \delta < (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$ and $1 < p < \infty$,
- (ii) de tipo débil $(1, 1)$ respecto a $x^\delta dx$ para $-\alpha - \frac{3}{2} \leq \delta \leq \alpha + \frac{1}{2}$ cuando $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ y para $-1 < \delta \leq 0$ cuando $\alpha = -\frac{1}{2}$,
- (iii) de tipo débil restringido (p, p) respecto a $x^\delta dx$ cuando $1 < p < \infty$ y $\delta = -(\alpha + \frac{1}{2})p - 1$ ó $\delta = (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$.

Observaciones

- Los resultados son sharp para el operador variación ya que $\sup_{t>0} |\mathcal{W}_t^\alpha(f)| \leq 2\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)(f)$.
- Es posible deducir los mismos resultados para el semigrupo de Poisson $\mathcal{P}_t^\alpha$.
- Para $\delta = 0$ se satisface el **Fenómeno del lápiz** 



Teorema

Sea $\alpha > -1$ and $\rho > 2$. El operador oscilación $\mathcal{O}(\mathcal{W}_t^\alpha)$ y el operador variación $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)$ son

- (i) de tipo fuerte (p, p) respecto a $x^\delta dx$ si $-(\alpha + \frac{1}{2})p - 1 < \delta < (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$ and $1 < p < \infty$,
- (ii) de tipo débil $(1, 1)$ respecto a $x^\delta dx$ para $-\alpha - \frac{3}{2} \leq \delta \leq \alpha + \frac{1}{2}$ cuando $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ y para $-1 < \delta \leq 0$ cuando $\alpha = -\frac{1}{2}$,
- (iii) de tipo débil restringido (p, p) respecto a $x^\delta dx$ cuando $1 < p < \infty$ y $\delta = -(\alpha + \frac{1}{2})p - 1$ ó $\delta = (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$.

Observaciones

- Los resultados son sharp para el operador variación ya que $\sup_{t>0} |\mathcal{W}_t^\alpha(f)| \leq 2\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)(f)$.
- Es posible deducir los mismos resultados para el semigrupo de Poisson $\mathcal{P}_t^\alpha$.
- Para $\delta = 0$ se satisface el **Fenómeno del lápiz** 



Teorema

Sea $\alpha > -1$ and $\rho > 2$. El operador oscilación $\mathcal{O}(\mathcal{W}_t^\alpha)$ y el operador variación $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)$ son

- (i) de tipo fuerte (p, p) respecto a $x^\delta dx$ si $-(\alpha + \frac{1}{2})p - 1 < \delta < (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$ and $1 < p < \infty$,
- (ii) de tipo débil $(1, 1)$ respecto a $x^\delta dx$ para $-\alpha - \frac{3}{2} \leq \delta \leq \alpha + \frac{1}{2}$ cuando $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ y para $-1 < \delta \leq 0$ cuando $\alpha = -\frac{1}{2}$,
- (iii) de tipo débil restringido (p, p) respecto a $x^\delta dx$ cuando $1 < p < \infty$ y $\delta = -(\alpha + \frac{1}{2})p - 1$ ó $\delta = (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$.

Observaciones

- Los resultados son sharp para el operador variación ya que $\sup_{t>0} |\mathcal{W}_t^\alpha(f)| \leq 2\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)(f)$.
- Es posible deducir los mismos resultados para el semigrupo de Poisson $\mathcal{P}_t^\alpha$.
- Para $\delta = 0$ se satisface el **Fenómeno del lápiz** ► Dibujo

○
○
○○
○○○

○
○
○○○
○○○
○○○○

○
○

Esquema de prueba

$$\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)(f) \leq \mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_{t, glob}^\alpha)(f) + \mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_{t, loc}^\alpha - \mathcal{T}_{t, loc})(f) + \mathcal{V}_\rho(\mathcal{T}_{t, loc})(f).$$

► Dibujo

- (i) En la región global se acota por dos operadores de tipo Hardy. En esta porción se usan resultados de A. Chicco-E. Harboure (2007) y E. Harboure-C. Segovia-J. L. Torrea-B. Viviani (2006).
- (ii) En la región local, que se compara con el Hermite, se obtiene un operador acotado en $L^p((0, \infty), x^\delta dx)$.
- (iii) En la región local para el Hermite se usan los resultados conocidos de acotaciones con pesos A_p para el semigrupo del calor obtenidos por C. Macías-Menarguez-Torrea-Viviani (2009).



$$\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)(f) \leq \mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_{t, glob}^\alpha)(f) + \mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_{t, loc}^\alpha - \mathcal{T}_{t, loc})(f) + \mathcal{V}_\rho(\mathcal{T}_{t, loc})(f).$$

► Dibujo

- (i) En la región global se acota por dos operadores de tipo Hardy. En esta porción se usan resultados de **A. Chicco-E. Harboure (2007)** y **E. Harboure-C. Segovia-J. L. Torrea-B. Viviani (2006)**.
- (ii) En la región local, que se compara con el Hermite, se obtiene un operador acotado en $L^p((0, \infty), x^\delta dx)$.
- (iii) En la región local para el Hermite se usan los resultados conocidos de acotaciones con pesos A_p para el semigrupo del calor obtenidos por **C. Macías-Menarguez-Torrea-Viviani (2009)**.



$$\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)(f) \leq \mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_{t, glob}^\alpha)(f) + \mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_{t, loc}^\alpha - \mathcal{T}_{t, loc})(f) + \mathcal{V}_\rho(\mathcal{T}_{t, loc})(f).$$

► Dibujo

- (i) En la región global se acota por dos operadores de tipo Hardy. En esta porción se usan resultados de **A. Chicco-E. Harboure (2007)** y **E. Harboure-C. Segovia-J. L. Torrea-B. Viviani (2006)**.
- (ii) En la región local, que se compara con el Hermite, se obtiene un operador acotado en $L^p((0, \infty), x^\delta dx)$.
- (iii) En la región local para el Hermite se usan los resultados conocidos de acotaciones con pesos A_p para el semigrupo del calor obtenidos por **C. Macías-Menarguez-Torrea-Viviani (2009)**.



$$\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)(f) \leq \mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_{t, glob}^\alpha)(f) + \mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_{t, loc}^\alpha - \mathcal{T}_{t, loc})(f) + \mathcal{V}_\rho(\mathcal{T}_{t, loc})(f).$$

► Dibujo

- (i) En la región global se acota por dos operadores de tipo Hardy. En esta porción se usan resultados de **A. Chicco-E. Harboure (2007)** y **E. Harboure-C. Segovia-J. L. Torrea-B. Viviani (2006)**.
- (ii) En la región local, que se compara con el Hermite, se obtiene un operador acotado en $L^p((0, \infty), x^\delta dx)$.
- (iii) En la región local para el Hermite se usan los resultados conocidos de acotaciones con pesos A_p para el semigrupo del calor obtenidos por **C. Macías-Menarguez-Torrea-Viviani (2009)**.



Teorema

Sea $\alpha > -1$ y $\rho > 2$. El operador oscilación $\mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha,\varepsilon})$ y el operador variación $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{R}_{\alpha,\varepsilon})$ son

- (i) de tipo fuerte (p, p) respecto a $x^\delta dx$ si $-(\alpha + \frac{3}{2})p - 1 < \delta < (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$ y $1 < p < \infty$,
- (ii) de tipo débil $(1, 1)$ respecto a $x^\delta dx$ para $-\alpha - \frac{5}{2} \leq \delta \leq \alpha + \frac{1}{2}$,
- (iii) de tipo débil restringido (p, p) respecto a $x^\delta dx$ si $1 < p < \infty$ and $\delta = -(\alpha + \frac{3}{2})p - 1$ ó $\delta = (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$.



Teorema

Sea $\alpha > -1$ y $\rho > 2$. El operador oscilación $\mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha,\varepsilon})$ y el operador variación $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{R}_{\alpha,\varepsilon})$ son

- (i) de tipo fuerte (p, p) respecto a $x^\delta dx$ si $-(\alpha + \frac{3}{2})p - 1 < \delta < (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$ y $1 < p < \infty$,
- (ii) de tipo débil $(1, 1)$ respecto a $x^\delta dx$ para $-\alpha - \frac{5}{2} \leq \delta \leq \alpha + \frac{1}{2}$,
- (iii) de tipo débil restringido (p, p) respecto a $x^\delta dx$ si $1 < p < \infty$ and $\delta = -(\alpha + \frac{3}{2})p - 1$ ó $\delta = (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$.



Teorema

Sea $\alpha > -1$ y $\rho > 2$. El operador oscilación $\mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha,\varepsilon})$ y el operador variación $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{R}_{\alpha,\varepsilon})$ son

- (i) de tipo fuerte (p, p) respecto a $x^\delta dx$ si $-(\alpha + \frac{3}{2})p - 1 < \delta < (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$ y $1 < p < \infty$,
- (ii) de tipo débil $(1, 1)$ respecto a $x^\delta dx$ para $-\alpha - \frac{5}{2} \leq \delta \leq \alpha + \frac{1}{2}$,
- (iii) de tipo débil restringido (p, p) respecto a $x^\delta dx$ si $1 < p < \infty$ and $\delta = -(\alpha + \frac{3}{2})p - 1$ ó $\delta = (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$.



Teorema

Sea $\alpha > -1$ y $\rho > 2$. El operador oscilación $\mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha,\varepsilon})$ y el operador variación $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{R}_{\alpha,\varepsilon})$ son

- (i) de tipo fuerte (p, p) respecto a $x^\delta dx$ si $-(\alpha + \frac{3}{2})p - 1 < \delta < (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$ y $1 < p < \infty$,
- (ii) de tipo débil $(1, 1)$ respecto a $x^\delta dx$ para $-\alpha - \frac{5}{2} \leq \delta \leq \alpha + \frac{1}{2}$,
- (iii) de tipo débil restringido (p, p) respecto a $x^\delta dx$ si $1 < p < \infty$ and $\delta = -(\alpha + \frac{3}{2})p - 1$ ó $\delta = (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$.



Teorema

Los operadores $\mathcal{O}(\mathcal{W}_t^\alpha)$ y $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)$ no mapean $L^\infty((0, \infty), dx)$ en $L^\infty((0, \infty), dx)$.



Teorema

Los operadores $\mathcal{O}(\mathcal{W}_t^\alpha)$ y $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)$ no mapean $L^\infty((0, \infty), dx)$ en $L^\infty((0, \infty), dx)$.

Si $\alpha > -1/2$, $H^1(L_\alpha)$ fue introducido por **Dziubanski (2008)**.

$$H^1(L_\alpha) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^+) / \sup_{t>0} |\mathcal{W}_t^\alpha(f)| \in L^1(\mathbb{R}^+)\}$$

.



Teorema

Los operadores $\mathcal{O}(\mathcal{W}_t^\alpha)$ y $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)$ no mapean $L^\infty((0, \infty), dx)$ en $L^\infty((0, \infty), dx)$.

Si $\alpha > -1/2$, $H^1(L_\alpha)$ fue introducido por **Dziubanski (2008)**.

$$H^1(L_\alpha) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^+) / \sup_{t>0} |\mathcal{W}_t^\alpha(f)| \in L^1(\mathbb{R}^+)\}$$

Betancor-Garrigós-Dziubanski(2009-2010) relacionan $H^1(L_\alpha)$ y H_H^1



Teorema

Los operadores $\mathcal{O}(\mathcal{W}_t^\alpha)$ y $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{W}_t^\alpha)$ no mapean $L^\infty((0, \infty), dx)$ en $L^\infty((0, \infty), dx)$.

Si $\alpha > -1/2$, $H^1(L_\alpha)$ fue introducido por **Dziubanski (2008)**.

$$H^1(L_\alpha) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^+) / \sup_{t>0} |\mathcal{W}_t^\alpha(f)| \in L^1(\mathbb{R}^+)\}$$

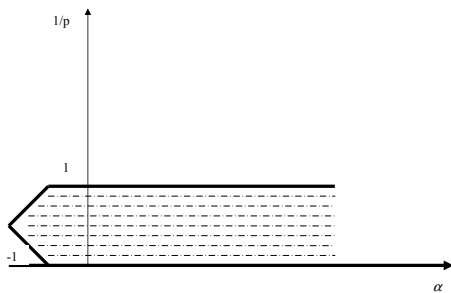
Betancor-Garrigós-Dziubanski(2009-2010) relacionan $H^1(L_\alpha)$ y H_H^1

Teorema

Sea $\alpha > -1/2$. Una función $f \in L^1(\mathbb{R}^+, dx)$ está en $H^1(L_\alpha)$ si y sólo si $\mathcal{V}_\rho(\{\mathcal{W}_t^\alpha\}_{t>0}, f) \in L^1(\mathbb{R}^+, dx)$.



Esquema de prueba





Esquema de prueba

