Extensión de pesos en espacios formados por dos componentes de diferentes dimensiones y un punto de contacto

Liliana Nitti,
Trabajo en Colaboración con Hugo Aimar y Bibiana Iaffei

Universidad Nacional del Litoral
IMAL (CONICET)
Santa Fe

18 de junio de 2010

Problema

Problema

Este trabajo se refiere al problema de "pegar" pesos de la clase A_p de Mackenhoupt definidos en dos conjuntos de diferentes dimensiones con un punto único de contacto.

Consideraciones generales

Consideraciones generales

Sea (X, d) espacio métrico

Consideraciones generales

Sea (X, d) espacio métrico

- Una medida μ definida sobre los conjuntos de Borel de X es duplicante si existe una constante positiva A tal que

Consideraciones generales

Sea (X, d) espacio métrico

- Una medida μ definida sobre los conjuntos de Borel de X es duplicante si existe una constante positiva A tal que

$$0 < \mu(B(x, 2r)) < A\mu(B(x, r)) < \infty$$

Consideraciones generales

Sea (X, d) espacio métrico

- Una medida μ definida sobre los conjuntos de Borel de X es duplicante si existe una constante positiva A tal que

$$0 < \mu(B(x, 2r)) < A\mu(B(x, r)) < \infty$$

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Consideraciones generales

Sea (X, d) espacio métrico

- Una medida μ definida sobre los conjuntos de Borel de X es duplicante si existe una constante positiva A tal que

$$0 < \mu(B(x, 2r)) < A\mu(B(x, r)) < \infty$$

$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$
vale para todo $x \in X$ y para todo $r > 0$.

Consideraciones generales

Sea (X, d) espacio métrico

- Una medida μ definida sobre los conjuntos de Borel de X es duplicante si existe una constante positiva A tal que

$$0 < \mu(B(x, 2r)) < A\mu(B(x, r)) < \infty$$

  $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$
  vale para todo $x \in X$ y para todo $r > 0$.

- Si, μ, es una medida duplicante sobre (X, d), entonces (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo

Espacio δ-normal

Espacio δ-normal

Dada una medida de Borel μ on X, decimos que (X, d, μ) es un espacio δ-normal

Espacio δ-normal

Dada una medida de Borel μ on X, decimos que (X, d, μ) es un espacio δ-normal si para algún número positivo δ, existen dos constantes positivas y finitas A_1 y A_2 que satisfacen

Espacio δ-normal

Dada una medida de Borel μ on X, decimos que (X, d, μ) es un espacio δ-normal si para algún número positivo δ, existen dos constantes positivas y finitas A_1 y A_2 que satisfacen

$$A_1 r^\delta \leq \mu(B(x, r)) \leq A_2 r^\delta$$

Espacio δ-normal

Dada una medida de Borel μ on X, decimos que (X, d, μ) es un espacio δ-normal si para algún número positivo δ, existen dos constantes positivas y finitas A_1 y A_2 que satisfacen

$$A_1 r^\delta \leq \mu(B(x, r)) \leq A_2 r^\delta$$

para todo $x \in X$ y para todo $0 < r < \mathrm{diam}(X)$.

Relación entre la duplicación y el contacto de conjuntos de dimensiones distintas

Relación entre la duplicación y el contacto de conjuntos de dimensiones distintas

Equipar con una medida duplicante a un espacio casi-métrico determinado por la unión de dos conjuntos de dimensiones distintas

Relación entre la duplicación y el contacto de conjuntos de dimensiones distintas

Equipar con una medida duplicante a un espacio casi-métrico determinado por la unión de dos conjuntos de dimensiones distintas
Resultados anteriores vinculados al problema:

Relación entre la duplicación y el contacto de conjuntos de dimensiones distintas

Equipar con una medida duplicante a un espacio casi-métrico determinado por la unión de dos conjuntos de dimensiones distintas

Resultados anteriores vinculados al problema:

- *Existencia de la medida duplicante:*

Relación entre la duplicación y el contacto de conjuntos de dimensiones distintas

Equipar con una medida duplicante a un espacio casi-métrico determinado por la unión de dos conjuntos de dimensiones distintas

Resultados anteriores vinculados al problema:

- *Existencia de la medida duplicante:*
  - [Vol'berg y Konyagin - 1984],

Relación entre la duplicación y el contacto de conjuntos de dimensiones distintas

Equipar con una medida duplicante a un espacio casi-métrico determinado por la unión de dos conjuntos de dimensiones distintas

Resultados anteriores vinculados al problema:

- *Existencia de la medida duplicante:*
  - [Vol'berg y Konyagin - 1984],
  - [Luukkainen y Saksman - 1998],

Relación entre la duplicación y el contacto de conjuntos de dimensiones distintas

Equipar con una medida duplicante a un espacio casi-métrico determinado por la unión de dos conjuntos de dimensiones distintas

Resultados anteriores vinculados al problema:

- *Existencia de la medida duplicante:*
  - [Vol'berg y Konyagin - 1984],
  - [Luukkainen y Saksman - 1998],
  - [Wu - 1998].

Relación entre la duplicación y el contacto de conjuntos de dimensiones distintas

Equipar con una medida duplicante a un espacio casi-métrico determinado por la unión de dos conjuntos de dimensiones distintas

Resultados anteriores vinculados al problema:

- *Existencia de la medida duplicante:*
  - [Vol'berg y Konyagin - 1984],
  - [Luukkainen y Saksman - 1998],
  - [Wu - 1998].

  Medida duplicante y orden de contacto cero de las componentes de diferente dimensión

Relación entre la duplicación y el contacto de conjuntos de dimensiones distintas

Equipar con una medida duplicante a un espacio casi-métrico determinado por la unión de dos conjuntos de dimensiones distintas

Resultados anteriores vinculados al problema:

- *Existencia de la medida duplicante:*
  - [Vol'berg y Konyagin - 1984],
  - [Luukkainen y Saksman - 1998],
  - [Wu - 1998].

  Medida duplicante y orden de contacto cero de las componentes de diferente dimensión
  - [Aimar y Nitti - 2004].

Orden de contacto cero y duplicación

Orden de contacto cero y duplicación

Contexto: descripto por los siguientes axiomas.

Orden de contacto cero y duplicación

Contexto: descripto por los siguientes axiomas.

[a] *Las componentes de* X. $X = X_1 \cup X_2 \cup \{x_0\}$ con X_1, X_2, $\{x_0\}$ disjuntos de a dos y (X, d) es un espacio métrico .

Orden de contacto cero y duplicación

Contexto: descripto por los siguientes axiomas.

[a] *Las componentes de* X. $X = X_1 \cup X_2 \cup \{x_0\}$ con X_1, X_2, $\{x_0\}$ disjuntos de a dos y (X, d) es un espacio métrico .

[b] *Contacto.* $\{x_0\} = \overline{X}_1 \cap \overline{X}_2$ and $d(x, x_0) \leq c[d(x, X_1) + d(x, X_2)]$ para alguna constante c y todo $x \in X$.

Orden de contacto cero y duplicación

Contexto: descripto por los siguientes axiomas.

[a] *Las componentes de* X. $X = X_1 \cup X_2 \cup \{x_0\}$ con X_1, X_2, $\{x_0\}$ disjuntos de a dos y (X, d) es un espacio métrico .

[b] *Contacto.* $\{x_0\} = \overline{X}_1 \cap \overline{X}_2$ and $d(x, x_0) \leq c[d(x, X_1) + d(x, X_2)]$ para alguna constante c y todo $x \in X$.

[c] *Dimensiones.* (X_i, d, μ_i) es un espacio n_i-normal con $0 < n_1 < n_2 < \infty$.

Orden de contacto cero y duplicación

Orden de contacto cero y duplicación

Teorema (Aimar-Nitti)

Si $X = X_1 \cup X_2 \cup \{x_0\})$ *satisface* $\mathcal{C}_0$.

Orden de contacto cero y duplicación

Teorema (Aimar-Nitti)

Si $X = X_1 \cup X_2 \cup \{x_0\})$ *satisface* $\mathcal{C}_0$. *Además para* $i = 1, 2$ *sea* μ_i *una medida de Borel* n_i*-normal sobre* (X_i, d) *con* $0 < n_1 < n_2 < \infty$.

Orden de contacto cero y duplicación

Teorema (Aimar-Nitti)

Si $X = X_1 \cup X_2 \cup \{x_0\})$ *satisface* $\mathcal{C}_0$*. Además para* $i = 1, 2$ *sea* μ_i *una medida de Borel* n_i*-normal sobre* (X_i, d) *con* $0 < n_1 < n_2 < \infty$*. Si* $\gamma_1 > -n_1$ *y* $\gamma_2 > -n_2$ *definimos la medida* μ^{γ_1,γ_2} *definida del siguiente modo*

Orden de contacto cero y duplicación

Teorema (Aimar-Nitti)

Si $X = X_1 \cup X_2 \cup \{x_0\})$ satisface $\mathcal{C}_0$. Además para $i = 1, 2$ sea μ_i una medida de Borel n_i-normal sobre (X_i, d) con $0 < n_1 < n_2 < \infty$. Si $\gamma_1 > -n_1$ y $\gamma_2 > -n_2$ definimos la medida μ^{γ_1,γ_2} definida del siguiente modo

$$\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(E) = \int_{E\cap X_1} d(x, x_0)^{\gamma_1} d\mu_1 + \int_{E\cap X_2} d(x, x_0)^{\gamma_2} d\mu_2$$

Orden de contacto cero y duplicación

Teorema (Aimar-Nitti)

Si $X = X_1 \cup X_2 \cup \{x_0\})$ *satisface* $\mathcal{C}_0$. *Además para* $i = 1, 2$ *sea* μ_i *una medida de Borel* n_i*-normal sobre* (X_i, d) *con* $0 < n_1 < n_2 < \infty$. *Si* $\gamma_1 > -n_1$ *y* $\gamma_2 > -n_2$ *definimos la medida* μ^{γ_1,γ_2} *definida del siguiente modo*

$$\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(E) = \int_{E\cap X_1} d(x, x_0)^{\gamma_1} d\mu_1 + \int_{E\cap X_2} d(x, x_0)^{\gamma_2} d\mu_2$$

para todo subconjunto de Borel E *de* $X = X_1 \cup X_2$ *donde* $d(x, x_0)$, *indica la distancia al punto de contacto* x_0, *entonces* $(X_1 \cup X_2, d, \mu^{\gamma_1,\gamma_2})$ *es un espacio de tipo homogéneo si y sólo si* $\gamma_1 - \gamma_2 = n_2 - n_1$.

Casos Particulares

Casos Particulares

Variedades lineales de dimensión n_i

Casos Particulares

Variedades lineales de dimensión n_i
$X = X_1 \cup X_2 \cup \{x_0\}$, X_1 y X_2 tienen orden de contacto cero en x_0.

Casos Particulares

Variedades lineales de dimensión n_i

$X = X_1 \cup X_2 \cup \{x_0\}$, X_1 y X_2 tienen orden de contacto cero en x_0.

$$\mu^\gamma(E) = \int_{E\cap X_1} d(x,x_0)^\gamma d\mu_1 + \mu_2(E\cap X_2)$$

Casos Particulares

Variedades lineales de dimensión n_i
$X = X_1 \cup X_2 \cup \{x_0\}$, X_1 y X_2 tienen orden de contacto cero en x_0.

$$\mu^\gamma(E) = \int_{E \cap X_1} d(x, x_0)^\gamma d\mu_1 + \mu_2(E \cap X_2)$$

duplica si y sólo si $\gamma = n_2 - n_1$

Casos Particulares

Variedades lineales de dimensión n_i

$X = X_1 \cup X_2 \cup \{x_0\}$, X_1 y X_2 tienen orden de contacto cero en x_0.

$$\mu^\gamma(E) = \int_{E \cap X_1} d(x, x_0)^\gamma d\mu_1 + \mu_2(E \cap X_2)$$

duplica si y sólo si $\gamma = n_2 - n_1$

"La pala"

Casos Particulares

Variedades lineales de dimensión n_i
$X = X_1 \cup X_2 \cup \{x_0\}$, X_1 y X_2 tienen orden de contacto cero en x_0.

$$\mu^\gamma(E) = \int_{E\cap X_1} d(x,x_0)^\gamma d\mu_1 + \mu_2(E\cap X_2)$$

duplica si y sólo si $\gamma = n_2 - n_1$
"La pala"

$$\mu^1(E) = \int_{E\cap X_1} d(x,x_0) d\mu_1 + \mu_2(E\cap X_2)$$

¿Cómo se miden las bolas con la medida μ^{γ_1,γ_2} ?

¿Cómo se miden las bolas con la medida μ^{γ_1,γ_2} ?

Si $\boxed{r > c\ d(x, x_0)}$,

$$\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B(x,r)) \simeq r^{n(x)+\gamma(x)}. \qquad (1)$$

¿Cómo se miden las bolas con la medida μ^{γ_1,γ_2} ?

Si $\boxed{r > c\ d(x, x_0)}$,

$$\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B(x, r)) \simeq r^{n(x)+\gamma(x)}. \tag{1}$$

si $\boxed{r \leq c\ d(x, x_0)}$,

$$\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B(x, r)) \simeq r^{n(x)} d(x, x_0)^{\gamma(x)}. \tag{2}$$

El problema

El problema

Dado un espacio métrico formado por dos componentes de diferentes dimensiones y teniendo definido un peso de la clase A_p en cada una de las mismas, se plantea encontrar condiciones para "pegar" dichos pesos y generar un peso de la misma clase en el espacio total.

Pesos de la clase A_p de Muckenhoupt

Pesos de la clase A_p de Muckenhoupt

- (X, d, μ), un espacio de tipo homogeneo y $1 < p < \infty$

Pesos de la clase A_p de Muckenhoupt

- (X, d, μ), un espacio de tipo homogeneo y $1 < p < \infty$
- Una función no negativa w es un peso de la clase A_p de Muckenhoupt, o $w \in A_p(X, d, \mu)$ si se verifica la siguiente desigualdad:

Pesos de la clase A_p de Muckenhoupt

- (X, d, μ), un espacio de tipo homogeneo y $1 < p < \infty$
- Una función no negativa w es un peso de la clase A_p de Muckenhoupt, o $w \in A_p(X, d, \mu)$ si se verifica la siguiente desigualdad:

$$\left(\int_{B(x,r)} w d\mu\right)\left(\int_{B(x,r)} w^{-\frac{1}{p-1}} d\mu\right)^{p-1} \leq C\mu(B(x,r))^p,$$

para alguna constante C y toda bola $B(x,r)$, $x \in X$, $r > 0$.

Pesos de la clase A_p de Muckenhoupt

Pesos de la clase A_p de Muckenhoupt

Como en el caso Euclídeo $w \in A_p(X, d\mu)$, $1 < p < \infty$, es equivalente a la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood definido como

Pesos de la clase A_p de Muckenhoupt

Como en el caso Euclídeo $w \in A_p(X, d\mu)$, $1 < p < \infty$, es equivalente a la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood definido como

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu.$$

Pesos de la clase A_p de Muckenhoupt

Como en el caso Euclídeo $w \in A_p(X, d\mu)$, $1 < p < \infty$, es equivalente a la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood definido como

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu.$$

- Este resultado central fue debido a Muckenhoupt, quien en l972, caracteriza los pesos $w(x)$ para los que el operador maximal de Hardy- Littlewood sea acotado en $L^p(w)$.

Pesos de la clase A_p de Muckenhoupt

Como en el caso Euclídeo $w \in A_p(X, d\mu)$, $1 < p < \infty$, es equivalente a la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood definido como

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu.$$

- Este resultado central fue debido a Muckenhoupt, quien en l972, caracteriza los pesos $w(x)$ para los que el operador maximal de Hardy- Littlewood sea acotado en $L^p(w)$.
- Aimar y Macías (1984) generalizan este resultado a espacios de tipo homogéneo.

Antecedentes lejanos del problema- sobre extensiones del dominio

Antecedentes lejanos del problema- sobre extensiones del dominio

1. T. Wolf- Restrictions of A_p weights(preprint) 198?

Antecedentes lejanos del problema- sobre extensiones del dominio

1. T. Wolf- Restrictions of A_p weights(preprint) 198?

2. Peter Holden, (1990), determina condiciones sobre un dominio D en $\mathbb{R}^n$, para que un peso de la clase A_p, pueda ser extendido a $\mathbb{R}^n$.

Antecedentes cercanos del problema

Antecedentes cercanos del problema

Cruz Uribe - Piecewise monotonic doubling measures, dissertation (D. Sarason, advisor), Rocky Mtn. J. Math. 26(1996),2,1-39.

Antecedentes cercanos del problema

Cruz Uribe - Piecewise monotonic doubling measures, dissertation (D. Sarason, advisor), Rocky Mtn. J. Math. 26(1996),2,1-39.
Resultado relacionado:
Sean $I_0, \ldots\ldots I_n$ una partición de $\mathbb{R}$, en intervalos con un número finito de puntos extremos comunes $x_1, , , , , , x_n$ y sea w una función sobre $\mathbb{R}$, que es monótona sobre cada intervalo I_j. Entonces w está en A_p sobre $\mathcal{R}$ sí y sólo sí:

1. w es un peso de A_p, sobre cada I_j
2. Existe una constante $T_0 > 0$ tal que $\frac{w(x_j+t)}{w(x_j-t)}$ es acotado y acotado desde el cero para $1 \leq j \leq n$ y $0 < t < T_0$;
3. Existe una constante $T_1 > 0$ tal que $\frac{w(t)}{w(-t)}$ es acotado y acotado desde el cero para $t > T_1$.

Antecedentes cercanos del problema

Antecedentes cercanos del problema

I. Gohberg, N. Krupnik, I. Spitovsky, Banach algebras of singular integral operators with piecewise continuous coefficient. General contour and weight , Integral Equations operator Theory 17 (1993),322. MR 94f:47057.

Antecedentes cercanos del problema

I. Gohberg, N. Krupnik, I. Spitovsky, Banach algebras of singular integral operators with piecewise continuous coefficient. General contour and weight , Integral Equations operator Theory 17 (1993),322. MR 94f:47057.
Sea Γ, una contorno que consiste en número finito de curvas, que satisface la condición de Carleson. Asumiendo que existen a lo más un número finito de puntos en que se autointersecan $z_1, , , , , z_m$. Entonces un peso ρ pertenece a $A_p(\Gamma)$ sí y sólo sí

1. ρ es un peso de A_p, sobre cada subarco simple de $\Gamma \backslash \{z_1, z_2 .... Z_m\}$
2. ρ es un peso de A_p sobre todos los arcos $\gamma_{k,1} \cup \{z_k\} \cap \gamma_{k,j}$ para $j \in \{2....n_k\}$

Antecedentes más cercanos del problema

Antecedentes más cercanos del problema

Bernd S.W.Schröder. On pasting A_p weights. Proceedings of the American M.S. Volume 124, Number11, November 1996

Antecedentes más cercanos del problema

Bernd S.W.Schröder. On pasting A_p weights. Proceedings of the American M.S. Volume 124, Number11, November 1996

$1 < p < \infty$, $w_1(x) : [a, 0] \rightarrow \mathbb{R}_o^+$ y $w_2(x) : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}_o^+$ pesos de A_p. Si

Antecedentes más cercanos del problema

Bernd S.W.Schröder. On pasting A_p weights. Proceedings of the American M.S. Volume 124, Number11, November 1996

$1 < p < \infty$, $w_1(x) : [a, 0] \to \mathbb{R}_o^+$ y $w_2(x) : [0, b] \to \mathbb{R}_o^+$ pesos de A_p. Si

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x), & \text{if } x \in [a, 0]; \\ w_2(x), & \text{if } x \in [0, b]. \end{cases}$$

Antecedentes más cercanos del problema

Bernd S.W.Schröder. On pasting A_p weights. Proceedings of the American M.S. Volume 124, Number11, November 1996

$1 < p < \infty$, $w_1(x) : [a, 0] \to \mathbb{R}_o^+$ y $w_2(x) : [0, b] \to \mathbb{R}_o^+$ pesos de A_p. Si

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x), & \text{if } x \in [a, 0]; \\ w_2(x), & \text{if } x \in [0, b]. \end{cases}$$

Entonces,

$w : [a, b] \to \mathbb{R}_o^+$ es un peso de A_p si y sólo si

Antecedentes más cercanos del problema

Bernd S.W.Schröder. On pasting A_p weights. Proceedings of the American M.S. Volume 124, Number11, November 1996

$1 < p < \infty$, $w_1(x) : [a, 0] \to \mathbb{R}_o^+$ y $w_2(x) : [0, b] \to \mathbb{R}_o^+$ pesos de A_p. Si

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x), & \text{if } x \in [a, 0]; \\ w_2(x), & \text{if } x \in [0, b]. \end{cases}$$

Entonces,

$w : [a, b] \to \mathbb{R}_o^+$ es un peso de A_p si y sólo si

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_0^{\epsilon} w_2(x)dx}{\int_{-\epsilon}^{0} w_1(x)dx} < \infty, \tag{3}$$

y

Antecedentes más cercanos del problema

Bernd S.W.Schröder. On pasting A_p weights. Proceedings of the American M.S. Volume 124, Number11, November 1996

$1 < p < \infty$, $w_1(x) : [a, 0] \to \mathbb{R}_o^+$ y $w_2(x) : [0, b] \to \mathbb{R}_o^+$ pesos de A_p. Si

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x), & \text{if } x \in [a, 0]; \\ w_2(x), & \text{if } x \in [0, b]. \end{cases}$$

Entonces,

$w : [a, b] \to \mathbb{R}_o^+$ es un peso de A_p si y sólo si

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_0^{\epsilon} w_2(x)dx}{\int_{-\epsilon}^{0} w_1(x)dx} < \infty, \tag{3}$$

y

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_0^{\epsilon} w_2(x)dx}{\int_{-\epsilon}^{0} w_1(x)dx} > 0. \tag{4}$$

Geometría del espacio en el que planteamos una generalización del resultado de Schröder

Geometría del espacio en el que planteamos una generalización del resultado de Schröder

(X, d), es un espacio métrico acotado con las siguientes condiciones:

Geometría del espacio en el que planteamos una generalización del resultado de Schröder

(X, d), es un espacio métrico acotado con las siguientes condiciones:

- componentes

Geometría del espacio en el que planteamos una generalización del resultado de Schröder

(X, d), es un espacio métrico acotado con las siguientes condiciones:

- componentes
- contacto,

Geometría del espacio en el que planteamos una generalización del resultado de Schröder

(X, d), es un espacio métrico acotado con las siguientes condiciones:

- componentes
- contacto,
- dimensión: μ_i con $i = 1, 2$ medida finita definida sobre los subconjuntos de Borel X_i y n_i- normales, $n_1 \leq n_2$

La clase A_p de Muckenhoupt, en nuestro contexto

La clase A_p de Muckenhoupt, en nuestro contexto

La medida: es

La clase A_p de Muckenhoupt, en nuestro contexto

La medida: es

$$\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(E) = \int_{E\cap X_1} d(x,x_0)^{\gamma_1} d\mu_1 + \int_{E\cap X_2} d(x,x_0)^{\gamma_2} d\mu_2 \qquad (5)$$

La clase A_p de Muckenhoupt, en nuestro contexto

La medida: es

$$\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(E) = \int_{E\cap X_1} d(x,x_0)^{\gamma_1}\, d\mu_1 + \int_{E\cap X_2} d(x,x_0)^{\gamma_2}\, d\mu_2 \qquad (5)$$

Una función no negativa, medible y localmente w definida en el espacio de tipo homogéneo $(X, d, \mu^{\gamma_1,\gamma_2})$, se dice que es un peso de Muckenhoupt de la clase $A_p(X, d, \mu^{\gamma_1,\gamma_2})$ $(1 < p < \infty)$ si la desigualdad

La clase A_p de Muckenhoupt, en nuestro contexto

La medida: es

$$\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(E) = \int_{E\cap X_1} d(x,x_0)^{\gamma_1} d\mu_1 + \int_{E\cap X_2} d(x,x_0)^{\gamma_2} d\mu_2 \qquad (5)$$

Una función no negativa, medible y localmente w definida en el espacio de tipo homogéneo $(X, d, \mu^{\gamma_1,\gamma_2})$, se dice que es un peso de Muckenhoupt de la clase $A_p(X, d, \mu^{\gamma_1,\gamma_2})$ $(1 < p < \infty)$ si la desigualdad

$$\left(\int_B w d\mu^{\gamma_1,\gamma_2}\right)\left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}} d\mu^{\gamma_1,\gamma_2}\right)^{p-1} \leq C\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B)^p, \qquad (6)$$

La clase A_p de Muckenhoupt, en nuestro contexto

La medida: es

$$\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(E) = \int_{E\cap X_1} d(x,x_0)^{\gamma_1}\, d\mu_1 + \int_{E\cap X_2} d(x,x_0)^{\gamma_2}\, d\mu_2 \qquad (5)$$

Una función no negativa, medible y localmente w definida en el espacio de tipo homogéneo $(X, d, \mu^{\gamma_1,\gamma_2})$, se dice que es un peso de Muckenhoupt de la clase $A_p(X, d, \mu^{\gamma_1,\gamma_2})$ $(1 < p < \infty)$ si la desigualdad

$$\left(\int_B w d\mu^{\gamma_1,\gamma_2}\right)\left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}} d\mu^{\gamma_1,\gamma_2}\right)^{p-1} \leq C\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B)^p, \qquad (6)$$

vale para una constante C y toda bola $B(x,r)$, $x \in X$, $r > 0$.

La clase A_p de Muckenhoupt, en nuestro contexto

La medida: es

$$\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(E) = \int_{E\cap X_1} d(x,x_0)^{\gamma_1}d\mu_1 + \int_{E\cap X_2} d(x,x_0)^{\gamma_2}d\mu_2 \qquad (5)$$

Una función no negativa, medible y localmente w definida en el espacio de tipo homogéneo $(X,d,\mu^{\gamma_1,\gamma_2})$, se dice que es un peso de Muckenhoupt de la clase $A_p(X,d,\mu^{\gamma_1,\gamma_2})$ $(1<p<\infty)$ si la desigualdad

$$\left(\int_B wd\mu^{\gamma_1,\gamma_2}\right)\left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}d\mu^{\gamma_1,\gamma_2}\right)^{p-1} \leq C\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B)^p, \qquad (6)$$

vale para una constante C y toda bola $B(x,r)$, $x\in X$, $r>0$.
$w\in A_p(X_i,d,\mu^{\gamma_1,\gamma_2})$ $(1<p<\infty)$, $i=1,2$ si la anterior desigualdad se satisface cambiando $B(x,r)$ por $B(x,r)\cap X_i$ y $x\in X_i$.

La Maximal en nuestro contexto

La Maximal en nuestro contexto

- Dada una función f definida sobre X que satisface **[a]**, **[b]** y **[c]** above,

La Maximal en nuestro contexto

- Dada una función f definida sobre X que satisface **[a]**, **[b]** y **[c]** above,
- $f = f\ \chi_{X_1} + f\ \chi_{X_2} = f_1 + f_2$, pertenece a $L^1_{\mathrm{loc}}(X, d, \mu^{\gamma_1,\gamma_2})$

La Maximal en nuestro contexto

- Dada una función f definida sobre X que satisface **[a]**, **[b]** y **[c]** above,
- $f = f\ \chi_{X_1} + f\ \chi_{X_2} = f_1 + f_2$, pertenece a $L^1_{\mathrm{loc}}(X, d, \mu^{\gamma_1,\gamma_2})$
- Su función maximal de Hardy- Littlewood es

LA MAXIMAL

LA MAXIMAL

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{x \in B} \frac{\int_{B\cap X_1} |f_1| d(y,x_0)^{\gamma_1}\, d\mu_1(y) + \int_{B\cap X_2} |f_2| d(y,x_0)^{\gamma_2}\, d\mu_2(y)}{\int_{B\cap X_1} d(y,x_0)^{\gamma_1}\, d\mu_1(y) + \int_{B\cap X_2} d(y,x_0)^{\gamma_2}\, d\mu_2(y)}.$$

El resultado

El resultado

Teorema

Sea $1 < p < \infty$. Sea $w_i \in A_p(X_i, d, \mu^{\gamma_i})$, $i = 1, 2$. Definimos w sobre X por $w(x) = w_i(x)$ para $x \in X_i$, $w(x_0) = 0$. Entonces $w \in A_p(X, d, \mu^{\gamma_1, \gamma_2})$ si y sólo si existen constantes positivas y finitas c_1 and c_2 tales que

$$c_1 \leq \frac{\int_{B_{x_0,r} \cap X_1} w_1(y) d\mu^{\gamma_1}(y)}{\int_{B_{x_0,r} \cap X_2} w_2(y) d\mu^{\gamma_2}(y)} \leq c_2, \tag{7}$$

donde $B_{x_0,r}$ denota la bola $B(x_0, r)$ con $r > 0$.

Observaciones

Observaciones

- Notemos que $\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(\{x_0\}) = 0$ de modo que el valor de w en x_0 es irrelevante.

Observaciones

- Notemos que $\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(\{x_0\}) = 0$ de modo que el valor de w en x_0 es irrelevante.
- Si $n_1 = n_2 > 0$, entonces se obtiene que $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ y $\mu^{0,0}$ es una medida duplicante sobre X.

Observaciones

- Notemos que $\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(\{x_0\}) = 0$ de modo que el valor de w en x_0 es irrelevante.
- Si $n_1 = n_2 > 0$, entonces se obtiene que $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ y $\mu^{0,0}$ es una medida duplicante sobre X.
  Para $w_i \in A_p(X_i, d, \mu_i)$, $i = 1, 2$, el peso obtenido por el "pegoteo" $w(x) = w_i(x)$ con $x \in X_i$, verifica que está en $A_p(X, d, \mu^{0,0})$ sí y sólo si $\int_{B_{x_0,r} \cap X_2} w_2 d\mu_2$ es equivalente a $\int_{B_{x_0,r} \cap X_1} w_1 d\mu_1$ uniformemente para $r > 0$.

Observaciones

- Notemos que $\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(\{x_0\}) = 0$ de modo que el valor de w en x_0 es irrelevante.
- Si $n_1 = n_2 > 0$, entonces se obtiene que $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ y $\mu^{0,0}$ es una medida duplicante sobre X.
  Para $w_i \in A_p(X_i, d, \mu_i)$, $i = 1, 2$, el peso obtenido por el "pegoteo" $w(x) = w_i(x)$ con $x \in X_i$, verifica que está en $A_p(X, d, \mu^{0,0})$ sí y sólo si $\int_{B_{x_0,r} \cap X_2} w_2 d\mu_2$ es equivalente a $\int_{B_{x_0,r} \cap X_1} w_1 d\mu_1$ uniformemente para $r > 0$.
- Para $n_1 = n_2 = 1$ se recupera el resultado de Schöreder.

Observaciones

- Notemos que $\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(\{x_0\}) = 0$ de modo que el valor de w en x_0 es irrelevante.
- Si $n_1 = n_2 > 0$, entonces se obtiene que $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ y $\mu^{0,0}$ es una medida duplicante sobre X.
  Para $w_i \in A_p(X_i, d, \mu_i)$, $i = 1, 2$, el peso obtenido por el "pegoteo" $w(x) = w_i(x)$ con $x \in X_i$, verifica que está en $A_p(X, d, \mu^{0,0})$ sí y sólo si $\int_{B_{x_0,r} \cap X_2} w_2 d\mu_2$ es equivalente a $\int_{B_{x_0,r} \cap X_1} w_1 d\mu_1$ uniformemente para $r > 0$.
- Para $n_1 = n_2 = 1$ se recupera el resultado de Schöreder.
- Para, $w_i(x) = d(x, x_0)^{\alpha_i}$, vale que $w_i \in A_p(X_i, d, \mu^{\gamma_i})$ sí y sólo si $\alpha_i > -(n_i + \gamma_i)$, con $i = 1, 2$.

Observaciones

- Notemos que $\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(\{x_0\}) = 0$ de modo que el valor de w en x_0 es irrelevante.
- Si $n_1 = n_2 > 0$, entonces se obtiene que $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ y $\mu^{0,0}$ es una medida duplicante sobre X.
  Para $w_i \in A_p(X_i, d, \mu_i)$, $i = 1, 2$, el peso obtenido por el "pegoteo" $w(x) = w_i(x)$ con $x \in X_i$, verifica que está en $A_p(X, d, \mu^{0,0})$ sí y sólo si $\int_{B_{x_0,r}\cap X_2} w_2 d\mu_2$ es equivalente a $\int_{B_{x_0,r}\cap X_1} w_1 d\mu_1$ uniformemente para $r > 0$.
- Para $n_1 = n_2 = 1$ se recupera el resultado de Schöreder.
- Para, $w_i(x) = d(x, x_0)^{\alpha_i}$, vale que $w_i \in A_p(X_i, d, \mu^{\gamma_i})$ sí y sólo si $\alpha_i > -(n_i + \gamma_i)$, con $i = 1, 2$. como consecuenia del teorema 2 vemos que los pesos w así obtenidos están en $A_p(X, d, \mu^{\gamma_1,\gamma_2})$ sí y sólo si $\alpha_1 = \alpha_2$.

Observaciones

Observaciones

- (9) es equivalente a

$$c_1 \leq \frac{\int_{B_{x,2r} \cap X_1} w_1(y) d\mu^{\gamma_1}(y)}{\int_{B_{x,2r} \cap X_2} w_2(y) d\mu^{\gamma_2}(y)} \leq c_2, \tag{8}$$

con $x \in X$, $B_{x,r} \cap X_i \neq \emptyset$, para todo $i = 1, 2$.

Un ejemplo.
Objetivo: mostrar que el operador maximal de Hardy -Littlewood $\mathcal{M}$ puede ser acotado sobre las componentes del espacio pero no en el espacio que se obtiene por pegado.

Un ejemplo.

Objetivo: mostrar que el operador maximal de Hardy -Littlewood $\mathcal{M}$ puede ser acotado sobre las componentes del espacio pero no en el espacio que se obtiene por pegado.

- Sea $X_1 = \{(x_1, 0) : x_1 \in [-1, 0]\}$ y $X_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_i \in [0, 1], i = 1, 2\}$.

Un ejemplo.

Objetivo: mostrar que el operador maximal de Hardy -Littlewood $\mathcal{M}$ puede ser acotado sobre las componentes del espacio pero no en el espacio que se obtiene por pegado.

- Sea $X_1 = \{(x_1, 0) : x_1 \in [-1, 0]\}$ y $X_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_i \in [0, 1], i = 1, 2\}$.
- Sean (X_i, d, μ_i) ,d la distancia usual y μ_i, longitud para $i = 1$ y el área para $i = 2$, cada (X_i, d, μ_i) es un espacio de tipo homogéneo. $(X = X_1 \cup X_2, d, \mu^{0,0})$ no.

Un ejemplo.

Objetivo: mostrar que el operador maximal de Hardy -Littlewood $\mathcal{M}$ puede ser acotado sobre las componentes del espacio pero no en el espacio que se obtiene por pegado.

- Sea $X_1 = \{(x_1, 0) : x_1 \in [-1, 0]\}$ y $X_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_i \in [0, 1], i = 1, 2\}$.
- Sean (X_i, d, μ_i) ,d la distancia usual y μ_i, longitud para $i = 1$ y el área para $i = 2$, cada (X_i, d, μ_i) es un espacio de tipo homogéneo. $(X = X_1 \cup X_2, d, \mu^{0,0})$ no.
- $$\mu^{0,-1}(E) = \int_{E\cap X_1} d\mu_1(x) + \int_{E\cap X_2} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\, d\mu_2(x)$$

$$= \mu^0(E \cap X_1) + \mu^{-1}(E \cap X_2),$$

Un ejemplo: continuación

Un ejemplo: continuación

- Consideramos en (X_1, d, μ^0) el peso trivial $w_1(x_1, 0) = 1$ and in (X_2, d, μ^{-1}) el peso $w_2(x) = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Un ejemplo: continuación

- Consideramos en (X_1, d, μ^0) el peso trivial $w_1(x_1, 0) = 1$ and in (X_2, d, μ^{-1}) el peso $w_2(x) = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
- El par w_1, w_2 no satisface

$$c_1 \leq \frac{\int_{B_{x_0,r} \cap X_1} w_1(y) d\mu^{\gamma_1}(y)}{\int_{B_{x_0,r} \cap X_2} w_2(y) d\mu^{\gamma_2}(y)} \leq c_2, \qquad (9)$$

with $x_0 = (0, 0)$, $\gamma_1 = 0$ and $\gamma_2 = -1$.

Un ejemplo: continuación

Un ejemplo: continuación

- Sea w el peso definido por $w(x) = w_i(x)$ para $x \in X_i$. . Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida sobre X por $f_n(x) = n\chi_{Q_n}(x)$, donde $\chi_{Q_n}(x)$ es la carácteristica sobre $Q_n = [0, \frac{1}{n}] \times [0, \frac{1}{n}] \subset X_2$.

Un ejemplo: continuación

- Sea w el peso definido por $w(x) = w_i(x)$ para $x \in X_i$. . Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida sobre X por $f_n(x) = n\chi_{Q_n}(x)$, donde $\chi_{Q_n}(x)$ es la cáracteristica sobre $Q_n = [0, \frac{1}{n}] \times [0, \frac{1}{n}] \subset X_2$.
- notar la norma $L^2(X)$ de f_n con el peso w y medida $\mu^{0,-1}$ es 1 para todo n.

Un ejemplo: continuación

Un ejemplo: continuación

- Para $x = (x_1, 0) \in X_1$ tenemos que $\mathcal{M}(f_n)(x) \geq c \frac{n}{n|x_1| + \log n}$ para alguna constante c, $\int_{X_1} \mathcal{M}(f_n)^2(x) w_1(x) d\mu^{0,-1}(x) \to \infty$, $n \to \infty$. Por lo tanto : $\mathcal{M}(f_n)$ no está uniformemente acotada en $L^2(X, w, d\mu^{0,-1})$.

Un ejemplo: continuación

- Para $x = (x_1, 0) \in X_1$ tenemos que $\mathcal{M}(f_n)(x) \geq c\frac{n}{n|x_1| + \log n}$ para alguna constante c, $\int_{X_1} \mathcal{M}(f_n)^2(x) w_1(x) d\mu^{0,-1}(x) \to \infty$, $n \to \infty$. Por lo tanto : $\mathcal{M}(f_n)$ no está uniformemente acotada en $L^2(X, w, d\mu^{0,-1})$.
- $\mathcal{M}(f_n)$ for $x \in X_2$ es acotada por arriba por una constante veces la función ínf$\{n, \frac{1}{|x|}\}$, la que pertenece a $L^2(X_2, w_2 d\mu^{-1})$.

Prueba del Teorema

Prueba del Teorema

- Debemos ver que (9) implica que w es un peso en $A_p(X, d, \mu^{\gamma_1,\gamma_2})$. Debemos acotar la siguiente expresión

$$\left(\frac{1}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x,r})}\int_{B_{x,r}}(w_1(y)\chi_{X_1}(y)+w_2(y)\chi_{X_2}(y))d\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(y)\right)$$
$$\times\left(\frac{1}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x,r})}\int_{B_{x,r}}(w_1(y)\chi_{X_1}(y)+w_2(y)\chi_{X_2}(y))^{-\frac{1}{p-1}}d\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(y)\right)^{p} \tag{10}$$

Prueba del Teorema

Prueba del Teorema

primero; $x = x_0$.

$$\left(\frac{1}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x_0,r})}\int_{B_{x_0,r}\cap X_1} w_1(y)d\mu^{\gamma_1}(y)\right)\left(\frac{1}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x_0,r})}\int_{B_{x_0,r}\cap X_1} w_1(y)^{-\frac{1}{p-1}}d\mu^{\gamma_1}(y)\right)^{p-1}$$

$$+\left(\frac{1}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x_0,r})}\int_{B_{x_0,r}\cap X_1} w_1(y)d\mu^{\gamma_1}(y)\right)\left(\frac{1}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x_0,r})}\int_{B_{x_0,r}\cap X_2} w_2(y)^{-\frac{1}{p-1}}d\mu^{\gamma_2}(y)\right)^{p-}$$

$$+\left(\frac{1}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x_0,r})}\int_{B_{x_0,r}\cap X_2} w_2(y)d\mu^{\gamma_2}(y)\right)\left(\frac{1}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x_0,r})}\int_{B_{x_0,r}\cap X_1} w_1(y)^{-\frac{1}{p-1}}d\mu^{\gamma_1}(y)\right)^{p-}$$

$$+\left(\frac{1}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x_0,r})}\int_{B_{x_0,r}\cap X_2} w_2(y)d\mu^{\gamma_2}(y)\right)\left(\frac{1}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x_0,r})}\int_{B_{x_0,r}\cap X_2} w_2(y)^{-\frac{1}{p-1}}d\mu^{\gamma_2}(y)\right)^{p-}$$

$$= I + II + III + IV.$$

condición suficiente

condición suficiente

$$\left(\frac{1}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x_0,r})}\int_{B_{x_0,r}\cap X_1} w_1(y)d\mu^{\gamma_1}(y)\right)\left(\frac{1}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x_0,r})}\int_{B_{x_0,r}\cap X_2} w_2(y)^{-\frac{1}{p-1}}d\mu^{\gamma_2}(y)\right)^{p-1}$$
$$= \frac{\int_{B_{x_0,r}\cap X_1} w_1(y)d\mu^{\gamma_1}(y)}{\int_{B_{x_0,r}\cap X_2} w_2(y)d\mu^{\gamma_2}(y)}\left(\frac{1}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x_0,r})}\int_{B_{x_0,r}\cap X_2} w_2(y)d\mu^{\gamma_2}(y)\right)$$
$$\times\left(\frac{1}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x_0,r})}\int_{B_{x_0,r}\cap X_2} w_2(y)^{-\frac{1}{p-1}}d\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(y)(y)\right)^{p-1}.$$

condición suficiente

condición suficiente

segundo; $x \neq x_0$ and $d(x, x_0) \leq cr$ donde c es la constante de la propiedad $\mathcal{C}_o$.
¿qué se usa?

condición suficiente

segundo; $x \neq x_0$ and $d(x, x_0) \leq cr$ donde c es la constante de la propiedad $\mathcal{C}_o$.
¿qué se usa?
$B_{x,r} \subset B_{x_0,r(c+1)} \subset B_{x,r(c+2)}$, y la duplicación de μ^{γ_1,γ_2}

condición suficiente

segundo; $x \neq x_0$ and $d(x, x_0) \leq cr$ donde c es la constante de la propiedad $\mathcal{C}_o$.
¿qué se usa?
$B_{x,r} \subset B_{x_0,r(c+1)} \subset B_{x,r(c+2)}$, y la duplicación de μ^{γ_1,γ_2}
Tercero; $x \neq x_0$ and $0 < r < d(x, X_1) + d(x, X_2)$.
Notar que $B_{x,r}$ está incluída en X_i if $x \in X_i$, $i = 1, 2$;

condición suficiente

condición suficiente

$$\left(\frac{1}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x,r})}\int_{B_{x,r}}(w_1(y)\chi_{X_1}(y)+w_2(y)\chi_{X_2}(y))\,d\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(y)\right)$$
$$\times\left(\frac{1}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x,r})}\int_{B_{x,r}}(w_1(y)\chi_{X_1}(y)+w_2(y)\chi_{X_2}(y))^{-\frac{1}{p-1}}\,d\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(y)\right)^{p-1}\leq \tag{11}$$

condición necesaria

condición necesaria

Debemos probar que si $w \in A_p(X, d, \mu^{\gamma_1,\gamma_2})$ then (9) vale. A partir de (11) y usando la desigualdad de Hölder en X_2 con la medida μ^{γ_2} tenemos:

condición necesaria

condición necesaria

$$C \geq \frac{\int_{B_{x_0,r}\cap X_1} w_1(y)d\mu^{\gamma_1}(y)}{(\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x_0,r}))^p}\frac{(\mu^{\gamma_2}(B_{x_0,r}\cap X_2))^p}{\int_{B_{x_0,r}\cap X_2} w_2(y)d\mu^{\gamma_2}(y)}$$

$$\geq \left(\frac{\mu^{\gamma_2}(B_{x_0,r}\cap X_2)}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x_0,r})}\right)^p \frac{\int_{B_{x_0,r}\cap X_1} w_1(y)d\mu^{\gamma_1}(y)}{\int_{B_{x_0,r}\cap X_2} w_2(y)d\mu^{\gamma_2}(y)};$$

condición necesaria

$$C \geq \frac{\int_{B_{x_0,r}\cap X_1} w_1(y)d\mu^{\gamma_1}(y)}{(\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x_0,r}))^p} \frac{(\mu^{\gamma_2}(B_{x_0,r} \cap X_2))^p}{\int_{B_{x_0,r}\cap X_2} w_2(y)d\mu^{\gamma_2}(y)}$$

$$\geq \left(\frac{\mu^{\gamma_2}(B_{x_0,r} \cap X_2)}{\mu^{\gamma_1,\gamma_2}(B_{x_0,r})}\right)^p \frac{\int_{B_{x_0,r}\cap X_1} w_1(y)d\mu^{\gamma_1}(y)}{\int_{B_{x_0,r}\cap X_2} w_2(y)d\mu^{\gamma_2}(y)};$$

`fin`