Espacios Lipschitz? en el contexto de los $L^{p(\cdot)}$

Lic. Mauricio Ramseyer

30 de abril de 2010

En líneas generales...

- Definiciones. (¿Qué?)
- Motivación. (¿Por qué?)
- Investigadores involucradas (¿Quiénes?).
- Algunos resultados conocidos.
- Condiciones sobre la función p.
- Resultados obtenidos.
- Temas a abordar.

Sobre la función $p(\cdot)$

Diremos que una función medible $p : \mathbb{R}^n \to [1; \infty)$ es una función exponente.

Sobre la función $p(\cdot)$

Diremos que una función medible $p : \mathbb{R}^n \to [1; \infty)$
es una función exponente.

$$p_-(\Omega) = \inf_{x \in \Omega} p(x)$$

$$p_- = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$$

Sobre la función $p(\cdot)$

Diremos que una función medible $p : \mathbb{R}^n \to [1; \infty)$
es una función exponente.

$$p_-(\Omega) = \operatorname*{ínf}_{x \in \Omega} p(x)$$

$$p_+(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} p(x)$$

$$p_- = \operatorname*{ínf}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$$

$$p_+ = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$$

Sobre el espacio $L^{p(\cdot)}$

$f \in L^{p(\cdot)}$ si la integral

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} dx}\ < \infty$$

Modular $\longrightarrow \varrho_{p(\cdot)}(f)$

Sobre el espacio $L^{p(\cdot)}$

$f \in L^{p(\cdot)}$ si la integral

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} dx}\ < \infty$$

Modular $\longrightarrow \varrho_{p(\cdot)}(f)$

Asociamos la norma de Luxemburg

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)^{p(y)} dy \leq 1\right\}$$

Motivación

- Modelar Fluídos No-Newtonianos – Por ejemplo Fluídos electroreológicos.
- Procesamiento de imágenes.

Motivación

- Modelar Fluídos No-Newtonianos – Por ejemplo Fluídos electroreológicos.
- Procesamiento de imágenes.
- Las aplicaciones se asocian a cambios bruscos de punto a punto en algún sistema físico.

Internacionales

- Wladyslaw Orlicz (1931)

Internacionales

- Wladyslaw Orlicz (1931)
- J. Musielak (1983)

Algunos Atrapados por $L^{p(\cdot)}$

Internacionales

- Wladyslaw Orlicz (1931)
- J. Musielak (1983)
- Ondrej Kováčík
- J. Rákosník (1991)

Algunos Atrapados por $L^{p(\cdot)}$

Internacionales

- Wladyslaw Orlicz (1931)
- J. Musielak (1983)
- Ondrej Kováčík
- J. Rákosník (1991)

- Lars. Diening
- David Cruz-Uribe
- Alberto Fiorenza
- Aleš Nekvinda
- Claudia Capone
- Vakhtang M. Kokilashvili
- Stefan Samko
- Peter Hästö
- Petteri, Harjulehto
- S. Roudenko

Algunos Atrapados por $L^{p(\cdot)}$

Internacionales

- Wladyslaw Orlicz (1931)
- J. Musielak (1983)
- Ondrej Kováčík
- J. Rákosník (1991)

- Lars. Diening
- David Cruz-Uribe
- Alberto Fiorenza
- Aleš Nekvinda
- Claudia Capone
- Vakhtang M. Kokilashvili
- Stefan Samko
- Peter Hästö
- Petteri, Harjulehto
- S. Roudenko

Imalenses

- Gladis
- Osvaldo
- Oscar
- Nora
- Hugo
- Estefanía
- Wilfredo
- Mauricio
- ?

Propiedades Básicas – (Kováčík y Rákosník, 1991)

- Son espacios de Banach.

Propiedades Básicas – (Kováčík y Rákosník, 1991)

- Son espacios de Banach.
- Vale la desigualdad de Hölder.

Teorema

Sea p una función exponente, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\, dx \;\leq\; C \;\|f\|_{p(\cdot)} \,\|f\|_{p'(\cdot)} \, ,$$

para toda $f \in L^{p(\cdot)}$ y $g \in L^{p'(\cdot)}$.

Propiedades Básicas – (Kováčík y Rákosník, 1991)

- Son espacios de Banach.
- Vale la desigualdad de Hölder.
- Son espacios reflexivos si $1 < p_- \leq p_+ < \infty$.

Propiedades Básicas – (Kováčík y Rákosník, 1991)

- Son espacios de Banach.
- Vale la desigualdad de Hölder.
- Son espacios reflexivos si $1 < p_- \leq p_+ < \infty$.
- Las funciones continuas son densas si $p_+ < \infty$.

Propiedades Básicas – (Kováčík y Rákosník, 1991)

- Son espacios de Banach.
- Vale la desigualdad de Hölder.
- Son espacios reflexivos si $1 < p_- \leq p_+ < \infty$.
- Las funciones continuas son densas si $p_+ < \infty$.
- Vale la inclusión de espacios para medidas finitas.

Si $p(x) \leq q(x)$ **c.t.p.** $x \in \Omega$ **con** $0 < |\Omega| < \infty$ **entonces:**

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq (|\Omega| + 1)\, \|f\|_{q(\cdot)}$$

Propiedades Básicas – (Kováčík y Rákosník, 1991)

- Son espacios de Banach.
- Vale la desigualdad de Hölder.
- Son espacios reflexivos si $1 < p_- \leq p_+ < \infty$.
- Las funciones continuas son densas si $p_+ < \infty$.
- Vale la inclusión de espacios para medidas finitas.
- Se pierde la relación de igualdad entre el modular y la norma.

$$\min\left\{\|f\|_{p(\cdot)}^{p_-}, \|f\|_{p(\cdot)}^{p_+}\right\} \leq \varrho_{p(\cdot)}(f) \leq \max\left\{\|f\|_{p(\cdot)}^{p_-}, \|f\|_{p(\cdot)}^{p_+}\right\}$$

Propiedades Básicas – (Kováčík y Rákosník, 1991)

- Son espacios de Banach.
- Vale la desigualdad de Hölder.
- Son espacios reflexivos si $1 < p_- \leq p_+ < \infty$.
- Las funciones continuas son densas si $p_+ < \infty$.
- Vale la inclusión de espacios para medidas finitas.
- Se pierde la relación de igualdad entre el modular y la norma.
- El operador traslación no es continuo.

Dada una bola B, existe $f \in L^{p(\cdot)}$ tal que $\tau_h \notin L^{p(\cdot)}$

$$\tau_h(f)(x) = f(x - h)$$

Continuidad Log-Hölder

Sea p una función exponente.

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C_0}{-\log|x-y|}, \quad |x-y| \leq \frac{1}{2} \qquad (\mathrm{LH}_0)$$

Bolas chicas

$$\sup_{x,y\in B} |B|^{-|p(x)-p(y)|} \leq \text{máx}\{1, |B|^{p_-(B)-p_+(B)}\} \leq C$$

Continuidad Log-Hölder

Sea p una función exponente.

$$|p(x)-p(y)| \leq \frac{C_0}{-\log|x-y|}, \quad |x-y| \leq \frac{1}{2} \qquad (\mathrm{LH}_0)$$

$$|p(x)-p(y)| \leq \frac{C_\infty}{\log(e+|x|)}, \quad |y| \geq |x| \qquad (\mathrm{LH}_\infty)$$

Bolas relativamente lejos del origen

$$\sup_{x,y\in B} |B|^{|p(x)-p(y)|} \leq |B|^{p_+(B)-p_-(B)} \leq C$$

Continuidad Log-Hölder

Sea p una función exponente. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C_0}{-\log|x-y|}, \quad |x-y| \leq \frac{1}{2} \qquad (\mathrm{LH}_0)$$

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C_\infty}{\log(e + |x|)}, \quad |y| \geq |x| \qquad (\mathrm{LH}_\infty)$$

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C_0}{\log(e + \frac{1}{|x-y|})}, \quad x, y \in \Omega \qquad (\mathrm{LH'}_0)$$

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{C_\infty}{\log(e + |x|)}, \quad x \in \Omega \qquad (\mathrm{LH'}_\infty)$$

Acotaciones Conocidas

Para $0 \leq \alpha < n$

$$M_\alpha f(x) = \sup_{B \ni x} |B|^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_B |f(y)|\, dy \quad ,$$

Teorema

Sea p una función exponente tal que $p \in LH_0 \cap LH_\infty$ y $1 < p_- \leq p_+ \leq \dfrac{n}{\alpha}$, entonces

$$\|M_\alpha f\|_{q(\cdot)} \leq C \ \|f\|_{p(\cdot)}$$

donde $\dfrac{1}{p(x)} - \dfrac{1}{q(x)} = \dfrac{\alpha}{n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$

Algunas Acotaciones Conocidas

Caso $\alpha = 0$

L. Diening – (2001)

- Dominio Acotado
- $p_+ < \infty$
- $p \in LH_0$

Algunas Acotaciones Conocidas

Caso $\alpha = 0$

L. Diening – (2001)

- $p_+ < \infty$
- $p \in \mathrm{LH}_0$
- $p(x) = p, \quad |x| \geq c$

Algunas Acotaciones Conocidas

Caso $\alpha = 0$

L. Diening – (2001)

- $p_+ < \infty$
- $p \in LH_0$
- $p(x) = p, \quad |x| \geq c$

C. Capone,
D. Cruz-Uribe,SFO,
A. Fiorenza,
C. J. Neugebauer
(2004)

- $p_+ < \infty$
- $p \in LH_0 \cap LH_\infty$

Algunas Acotaciones Conocidas

Caso $\alpha = 0$

L. Diening – (2001)

- $p_+ < \infty$
- $p \in LH_0$
- $p(x) = p, \quad |x| \geq c$

C. Capone,
D. Cruz-Uribe,SFO,
A. Fiorenza,
C. J. Neugebauer
(2004)

- $p_+ < \infty$
- $p \in LH_0 \cap LH_\infty$

Aleš A. Nekvinda,
(2004)

- $p_+ < \infty$
- $p \in LH_0$
- Condición más débil en el ∞

Algunas Acotaciones Conocidas

Caso $\alpha = 0$

L. Diening – (2001)

- $p_+ < \infty$
- $p \in LH_0$
- $p(x) = p, \quad |x| \geq c$

C. Capone,
D. Cruz-Uribe,SFO,
A. Fiorenza,
C. J. Neugebauer
(2004)

- $p_+ < \infty$
- $p \in LH_0 \cap LH_\infty$

Aleš A. Nekvinda,
(2004)

- $p_+ < \infty$
- $p \in LH_0$
- Condición más débil en el ∞

Caso $\alpha > 0$

V. Kokilashvili – S. Samko
C. Capone, – D. Cruz-Uribe,SFO,
A. Fiorenza,
(2000 – 2003)

- $p_+ \leq \dfrac{n}{\alpha}$
- $p \in LH_0 \cap LH_\infty$

Algunas Acotaciones Conocidas

Caso $\alpha = 0$

L. Diening – (2001)

- $p_+ < \infty$
- $p \in \mathrm{LH}_0$
- $p(x) = p, \quad |x| \geq c$

C. Capone,
D. Cruz-Uribe,SFO,
A. Fiorenza,
C. J. Neugebauer
(2004)

- $p_+ < \infty$
- $p \in \mathrm{LH}_0 \cap \mathrm{LH}_\infty$

Aleš A. Nekvinda,
(2004)

- $p_+ < \infty$
- $p \in \mathrm{LH}_0$
- Condición más débil en el ∞

Caso $\alpha > 0$

V. Kokilashvili – S. Samko
C. Capone, – D. Cruz-Uribe,SFO,
A. Fiorenza,
(2000 – 2003)

- $p_+ \leq \dfrac{n}{\alpha}$
- $p \in \mathrm{LH}_0 \cap \mathrm{LH}_\infty$

O. Salinas – G. Pradolini
O. Gorosito – (2008)

- $p_+ < \dfrac{n}{\alpha}$
- $p \in \mathrm{LH}_0 \cap \mathrm{LH}_\infty$
- Dan una estimación puntual para M_α

Definición del espacio $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$

Definimos el espacio $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ como el espacio de las funciones $f \in L^1_{loc}$ para las cuales existe una constante $C > 0$ tal que:

Definición del espacio $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$

Definimos el espacio $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ como el espacio de las funciones $f \in L^1_{loc}$ para las cuales existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\frac{1}{\|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)} |B|^{\frac{\alpha}{n}}} \int_B |f(x) - m_B f| \, dx \leq \; C$$

para toda bola $B \in \mathbb{R}^n$.

Definición del espacio $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$

Definimos el espacio $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ como el espacio de las funciones $f \in L^1_{loc}$ para las cuales existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\frac{1}{\|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)} |B|^{\frac{\alpha}{n}}} \int_B |f(x) - m_B f| \, dx \leq C$$

para toda bola $B \in \mathbb{R}^n$.

$$\|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} = \inf C$$

Resultado Principal Obtenido

Teorema

Sea $0 < \alpha < n$*, si* p *una función exponente, entonces el operador* I_α *puede extenderse a un operador* $\widetilde{I}_\alpha : L^{p(\cdot)} \longrightarrow \mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ *dado por*

$$\widetilde{I}_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1-\chi_{B(0,1)}(y)}{|y|^{n-\alpha}} \right] f(y)\, dy$$

Resultado Principal Obtenido

Teorema

Sea $0 < \alpha < n$*, si p una función exponente, entonces el operador* I_α *puede extenderse a un operador* $\widetilde{I}_\alpha : L^{p(\cdot)} \longrightarrow \mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ *dado por*

$$\widetilde{I}_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1-\chi_{B(0,1)}(y)}{|y|^{n-\alpha}} \right] f(y)\, dy$$

si y sólo si p satisface

$$\left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - 2B}}{|x_B - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \leq C\, |B|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{n} - 1} \left\| \chi_{2B} \right\|_{p'(\cdot)} \qquad (1)$$

Esquema de la demostración – Suficiencia

Sea $B \subset \mathbb{R}^n$

Consideramos

$$f_1 = f\chi_{2B} \quad \text{y} \quad f_2 = f - f_1$$

Esquema de la demostración – Suficiencia

Para $f_1 = f\chi_{2B}$

$$\int_B \left|\widetilde{I}_\alpha f_1(x) - m_B \widetilde{I}_\alpha f_1\right| \, dx \quad \leq \quad C \int_{2B} f(y) \left(\int_B \frac{dx}{|x-y|^{n-\alpha}} \right) dy$$

Esquema de la demostración – Suficiencia

Para $\quad f_1 = f\chi_{2B}$

$$\int_B \left|\widetilde{I}_\alpha f_1(x) - m_B \widetilde{I}_\alpha f_1\right| dx \leq C \int_{2B} f(y) \left(\int_B \frac{dx}{|x-y|^{n-\alpha}} \right) dy$$

$$\leq C\, |B|^{\frac{\alpha}{n}} \int_{2B} f(y)\, dy$$

Esquema de la demostración – Suficiencia

Para $\quad f_1 = f\chi_{2B}$

$$
\begin{aligned}
\int_B \left|\widetilde{I}_\alpha f_1(x) - m_B \widetilde{I}_\alpha f_1\right| dx \quad &\le \quad C \int_{2B} f(y) \left(\int_B \frac{dx}{|x-y|^{n-\alpha}} \right) dy \\
&\le \quad C\, |B|^{\frac{\alpha}{n}} \int_{2B} f(y)\, dy \\
&\le \quad C\, |B|^{\frac{\alpha}{n}} \, \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)} \, \|f\|_{p(\cdot)} \, .
\end{aligned}
$$

Hölder

Esquema de la demostración – Suficiencia

Para $\quad f_2 = f\chi_{\mathbb{R}^n - 2B}$

Dado que

$$\left|\widetilde{I}_\alpha f_2(x) - m_B \widetilde{I}_\alpha f_2\right| \leq C\,|B|^{\frac{1}{n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n - 2B} \frac{f(y)}{|x_B - y|^{n-\alpha+1}}\,dy \quad ,$$

Esquema de la demostración – Suficiencia

Para $\quad f_2 = f\chi_{\mathbb{R}^n-2B}$

Dado que

$$\left|\widetilde{I}_\alpha f_2(x) - m_B \widetilde{I}_\alpha f_2\right| \leq C\,|B|^{\frac{1}{n}} \int_{\mathbb{R}^n-2B} \frac{f(y)}{|x_B - y|^{n-\alpha+1}}\,dy \quad ,$$

tenemos

$$\int_B \left|\widetilde{I}_\alpha f_2(x) - m_B \widetilde{I}_\alpha f_2\right| dx \quad \leq \quad C\,|B|^{\frac{1}{n}+1} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\frac{\chi_{\mathbb{R}^n-2B}}{|x_B - y|^{n-\alpha+1}}\,dy$$

Esquema de la demostración – Suficiencia

$$\text{Para} \qquad f_2 = f\chi_{\mathbb{R}^n - 2B}$$

Dado que

$$\left|\widetilde{I}_\alpha f_2(x) - m_B \widetilde{I}_\alpha f_2\right| \le C\,|B|^{\frac{1}{n}} \int_{\mathbb{R}^n - 2B} \frac{f(y)}{|x_B - y|^{n-\alpha+1}}\,dy \quad ,$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\int_B \left|\widetilde{I}_\alpha f_2(x) - m_B \widetilde{I}_\alpha f_2\right| dx \quad &\le \quad C\,|B|^{\frac{1}{n}+1} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\frac{\chi_{\mathbb{R}^n - 2B}}{|x_B - y|^{n-\alpha+1}}\,dy \\
&\le \quad C\,|B|^{\frac{1}{n}+1} \left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - 2B}}{|x_B - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)}
\end{aligned}$$

Esquema de la demostración – Suficiencia

Para $\quad f_2 = f\chi_{\mathbb{R}^n-2B}$

Dado que

$$\left|\widetilde{I}_\alpha f_2(x) - m_B \widetilde{I}_\alpha f_2\right| \leq C\,|B|^{\frac{1}{n}} \int_{\mathbb{R}^n-2B} \frac{f(y)}{|x_B - y|^{n-\alpha+1}}\,dy \quad ,$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\int_B \left|\widetilde{I}_\alpha f_2(x) - m_B \widetilde{I}_\alpha f_2\right| dx \quad &\leq \quad C\,|B|^{\frac{1}{n}+1} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\frac{\chi_{\mathbb{R}^n-2B}}{|x_B - y|^{n-\alpha+1}}\,dy \\
&\leq \quad C\,|B|^{\frac{1}{n}+1} \left\|\frac{\chi_{\mathbb{R}^n-2B}}{|x_B - \cdot|^{n-\alpha+1}}\right\|_{p'(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)} \\
&\leq \quad C\,|B|^{\frac{\alpha}{n}}\,\|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)}\,\|f\|_{p(\cdot)} \quad .
\end{aligned}$$

$\uparrow$

Hölder $\quad + \quad$ Hipótesis sobre el p

Esquema de la demostración – Necesidad

Considerando conjuntos adecuados en $\mathbb{R}^n$ se puede probar

$$\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|z-y|^{n-\alpha}} \geq \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} \, .$$

Esquema de la demostración – Necesidad

Considerando conjuntos adecuados en $\mathbb{R}^n$ se puede probar

$$\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|z-y|^{n-\alpha}} \geq \frac{C\,|B|^{\frac{1}{n}}}{|x_B-y|^{n-\alpha+1}}\ .$$

Esquema de la demostración – Necesidad

Considerando conjuntos adecuados en $\mathbb{R}^n$ se puede probar

$$\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|z-y|^{n-\alpha}} \geq \frac{C\,|B|^{\frac{1}{n}}}{|x_B-y|^{n-\alpha+1}} \,.$$

$$C\ \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)}\,|B|^{\frac{\alpha}{n}} \quad \geq \quad |B|^{1+\frac{1}{n}} \int_A \frac{f(y)}{|x_B-y|^{n-\alpha+1}}\,dy$$

Esquema de la demostración – Necesidad

Considerando conjuntos adecuados en $\mathbb{R}^n$ se puede probar

$$\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|z-y|^{n-\alpha}} \geq \frac{C\,|B|^{\frac{1}{n}}}{|x_B-y|^{n-\alpha+1}}\ .$$

$$C\ \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)}\,|B|^{\frac{\alpha}{n}} \quad \geq \quad |B|^{1+\frac{1}{n}} \int_A \frac{f(y)}{|x_B-y|^{n-\alpha+1}}\,dy$$

Con lo cual

$$\int_{\mathbb{R}^n-2B} \frac{f(y)}{|x_B-y|^{n-\alpha+1}}\,dy \leq C\,|B|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{n}-1}\,\|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)}$$

para toda f tal que $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, en particular para el supremo.

Esquema de la demostración – Necesidad

Teorema

Sea p una función exponente, definimos

$$|||f||| = \sup_{\|g\|_{p'(\cdot)} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx$$

Esquema de la demostración – Necesidad

Teorema

Sea p una función exponente, definimos

$$|||f||| = \sup_{\|g\|_{p'(\cdot)} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\, dx$$

Entonces, $L^{p(\cdot)} = \{f : |||f||| < \infty\}$ *y además*

$$c_1 \, \|f\|_{p(\cdot)} \leq |||f||| \leq c_2 \, \|f\|_{p(\cdot)}$$

Esquema de la demostración – Necesidad

Teorema

Sea p una función exponente, definimos

$$|||f||| = \sup_{\|g\|_{p'(\cdot)} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx$$

Entonces, $L^{p(\cdot)} = \{f : |||f||| < \infty\}$ *y además*

$$c_1\ \|f\|_{p(\cdot)} \leq |||f||| \leq c_2\ \|f\|_{p(\cdot)}$$

$$\left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - 2B}}{|x_B - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \leq C \left|\left|\left| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - 2B}}{|x_B - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right|\right|\right|$$

Esquema de la demostración – Necesidad

Teorema

Sea p una función exponente, definimos

$$|||f||| = \sup_{\|g\|_{p'(\cdot)} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) \, dx$$

Entonces, $L^{p(\cdot)} = \{f : |||f||| < \infty\}$ *y además*

$$c_1 \ \|f\|_{p(\cdot)} \leq |||f||| \leq c_2 \ \|f\|_{p(\cdot)}$$

$$\left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - 2B}}{|x_B - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \leq \ C \ |B|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{n} - 1} \, \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)}$$

Duplicación

(1) $$\|\chi_{4B}\|_{p'(\cdot)} \leq C \, \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)}$$

Duplicación

(1) $\|\chi_{4B}\|_{p'(\cdot)} \leq C \, \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)}$

$$\|\chi_{4B}\|_{p'(\cdot)} \leq |B|^{\frac{1}{n}-\frac{\alpha}{n}+1} \left\| \frac{1}{|B|^{\frac{1}{n}-\frac{\alpha}{n}+1}} \right\|_{p'(\cdot)}$$

$$\leq C \, |B|^{\frac{1}{n}-\frac{\alpha}{n}+1} \left(\left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - 2B}}{|x_B - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} + \left\| \frac{\chi_{2B}}{|B|^{\frac{1}{n}-\frac{\alpha}{n}+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \right)$$

Duplicación

(1) $$\|\chi_{4B}\|_{p'(\cdot)} \leq C \, \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)}$$

$$\begin{aligned}
\|\chi_{4B}\|_{p'(\cdot)} &\leq |B|^{\frac{1}{n}-\frac{\alpha}{n}+1} \left\| \frac{1}{|B|^{\frac{1}{n}-\frac{\alpha}{n}+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq C \, |B|^{\frac{1}{n}-\frac{\alpha}{n}+1} \left(\left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n-2B}}{|x_B - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} + \left\| \frac{\chi_{2B}}{|B|^{\frac{1}{n}-\frac{\alpha}{n}+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \right) \\
&\leq C \, \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)} \,.
\end{aligned}$$

Condición no Vacía

Condición no Vacía

Proposición

Sea p una función exponente tal que $p = p_-$ fuera de la bola unitaria, con $1 < p_- \leq p_+ < \dfrac{n}{(\alpha - 1)^+}$ *y*

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{\log \frac{1}{|x-y|}} \quad \forall x, y : |x - y| \leq 1/2 \ ,$$

entonces p satisface la condición del teorema.

Condición no Vacía

Proposición

Sea $D = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^n} B(z, \frac{1}{4})$*. Sea* p *una función exponente tal que* $p = p_+$ *sobre* D^c*, con* $1 < p_- \le p_+ < \dfrac{n}{(\alpha - 1)^+}$ *y*

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C}{\log \frac{1}{|x-y|}} \quad \forall x, y : |x-y| \le 1/2 \ ,$$

entonces p *satisface la condición del teorema.*

Proposición

Sea $0 < \alpha < n$ y p una función exponente. Si $p'(\cdot)$ duplica, el espacio $f \in \mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ coincide con una versión puntual $\Lambda_{p(\cdot)}(\alpha)$ que consiste en todas las funciones f para las cuales existe una constante C que satisface:

$$|f(x) - f(y)| \leq C \int_0^{2|x-y|} \left(\left\| \frac{\chi_{B(x,2t)}}{|x - \cdot|^{n-\alpha}} \right\|_{p'(\cdot)} + \left\| \frac{\chi_{B(y,2t)}}{|y - \cdot|^{n-\alpha}} \right\|_{p'(\cdot)} \right) \frac{dt}{t},$$

para casi todo punto $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Condición Puntual

Resultadito

Sea $0 < \alpha < n$ *y* p *una función exponente con* $\frac{n}{\alpha} < p_- \leq p_+ < \frac{n}{(\alpha-1)^+}$.

Consideremos B *una bola tal que* $|B| \leq C$. *Entonces se tiene la siguiente estimación puntual*

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x-y|^{\alpha - \frac{n}{p_-(2B)}},$$

para casi todo punto $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Hacia la condición puntual

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, consideramos $B = B(x, |x-y|)$ y $B' = B(y, |x-y|)$, sea $f \in \mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - m_B f| + |f(y) - m_{B'} f| + |m_B f - m_{B'} f|$$

$$B_i = B(x, 2^{-i}|x-y|)$$

Hacia la condición puntual

$$B_i = B(x, 2^{-i}|x-y|)$$

$$\begin{aligned} |f(x) - m_B f| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |m_{B_{i+1}} f - m_{B_i} f| \\ &\leq C \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^{-1} \int_{B_i} |f(z) - m_{B_i} f|\, dz \end{aligned}$$

Hacia la condición puntual

$$B_i = B(x, 2^{-i}|x-y|)$$

$$\begin{aligned}
|f(x) - m_B f| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |m_{B_{i+1}} f - m_{B_i} f| \\
&\leq C \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^{-1} \int_{B_i} |f(z) - m_{B_i} f| \, dz \\
&\leq C \, \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} \sum_{i=1}^{\infty} |B|^{\frac{\alpha}{n}-1} \|\chi_{2B_i}\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq C \, \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} \sum_{i=1}^{\infty} \left\| \frac{\chi_{2B_i}}{|x-\cdot|^{n-\alpha}} \right\|_{p'(\cdot)}
\end{aligned}$$

Hacia la condición puntual

$$B_i = B(x, 2^{-i}|x-y|)$$

$$\begin{aligned}
|f(x) - m_B f| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |m_{B_{i+1}} f - m_{B_i} f| \\
&\leq C \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^{-1} \int_{B_i} |f(z) - m_{B_i} f| \, dz \\
&\leq C \, \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} \sum_{i=1}^{\infty} |B|^{\frac{\alpha}{n}-1} \|\chi_{2B_i}\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq C \, \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} \sum_{i=1}^{\infty} \left\| \frac{\chi_{2B_i}}{|x-\cdot|^{n-\alpha}} \right\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq C \, \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} \int_0^{|x-y|} \left\| \frac{\chi_{B(x,2t)}}{|x-\cdot|^{n-\alpha}} \right\|_{p'(\cdot)} \frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

Desde la condición puntual

Sea $x_B \in \mathbb{R}^n$, $R > 0 \to B_R = B(x_B, R)$.
Es suficiente probar

$$\int_{B_R} \int_{B_R} |f(x) - f(y)|\, dy\, dx \leq C\, |B_R|^{\frac{\alpha}{n}+1} \, \|\chi_{2B_R}\|_{p'(\cdot)} \ ,$$

Desde la condición puntual

Sea $x_B \in \mathbb{R}^n$, $R > 0 \to B_R = B(x_B, R)$.
Es suficiente probar

$$\int_{B_R} \int_{B_R} |f(x) - f(y)| \, dy \, dx \leq C \, |B_R|^{\frac{\alpha}{n}+1} \, \|\chi_{2B_R}\|_{p'(\cdot)} \ ,$$

utilizando la condición puntual

$$\int_{B_R} \int_{B_R} |f(x) - f(y)| \, dy \, dx$$

$$\leq \quad C \int_{B_R} \int_{B_R} \left(\int_0^{2|x-y|} \left(\left\| \frac{\chi_{B(x,2t)}}{|x - \cdot|^{n-\alpha}} \right\|_{p'(\cdot)} + \left\| \frac{\chi_{B(y,2t)}}{|y - \cdot|^{n-\alpha}} \right\|_{p'(\cdot)} \right) \frac{dt}{t} \right) dy \, dx \ ,$$

Desde la condición puntual

Sea $x_B \in \mathbb{R}^n$, $R > 0 \to B_R = B(x_B, R)$.
Es suficiente probar

$$\int_{B_R}\int_{B_R} |f(x) - f(y)|\, dy\, dx \leq C\, |B_R|^{\frac{\alpha}{n}+1} \, \|\chi_{2B_R}\|_{p'(\cdot)} \ ,$$

utilizando la condición puntual

$$\int_{B_R}\int_{B_R} |f(x) - f(y)|\, dy\, dx$$
$$\leq \quad C \int_{B_R}\int_{B_R} \left(\int_0^{2|x-y|} \left(\left\| \frac{\chi_{B(x,2t)}}{|x-\cdot|^{n-\alpha}} \right\|_{p'(\cdot)} + \left\| \frac{\chi_{B(y,2t)}}{|y-\cdot|^{n-\alpha}} \right\|_{p'(\cdot)} \right) \frac{dt}{t} \right) dy\, dx \ ,$$

será suficiente probar que

$$\int_{B_R}\int_0^{2R} \left\| \frac{\chi_{B(y,2t)}}{|y-\cdot|^{n-\alpha}} \right\|_{p'(\cdot)} \frac{dt}{t}\, dy \leq |B_R|^{\frac{\alpha}{n}} \, \|\chi_{2B_R}\|_{p'(\cdot)}$$

- $|x_B| > 3R$

Resultadito

Si p es tal que $\frac{n}{\alpha} < p_- \leq p_+ < \frac{n}{(\alpha-1)^+}$; *satisface la condición* $LH_\infty \cap LH_0$ *y* p' *duplica, entonces*

$$\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)} \leq C\, t^{\frac{n}{p'_+(2B_R)}} \qquad \forall\ x \in B_R, 0 < t < R.$$

Intentos

- $|x_B| > 3R$
- $|x_B| \leq 3R$ $\qquad C|x| \not\leq |y| \quad \forall\, x, y \in B_R$

Intentos

- $|x_B| > 3R$
- $|x_B| \le 3R \qquad\qquad C|x| \not\leq |y| \quad \forall\, x, y \in B_R$

Mirar en el contexto de espacios de funciones a valores vectoriales

Espacios de funciones a valores vectoriales

$(A, \|\cdot\|_A)$ espacio de Banach.

$$L^p(\mathbb{R}^n, A) = \{f \text{ medibles } / \ f : \mathbb{R}^n \to A \quad \|f\|_p < \infty\}$$

donde

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_A^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Espacios de funciones a valores vectoriales

$(A, \|\cdot\|_A)$ espacio de Banach.

$$L^p(\mathbb{R}^n, A) = \{f \text{ medibles } / \, f : \mathbb{R}^n \to A \quad \|f\|_p < \infty\}$$

donde

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_A^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$(L^p(\mathbb{R}^n, A), \|\cdot\|_p)$ **es Banach**

Dualidad: si A^* es el dual topológico de A

$$L^p(\mathbb{R}^n, A)^* = L^{p'}(\mathbb{R}^n, A^*) \quad 1 \leq p < \infty$$

Desde la condición puntual

Consideraremos $A = L^{p'(\cdot)}$, por Fubbini-Tonelli tenemos

$$\int_{B_R}\int_0^{2R}\left\|\frac{\chi_{B(y,2t)}}{|y-\cdot|^{n-\alpha}}\right\|_{p'(\cdot)}\frac{dt}{t}\,dy = \int_0^{2R}\int_{B_R}\left\|\frac{\chi_{B(x,2t)}}{|x-\cdot|^{n-\alpha}}\right\|_{p'(\cdot)}dx\,\frac{dt}{t}$$

Tomamos $1 < q < \dfrac{n}{n-\alpha}$ y por Hölder clásico tenemos

Desde la condición puntual

Consideraremos $A = L^{p'(\cdot)}$, por Fubbini-Tonelli tenemos

$$\int_{B_R} \int_0^{2R} \left\| \frac{\chi_{B(y,2t)}}{|y-\cdot|^{n-\alpha}} \right\|_{p'(\cdot)} \frac{dt}{t}\, dy = \int_0^{2R} \int_{B_R} \left\| \frac{\chi_{B(x,2t)}}{|x-\cdot|^{n-\alpha}} \right\|_{p'(\cdot)} dx\, \frac{dt}{t}$$

Tomamos $1 < q < \dfrac{n}{n-\alpha}$ y por Hölder clásico tenemos

$$\int_{B_R} \left\| \frac{\chi_{B(x,2t)}}{|x-\cdot|^{n-\alpha}} \right\|_{p'(\cdot)} dx \le C\, |B_R|^{\frac{1}{q'}} \left\| \chi_{B_R}(x) \frac{\chi_{B(x,2t)}(z)}{|x-z|^{n-\alpha}} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n, L^{p'(\cdot)})}$$

Desde la condición puntual

Consideraremos $A = L^{p'(\cdot)}$, por Fubbini-Tonelli tenemos

$$\int_{B_R}\int_0^{2R}\left\|\frac{\chi_{B(y,2t)}}{|y-\cdot|^{n-\alpha}}\right\|_{p'(\cdot)}\frac{dt}{t}\,dy = \int_0^{2R}\int_{B_R}\left\|\frac{\chi_{B(x,2t)}}{|x-\cdot|^{n-\alpha}}\right\|_{p'(\cdot)}dx\,\frac{dt}{t}$$

Tomamos $1 < q < \dfrac{n}{n-\alpha}$ y por Hölder clásico tenemos

$$\int_{B_R}\left\|\frac{\chi_{B(x,2t)}}{|x-\cdot|^{n-\alpha}}\right\|_{p'(\cdot)}dx \le C\,|B_R|^{\frac{1}{q'}}\left\|\chi_{B_R}(x)\frac{\chi_{B(x,2t)}(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n,L^{p'(\cdot)})}$$

$$\left\|\chi_{B_R}(x)\frac{\chi_{B(x,2t)}(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n,L^{p'(\cdot)})} = \sup\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\chi_{B_R}(x)\chi_{B(x,2t)}(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}g_1(x)g_2(z)\,dz\,dx\right),$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones $g_1 \in L^{q'}$, $g_2 \in L^q$ tales que $\|g_1\|_{q'}\,\|g_2\|_{L^q} \le 1$

Desde la condición puntual

$$\left\| \chi_{B_R}(x) \frac{\chi_{B(x,2t)}(z)}{|x-z|^{n-\alpha}} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n, L^{p'(\cdot)})} \leq C\, t^{\alpha - \frac{n}{q'}} \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)} .$$

Desde la condición puntual

$$\left\| \chi_{B_R}(x) \frac{\chi_{B(x,2t)}(z)}{|x-z|^{n-\alpha}} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n, L^{p'(\cdot)})} \leq C\, t^{\alpha - \frac{n}{q'}} \, \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)} \, .$$

$$|B_R|^{\frac{1}{q'}} \int_0^{2R} \left\| \chi_{B_R}(x) \frac{\chi_{B(x,2t)}(z)}{|x-z|^{n-\alpha}} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n, L^{p'(\cdot)})} \frac{dt}{t}$$

$$\leq C\, |B_R|^{\frac{1}{q'}} \, \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)} \int_0^{2R} t^{\alpha - \frac{n}{q'}} \, \frac{dt}{t}$$

Desde la condición puntual

$$\left\| \chi_{B_R}(x) \frac{\chi_{B(x,2t)}(z)}{|x-z|^{n-\alpha}} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n, L^{p'(\cdot)})} \leq C\, t^{\alpha - \frac{n}{q'}} \, \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)} \, .$$

$$\begin{aligned}
& |B_R|^{\frac{1}{q'}} \int_0^{2R} \left\| \chi_{B_R}(x) \frac{\chi_{B(x,2t)}(z)}{|x-z|^{n-\alpha}} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n, L^{p'(\cdot)})} \frac{dt}{t} \\
\leq \quad & C\, |B_R|^{\frac{1}{q'}} \, \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)} \int_0^{2R} t^{\alpha - \frac{n}{q'}} \, \frac{dt}{t} \\
\leq \quad & C\, |B_R|^{\frac{1}{q'}} |B_R|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{q'}} \, \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)} \\
\leq \quad & C\, |B_R|^{\frac{\alpha}{n}} \, \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)} \, .
\end{aligned}$$

■

Temas a abordar

- Condiciones sobre el p para que $\widetilde{I}_\alpha : \mathfrak{L}_{\beta,p(\cdot)} \longrightarrow \mathfrak{L}_{\alpha+\beta,p(\cdot)}$ para $0 \leq \beta < n - \alpha$.

Temas a abordar

- Condiciones sobre el p para que $\widetilde{I}_\alpha : \mathfrak{L}_{\beta,p(\cdot)} \longrightarrow \mathfrak{L}_{\alpha+\beta,p(\cdot)}$ para $0 \le \beta < n - \alpha$.
- Condiciones sobre el p para que $\widetilde{I}_\alpha : L^{p(\cdot),\infty} \longrightarrow \mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$.

Temas a abordar

- Condiciones sobre el p para que $\widetilde{I}_\alpha : \mathfrak{L}_{\beta,p(\cdot)} \longrightarrow \mathfrak{L}_{\alpha+\beta,p(\cdot)}$ para $0 \leq \beta < n - \alpha$.
- Condiciones sobre el p para que $\widetilde{I}_\alpha : L^{p(\cdot),\infty} \longrightarrow \mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$.
- Introducir pesos en las acotaciones.

MUCHAS GRACIAS...