

# Método de Galerkin discontinuo para el $p(x)$ - Laplaciano

Ariel Lombardi, Leandro del Pezzo, Sandra Martínez

Departamento de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

Junio 2010 Santa Fe

# Índice

## 1 Introducción

Modelos para problema de Imágenes

Otros Modelos

Problema Continuo

Galerkin Discontinuo

Ejemplo Numérico

# Índice

## 1 Introducción

Modelos para problema de Imágenes

Otros Modelos

Problema Continuo

Galerkin Discontinuo

Ejemplo Numérico

## 2 El espacio $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$

# Índice

## 1 Introducción

Modelos para problema de Imágenes

Otros Modelos

Problema Continuo

Galerkin Discontinuo

Ejemplo Numérico

## 2 El espacio $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$

## 3 Método Numérico

Malla y Espacio discreto

Problema Discreto

Operador de Reconstrucción

Convergencia del Método

# Índice

## 1 Introducción

Modelos para problema de Imágenes

Otros Modelos

Problema Continuo

Galerkin Discontinuo

Ejemplo Numérico

## 2 El espacio $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$

## 3 Método Numérico

Malla y Espacio discreto

Problema Discreto

Operador de Reconstrucción

Convergencia del Método

## 4 Conclusiones y preguntas

Dada una imagen

$$u_0 = I + \eta.$$

con  $I$  imagen real,  $\eta$  ruido, el objetivo es recuperar la imagen  $I$ .

Dada una imagen

$$u_0 = I + \eta.$$

con  $I$  imagen real,  $\eta$  ruido, el objetivo es recuperar la imagen  $I$ .

P-L-Lions-Rudin-Osher ('92) proponen; Minimizar  $\int_{\Omega} |\nabla u|$ , con

$$\int_{\Omega} u = \int_{\Omega} u_0 \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} |u - u_0|^2 = \sigma^2$$

Viene de asumir que el ruido  $\eta$  tenga esperanza cero y varianza  $\sigma$ .  
De hecho, en general

- $\eta(x)$  es una función que representa ruido blanco
- $\int_{\Omega} \eta = 0$  y  $\sigma^2 = \int_{\Omega} |\eta|^2$ .

Prueban que si  $\sigma < \|u_0 - \int_{\Omega} u_0\|_2$  entonces existe un único mínimo en  $BV \cap L^2$  y el problema equivale a minimizar,

$$\int_{\Omega} (|\nabla u| + \frac{\lambda}{2}|u - u_0|^2) dx$$

para  $\lambda = \lambda(\sigma, u_0)$  (multiplicador de Lagrange).

(Estamos notando:  $|Du|(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u|$ .)

Este método es bueno para funciones constantes a trozos.

Prueban que si  $\sigma < \|u_0 - \int_{\Omega} u_0\|_2$  entonces existe un único mínimo en  $BV \cap L^2$  y el problema equivale a minimizar,

$$\int_{\Omega} (|\nabla u| + \frac{\lambda}{2}|u - u_0|^2) dx$$

para  $\lambda = \lambda(\sigma, u_0)$  (multiplicador de Lagrange).

(Estamos notando:  $|Du|(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u|$ .)

Este método es bueno para funciones constantes a trozos.

**Problema:** Pueden aparecer bordes nuevos.

Prueban que si  $\sigma < \|u_0 - \int_{\Omega} u_0\|_2$  entonces existe un único mínimo en  $BV \cap L^2$  y el problema equivale a minimizar,

$$\int_{\Omega} (|\nabla u| + \frac{\lambda}{2}|u - u_0|^2) dx$$

para  $\lambda = \lambda(\sigma, u_0)$  (multiplicador de Lagrange).

(Estamos notando:  $|Du|(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u|$ .)

Este método es bueno para funciones constantes a trozos.

**Problema:** Pueden aparecer bordes nuevos.

**Difusión isotrópica:**  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \rightarrow$  suaviza, no preserva bordes.

## Combinación (Chambolle - Lions):

$$\frac{1}{2\beta} \int_{|\nabla u| < \beta} |\nabla u|^2 + \int_{|\nabla u| \geq \beta} ( (|\nabla u| - \beta/2) + \frac{\lambda}{2} |u - u_0|^2 )$$

Bueno en imagenes donde las zonas homogéneas están separadas por bordes.

## Combinación (Chambolle - Lions):

$$\frac{1}{2\beta} \int_{|\nabla u| < \beta} |\nabla u|^2 + \int_{|\nabla u| \geq \beta} ((|\nabla u| - \beta/2) + \frac{\lambda}{2} |u - u_0|^2)$$

Bueno en imagenes donde las zonas homogéneas están separadas por bordes.

## Modelo de Blomgren (97'):

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(|\nabla u|)} + \frac{\lambda}{2} |u - u_0|^2)$$

con  $\lim_{s \rightarrow 0} p(s) = 2$  y  $\lim_{s \rightarrow \infty} p(s) = 1$ .

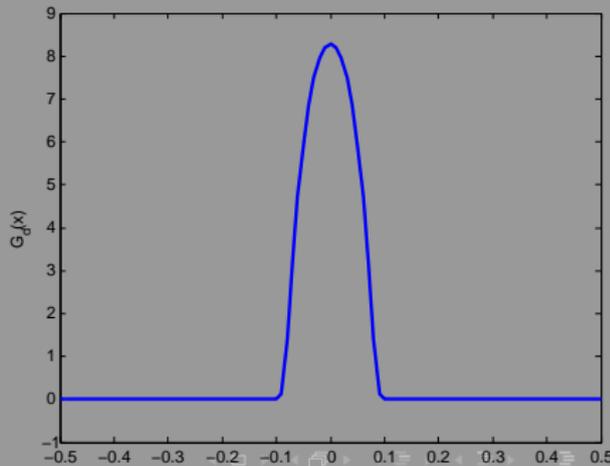
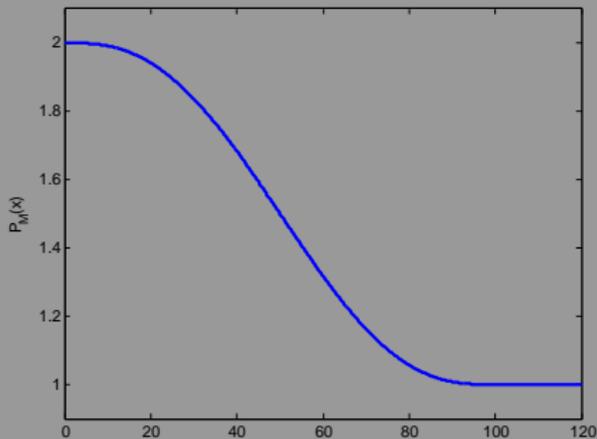
Bueno pero difícil matemáticamente.

## Modelo de Boltz et al (2007):

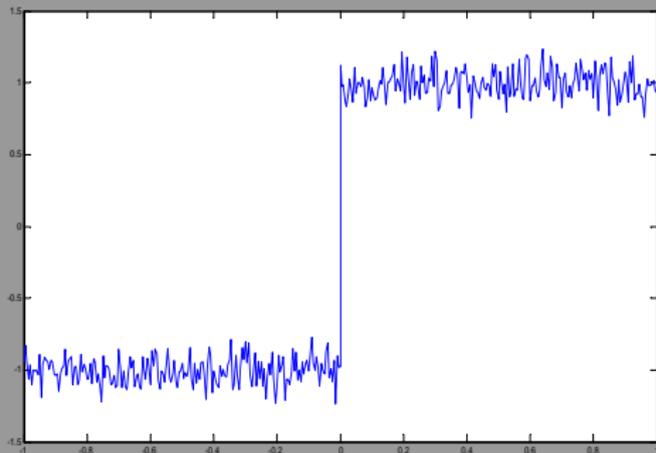
$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)} + \frac{\lambda}{2} |u - u_0|^2)$$

con  $p = P_M(|\nabla G_{\delta} * u_0|)$  donde  $M \gg 1$  y  $P_M$  un polinomio si  $|x| \leq M$ ,  $P_M(0) = 2$  y  $P_M(x) = 1$  si  $|x| > M$ .

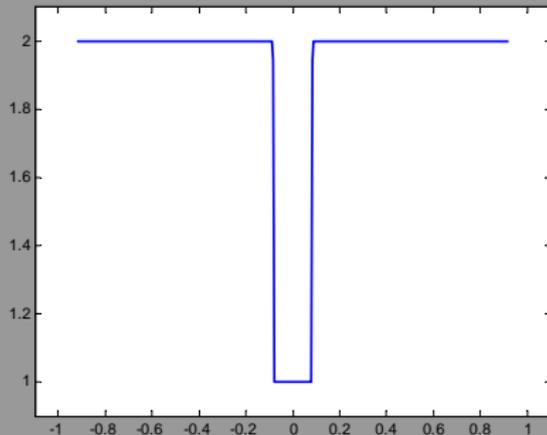
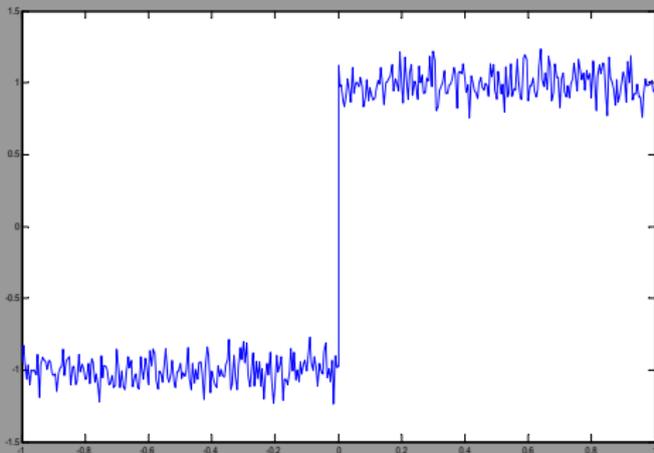
Luego, donde  $u_0$  tenga saltos  $p(x) = 1$  y en zonas homogéneas  $p(x) = 2$ .



Por ejemplo, si tomamos una imagen  $I = -\chi_{[-1,0)} + \chi_{[0,1)}$  y le agregamos ruido,  $p$  resulta;



Por ejemplo, si tomamos una imagen  $I = -\chi_{[-1,0)} + \chi_{[0,1)}$  y le agregamos ruido,  $p$  resulta;



Buscamos aproximar el mínimo de

$$I(u) = \int_{\Omega} F(x, u, \nabla u) dx = \int_{\Omega} \left( \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{\lambda}{q(x)} |u - u_0|^{q(x)} \right) dx$$

en  $\mathcal{A} = \{u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega) : u = u_D \text{ en } \partial\Omega\}$ . Con  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $u_D$  y  $\lambda$  dados.

Espacio:

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega) : \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx < \infty\},$$

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in W^{1,1}(\Omega) : u, \nabla u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)\}$$

Buscamos aproximar el mínimo de

$$I(u) = \int_{\Omega} F(x, u, \nabla u) dx = \int_{\Omega} \left( \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{\lambda}{q(x)} |u - u_0|^{q(x)} \right) dx$$

en  $\mathcal{A} = \{u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega) : u = u_D \text{ en } \partial\Omega\}$ . Con  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $u_D$  y  $\lambda$  dados.

Espacio:

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) : \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx < \infty \right\},$$

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in W^{1,1}(\Omega) : u, \nabla u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)\}$$

Ecuación asociada al problema:  $\Delta_{p(x)} u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)$ ,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \lambda(u - u_0) & \text{en } \Omega \\ u = u_D & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Galerkin conforme Consiste en construir un subespacio  $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}$  y minimizar el funcional  $I$  sobre  $\mathcal{A}_h$ .

**Galerkin conforme** Consiste en construir un subespacio  $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}$  y minimizar el funcional  $I$  sobre  $\mathcal{A}_h$ .

**Galerkin Discontinuo** Minimizar el funcional  $I$  con un término de penalización sobre un espacio  $\mathcal{A}_h$  de funciones discontinuas a través de los elementos.

- Estos métodos fueron introducidos en los '70 para ecuaciones Hiperbólicas.
- También se introdujeron diferentes métodos para ecuaciones elípticas y parabólicas.

**Galerkin conforme** Consiste en construir un subespacio  $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}$  y minimizar el funcional  $I$  sobre  $\mathcal{A}_h$ .

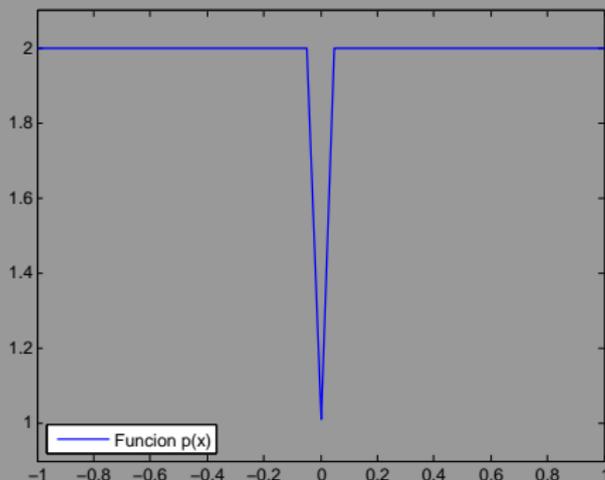
**Galerkin Discontinuo** Minimizar el funcional  $I$  con un término de penalización sobre un espacio  $\mathcal{A}_h$  de funciones discontinuas a través de los elementos.

- Estos métodos fueron introducidos en los '70 para ecuaciones Hiperbólicas.
- También se introdujeron diferentes métodos para ecuaciones elípticas y parabólicas.
- Recientemente se aplicó para problemas de minimización. Buffa y Ortner trabajaron en el caso  $p = \text{constante}$ .

## Ejemplo en dimensión 1

$\Omega = [-1, 1]$ ,  $\lambda = 0$  y  $B = u_D(1) = -u_D(-1)$  y

- $p(x)$  es una función lineal a trozos que en 0 vale  $1 + \varepsilon$  con  $\varepsilon \ll 1$ ,
- $p(x) = 2$  si  $|x| > a$  con  $a \ll 1$ .



El problema es,

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)} u &= ((u')^{p(x)-1})' = 0 & \text{en } (-1, 1) \\ u(1) &= -u(-1) = B \end{cases}$$

Como  $u'^{p(x)-1}(x) = \text{constante}$ .

El problema es,

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)} u &= ((u')^{p(x)-1})' = 0 & \text{en } (-1, 1) \\ u(1) &= -u(-1) = B \end{cases}$$

Como  $u'^{p(x)-1}(x) = \text{constante}$ .

Luego,

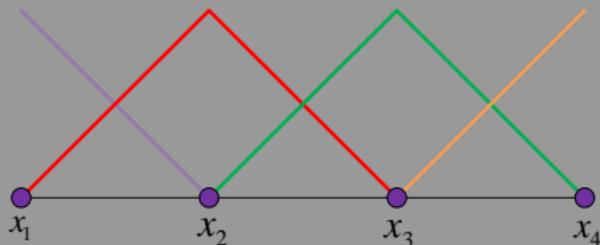
- $u$  es lineal en  $|x| > a$

$$u(x) = \begin{cases} C(x-1) + B & \text{en } x \geq a \\ C(x+1) - B & \text{en } x \leq -a \end{cases}$$

- $|u'(0)| = C^{\frac{1}{(p(0)-1)}} = C^{1/\varepsilon} \rightarrow \infty$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

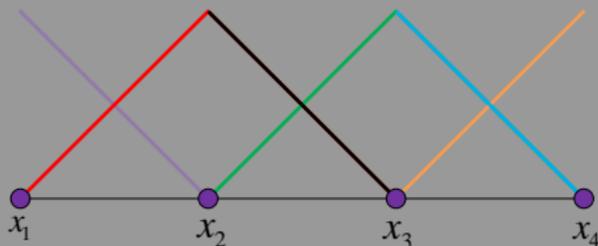


## Funciones base para Galerkin continuo

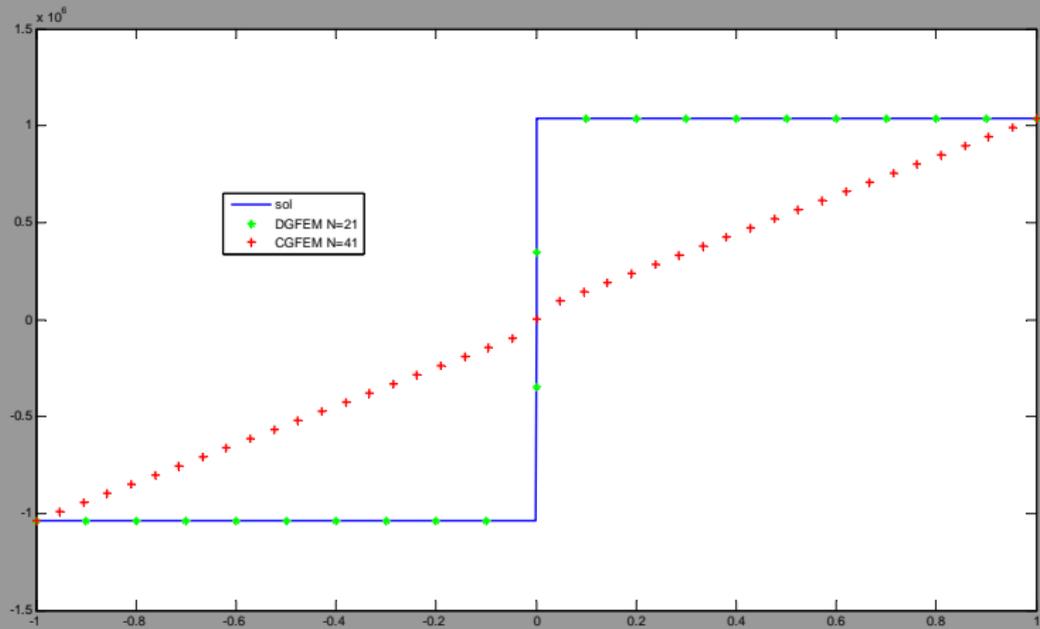


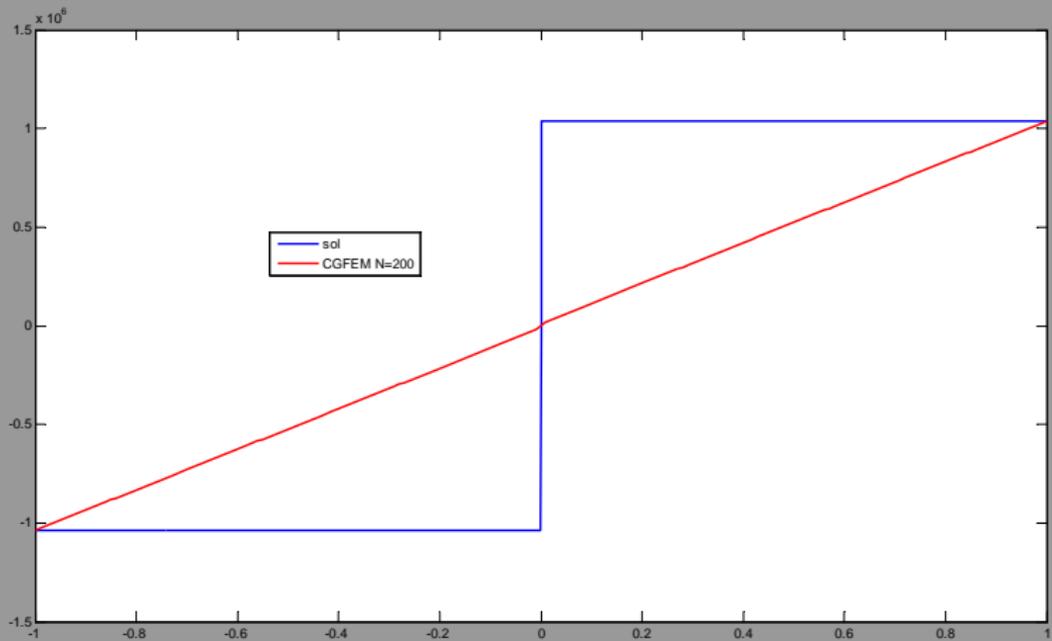
dimensión del espacio =  $n$ .

## Funciones base para Galerkin discontinuo



dimensión del espacio =  $2n - 2$ .





## Propiedades del espacio

Sea  $p : \Omega \rightarrow (1, \infty)$ , entonces

- Existen  $c_1, c_2, \alpha, \beta$  tales que

$$c_1 \left( \int_{\Omega} |u|^{p(x)} \right)^{\alpha} \leq \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq c_2 \left( \int_{\Omega} |u|^{p(x)} \right)^{\beta}.$$

- Desigualdad de Hölder: Si  $1/p(x) + 1/p'(x) = 1$  entonces,

$$\int_{\Omega} |uv| \, dx \leq 2 \|u\|_{p(\cdot)} \|v\|_{p'(\cdot)}.$$

- Si  $p(x) \geq p_1 > 1$ ,  $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$  es reflexivo.

## Propiedades del espacio

Sea  $p : \Omega \rightarrow (1, \infty)$ , entonces

- Existen  $c_1, c_2, \alpha, \beta$  tales que

$$c_1 \left( \int_{\Omega} |u|^{p(x)} \right)^{\alpha} \leq \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq c_2 \left( \int_{\Omega} |u|^{p(x)} \right)^{\beta}.$$

- Desigualdad de Hölder: Si  $1/p(x) + 1/p'(x) = 1$  entonces,

$$\int_{\Omega} |uv| \, dx \leq 2 \|u\|_{p(\cdot)} \|v\|_{p'(\cdot)}.$$

- Si  $p(x) \geq p_1 > 1$ ,  $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$  es reflexivo.
- Interpolación: si  $p(x) \leq r(x) < q(x)$  existen  $C, \mu, \nu$  tales que

$$\|u\|_{r(\cdot)} \leq C \|u\|_{p(\cdot)}^{\mu} \|u\|_{q(\cdot)}^{\nu}$$

Si  $p$  es log-continua en  $\bar{\Omega}$ , i.e,  $\forall x, y \in \bar{\Omega}$ ,

$$|p(x) - p(y)| \leq C \left( \log \left( e + \frac{1}{|x - y|} \right) \right)^{-1}$$

Si  $p$  es log-continua en  $\bar{\Omega}$ , i.e,  $\forall x, y \in \bar{\Omega}$ ,

$$|p(x) - p(y)| \leq C \left( \log \left( e + \frac{1}{|x - y|} \right) \right)^{-1}$$

- $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$  es compacta, con  $1 \leq q(x) < p^*(x)$ .
- $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(\cdot)}(\partial\Omega)$  es compacta, con  $1 \leq r(x) < p_*(x)$
- Poincaré:  $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ .

Si  $p$  es log-continua en  $\bar{\Omega}$ , i.e,  $\forall x, y \in \bar{\Omega}$ ,

$$|p(x) - p(y)| \leq C \left( \log \left( e + \frac{1}{|x - y|} \right) \right)^{-1}$$

- $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$  es compacta, con  $1 \leq q(x) < p^*(x)$ .
- $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(\cdot)}(\partial\Omega)$  es compacta, con  $1 \leq r(x) < p_*(x)$
- Poincaré:  $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ .

## Propiedad

Si  $p$  es log-continua, entonces para todo  $\kappa \subset \Omega$  con  $\text{diam}(\kappa) = h$  se tiene,

$$h^{p_- - p_+} \leq C,$$

con  $C$  independiente de  $h$  y  $p_- = \min_{\kappa} p$  y  $p_+ = \max_{\kappa} p$ .

## Propiedades de la Malla

- $\Omega$  poligonal y  $(\mathcal{T}_h)_{h \in (0,1]}$  familia de particiones  $\overline{\Omega}$  de poliedros  $\kappa$  con  $h_\kappa = \dim(\kappa) \leq h$ .

## Propiedades de la Malla

- $\Omega$  poligonal y  $(\mathcal{T}_h)_{h \in (0,1]}$  familia de particiones  $\overline{\Omega}$  de poliedros  $\kappa$  con  $h_\kappa = \dim(\kappa) \leq h$ .
- Existen  $C_1, C_2$  tales que

$$C_1 h_\kappa^N \leq |\kappa| \leq C_2 h_\kappa^N.$$

- Existe  $C > 0$  tal que si  $e = \kappa \cap \kappa'$ , hay una bola incluida en dicho lado con radio  $C\rho_e \geq \text{diam}(e) = h_e$ .

$$ch_\kappa \leq h_e \leq Ch_\kappa, \quad ch_{\kappa'} \leq h_e \leq Ch_{\kappa'}.$$

## Espacio Discreto

$$W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h) = \{u \in L^1(\Omega) : u|_{\kappa} \in W^{1,p(\cdot)}(\kappa) \text{ para todo } \kappa \in \mathcal{T}_h\}$$

y el subespacio de elementos finitos discontinuo

$$S^k(\mathcal{T}_h) = \{u \in L^1(\Omega) : u|_{\kappa} \in P^k \text{ para todo } \kappa \in \mathcal{T}_h\}$$

donde  $P^k$  espacio de polinomios de grado a lo sumo  $k \geq 1$ .

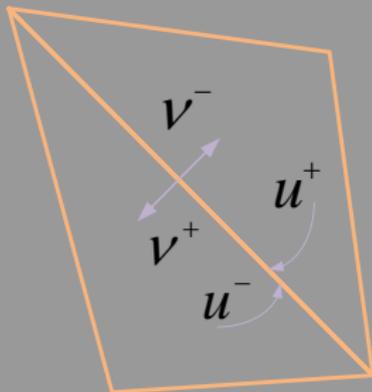
## Espacio Discreto

$$W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h) = \{u \in L^1(\Omega) : u|_{\kappa} \in W^{1,p(\cdot)}(\kappa) \text{ para todo } \kappa \in \mathcal{T}_h\}$$

y el subespacio de elementos finitos discontinuo

$$S^k(\mathcal{T}_h) = \{u \in L^1(\Omega) : u|_{\kappa} \in P^k \text{ para todo } \kappa \in \mathcal{T}_h\}$$

donde  $P^k$  espacio de polinomios de grado a lo sumo  $k \geq 1$ .



Definimos:

$$[[u]] = u^+ \nu^+ + u^- \nu^-$$

y  $\nabla u =$  el gradiente en cada elemento.

Consideramos la seminorma,

$$|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)} = \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \sum_{e \in \Gamma_{int}} \| | [u] | h^{\frac{-1}{p'(x)}} \|_{L^{p(\cdot)}(e)},$$

Consideramos la seminorma,

$$|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)} = \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \sum_{e \in \Gamma_{int}} \| | [u] | h^{\frac{-1}{p'(x)}} \|_{L^{p(\cdot)}(e)},$$

Por ejemplo, si  $p = 2$

$$\| | [u] | h^{\frac{-1}{2}} \|_{L^2(e)}^2 = \int_e |[u]|^2 h^{-1} ds$$

Si discretizamos el funcional de la forma,

$$I_h(v_h) = \int_{\Omega} F(x, v_h, \nabla u_h) dx + \int_{\Gamma_{int}} |[[v_h]]|^{p(x)} h^{1-p(x)} ds \\ + \int_{\partial\Omega} |v_h - u_D|^{p(x)} h^{1-p(x)} ds$$

Si discretizamos el funcional de la forma,

$$I_h(v_h) = \int_{\Omega} F(x, v_h, \nabla u_h) dx + \int_{\Gamma_{int}} |[[v_h]]|^{p(x)} h^{1-p(x)} ds \\ + \int_{\partial\Omega} |v_h - u_D|^{p(x)} h^{1-p(x)} ds$$

Problema: discretización inconsistente para el gradiente.

Tenemos que, para toda  $\phi \in (C_0^1(\Omega))^N$ ,

$$- \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} \phi dx = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \phi dx - \int_{\Gamma_{int}} [[u_h]] \cdot \phi ds.$$

Lo que nos dice que hay una contribución de los saltos en el gradiente distribucional.

Para ello, Eyck- Lew usan el operador de levantamiento,

$R : W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h) \rightarrow (S^k(\mathcal{T}_h))^N$  definido de la forma

$$\int_{\Omega} R(u) \cdot \phi \, dx = - \int_{\Gamma_{int}} \llbracket u \rrbracket \cdot \{\phi\} \, ds \quad \text{para } \phi \in (S^k(\mathcal{T}_h))^N$$

donde  $\{\phi\}$  es el promedio de la función sobre cada  $e \in \Gamma_{int}$ .

Para ello, Eyck- Lew usan el operador de levantamiento,  
 $R : W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h) \rightarrow (S^k(\mathcal{T}_h))^N$  definido de la forma

$$\int_{\Omega} R(u) \cdot \phi \, dx = - \int_{\Gamma_{int}} \llbracket u \rrbracket \cdot \{\phi\} \, ds \quad \text{para } \phi \in (S^k(\mathcal{T}_h))^N$$

donde  $\{\phi\}$  es el promedio de la función sobre cada  $e \in \Gamma_{int}$ .

Por ejemplo, si  $R(u)$  es constante en cada elemento

$$R(u)|_{\kappa} = |\kappa|^{-1} \int_{\partial\kappa \setminus \partial\Omega} \llbracket u_h \rrbracket \, ds \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_h$$

Luego basandonos en el trabajo de Buffa-Ortner (para el caso  $p$ =constante), proponemos el funcional

$$I_h(v_h) = \int_{\Omega} (|\nabla v_h + R(v_h)|^{p(x)} + |v_h - u_0|^{q(x)}) dx \\ + \int_{\Gamma_{int}} |[[v_h]]|^{p(x)} h^{1-p(x)} ds + \int_{\partial\Omega} |v_h - u_D|^{p(x)} h^{1-p(x)} ds$$

Luego basandonos en el trabajo de Buffa-Ortner (para el caso  $p$ =constante), proponemos el funcional

$$I_h(v_h) = \int_{\Omega} (|\nabla v_h + R(v_h)|^{p(x)} + |v_h - u_0|^{q(x)}) dx \\ + \int_{\Gamma_{int}} |[[v_h]]|^{p(x)} h^{1-p(x)} ds + \int_{\partial\Omega} |v_h - u_D|^{p(x)} h^{1-p(x)} ds$$

Problema discreto: Encontrar  $u_h \in S^k(\mathcal{T}_h)$  tal que,

$$\min_{v_h \in S^k(\mathcal{T}_h)} I_h(v_h) = I_h(u_h)$$

y ver en que sentido  $u_h \rightarrow u$  con  $I(u) = \min_{v \in \mathcal{A}} I(v)$ , donde

$$\mathcal{A} = \{v \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega) : v - u_D \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)\}.$$

Probamos para el operador de levantada,

Lema

Sea  $p : \Omega \rightarrow [1, \infty)$  log-Hölder continua en  $\Omega$ , luego existe  $C$  tal que  $\forall h \in (0, 1]$ .

$$\|R(u)\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C \|h^{-1/p'(x)} \llbracket u \rrbracket\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma_{int})} \quad \forall u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h).$$

Probamos para el operador de levantada,

Lema

Sea  $p : \Omega \rightarrow [1, \infty)$  log-Hölder continua en  $\Omega$ , luego existe  $C$  tal que  $\forall h \in (0, 1]$ .

$$\|R(u)\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C \|h^{-1/p'(x)} \llbracket u \rrbracket\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma_{int})} \quad \forall u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h).$$

Lema

Existe  $C_1$  tal que para todo  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ , tenemos que  $\forall h \in (0, 1]$ ,

$$\|R(u)\|_{L^{p(\cdot)}(\kappa)} \leq C_1 \|h^{-1/p'(x)} \llbracket u \rrbracket\|_{L^{p(\cdot)}(\kappa \cap \Gamma_{int})} \quad \forall u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h).$$

Podemos probar que,

Lema

*Para todo  $p: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , existe  $C$ , independiente de  $h$  tal que,  $\forall h \in (0, 1]$ ,*

$$|Du|(\Omega) \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)} \quad \forall u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)$$

Podemos probar que,

Lema

*Para todo  $p: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , existe  $C$ , independiente de  $h$  tal que,  $\forall h \in (0, 1]$ ,*

$$|Du|(\Omega) \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)} \quad \forall u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)$$

Problema con la compacidad

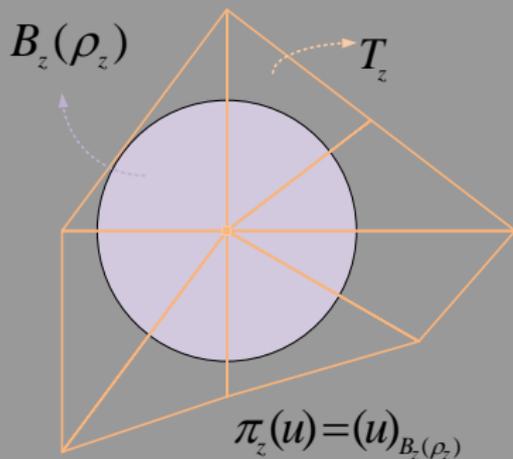
- $BV(\Omega) \subset L^1(\Omega)$  compacto.
- El operador de traza  $T : BV(\Omega) \rightarrow L^1(\partial\Omega)$  no es compacto.

## Definición (Buffa- Ortner)

Sea  $\lambda_z$  la base estandar de  $P^1$  y  $Q_h : S^k(\mathcal{T}_h) \rightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$  definido como

$$Q_h u = \sum_{z \in \mathcal{N}_h} \pi_z(u) \lambda_z.$$

Donde  $\pi_z : BV(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  es el operador de proyección local:



Cumple que si  $h_z = \text{diam}(T_z)$ ,

$$\|u - \pi_z(u)\|_{L^1(T_z)} \leq Ch_z |Du|(T_z).$$

$$h_z \sim h_\kappa \forall \kappa \in T_z.$$

## Teorema

① El operador  $Q_h$  satisface que para toda  $u \in S^k(\mathcal{T}_h)$ ,

$$(1) \quad \|u - Q_h(u)\|_{L^{p^*(\cdot)}(\Omega)} \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}$$

$$(2) \quad \|u - Q_h(u)\|_{L^{p_*(\cdot)}(\partial\Omega)} \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}$$

$$(3) \quad \|\nabla Q_h(u)\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}$$

$$(4) \quad \int_{\partial\Omega} |u - Q_h(u)|^{r(x)} dx \leq Ch^\alpha |u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}^\beta \quad \text{si } r(x) \leq p_*(x).$$

Con  $\alpha = 0$  si  $r(x) = p_*(x)$ .

## Teorema

1 El operador  $Q_h$  satisface que para toda  $u \in S^k(\mathcal{T}_h)$ ,

$$(1) \quad \|u - Q_h(u)\|_{L^{p^*(\cdot)}(\Omega)} \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}$$

$$(2) \quad \|u - Q_h(u)\|_{L^{p^*(\cdot)}(\partial\Omega)} \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}$$

$$(3) \quad \|\nabla Q_h(u)\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}$$

$$(4) \quad \int_{\partial\Omega} |u - Q_h(u)|^{r(x)} dx \leq Ch^\alpha |u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}^\beta \quad \text{si } r(x) \leq p_*(x).$$

Con  $\alpha = 0$  si  $r(x) = p_*(x)$ .

2 Probar "Poincaré" para el espacio discreto,

$$\|u\|_{L^{p^*(\cdot)}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^1(\Omega)} + |u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}) \quad \forall u \in S^k(\mathcal{T}_h)$$

Sale usando,

- La desigualdad (1).
- La desigualdad de Poincaré para  $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$  y  $BV(\Omega)$ .
- Usando que  $|Du|(\Omega) \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)}$ .

Idea de la demostración de  $\|Q_h(u) - u\|_{L^{p^*(\cdot)}(\Omega)} \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}$ :

- Acotar localmente

$$\|u - Q_h(u)\|_{L^{p^*(\cdot)}(\kappa)} \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_\kappa)}$$

- Usando  $\|u\|_{L^{q(\cdot)}(\kappa)} \leq Ch_\kappa^{N/q_- - N/p_-} \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\kappa)} \quad \forall u \in S^k(\mathcal{T}_h)$
- Usando la acotación del operador de proyección local.

Idea de la demostración de  $\|Q_h(u) - u\|_{L^{p^*(\cdot)}(\Omega)} \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}$ :

- Acotar localmente

$$\|u - Q_h(u)\|_{L^{p^*(\cdot)}(\kappa)} \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_\kappa)}$$

- Usando  $\|u\|_{L^{q(\cdot)}(\kappa)} \leq Ch_\kappa^{N/q_- - N/p_-} \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\kappa)} \quad \forall u \in S^k(\mathcal{T}_h)$
- Usando la acotación del operador de proyección local.
- Acotación Global Suponemos  $|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)} \leq 1$ ,

$$\text{Usamos } \int_{\kappa} |u - Q_h(u)|^{q(x)} dx \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_\kappa)}^{q_-}$$

Idea de la demostración de  $\|Q_h(u) - u\|_{L^{p^*(\cdot)}(\Omega)} \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}$ :

- Acotar localmente

$$\|u - Q_h(u)\|_{L^{p^*(\cdot)}(\kappa)} \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_\kappa)}$$

- Usando  $\|u\|_{L^{q(\cdot)}(\kappa)} \leq Ch_\kappa^{N/q_- - N/p_-} \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\kappa)} \quad \forall u \in S^k(\mathcal{T}_h)$
- Usando la acotación del operador de proyección local.
- Acotación Global Suponemos  $|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)} \leq 1$ ,

$$\text{Usamos } \int_{\kappa} |u - Q_h(u)|^{q(x)} dx \leq C|u|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_\kappa)}^{q_-}$$

Si  $A = \{\kappa : \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\kappa)} \geq h_\kappa^{N/q_-}\}$  podemos probar,

$$\text{si } \kappa \in A \Rightarrow \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\kappa)}^{q_-} \leq C\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\kappa)}^{q_+} \leq \int_{\kappa} |\nabla u|^{p(x)} dx.$$

Como

$$A = \{ \kappa \in \mathcal{T}_h : \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\kappa)} \geq h_\kappa^{N/q_-} \}$$

y

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^N \leq C \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} |\kappa| = C|\Omega|,$$

Como

$$A = \{ \kappa \in \mathcal{T}_h : \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\kappa)} \geq h_\kappa^{N/q_-} \}$$

y

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^N \leq C \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} |\kappa| = C|\Omega|,$$

Entonces,

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\kappa)}^{q_-} \leq C \sum_{\kappa \in A} \int_{\kappa} |\nabla u|^{p(x)} dx + \sum_{\kappa \in A^c} h_\kappa^N \leq C$$

Finalmente se tiene la compacidad:

### Teorema

Si  $(\|u_h\|_{L^1(\Omega)} + |u_h|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}) \leq C$  entonces existe  $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ ,

$$(5) \quad u_{h_j} \rightarrow u \text{ en } L^{q(\cdot)}(\Omega) \text{ si } q(x) < p^*(x)$$

$$(6) \quad u_{h_j} \rightarrow u \text{ en } L^{r(\cdot)}(\partial\Omega) \text{ si } r(x) < p_*(x)$$

Finalmente se tiene la compacidad:

### Teorema

Si  $(\|u_h\|_{L^1(\Omega)} + |u_h|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}) \leq C$  entonces existe  $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ ,

$$(5) \quad u_{h_j} \rightarrow u \text{ en } L^{q(\cdot)}(\Omega) \text{ si } q(x) < p^*(x)$$

$$(6) \quad u_{h_j} \rightarrow u \text{ en } L^{r(\cdot)}(\partial\Omega) \text{ si } r(x) < p_*(x)$$

### Demostración.

La demostración de (5) sale usando la compacidad de  $BV(\Omega) \subset L^1(\Omega)$  + Poincaré para  $S^k(\mathcal{T}_h)$  + interpolación.

Finalmente se tiene la compacidad:

### Teorema

Si  $(\|u_h\|_{L^1(\Omega)} + |u_h|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}) \leq C$  entonces existe  $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ ,

$$(5) \quad u_{h_j} \rightarrow u \text{ en } L^{q(\cdot)}(\Omega) \text{ si } q(x) < p^*(x)$$

$$(6) \quad u_{h_j} \rightarrow u \text{ en } L^{r(\cdot)}(\partial\Omega) \text{ si } r(x) < p_*(x)$$

### Demostración.

La demostración de (5) sale usando la compacidad de  $BV(\Omega) \subset L^1(\Omega) + \text{Poincaré para } S^k(\mathcal{T}_h) + \text{interpolación.}$

Para la demostración de (6) no tenemos compacidad, por lo tanto usamos Traza para  $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$  y las desigualdades (3) y (4),

$$\int_{\partial\Omega} |u_h - Q_h(u_h)|^{r(x)} dx \leq Ch^\alpha |u_h|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}^\beta,$$

donde  $\alpha > 0$ .

Recordemos,

$$I_h(v_h) = \int_{\Omega} (|\nabla u_h + R(v_h)|^{p(x)} + |v_h - u_0|^{q(x)}) dx \\ + \int_{\Gamma_{int}} |[[v_h]]|^{p(x)} h^{1-p(x)} ds + \int_{\partial\Omega} |v_h - u_D|^{p(x)} h^{1-p(x)} ds$$

Teorema (Coercividad)

Si  $I_h(u_h) \leq C$  entonces

$$\sup_{h \in (0,1]} (\|u_h\|_{L^1(\Omega)} + |u_h|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathcal{T}_h)}) < \infty,$$

y

$$\sup_{h \in (0,1]} \left( \int_{\partial\Omega} |u_h - u_D|^{p(x)} h^{1-p(x)} ds \right) < \infty.$$

## Teorema (Convergencia)

Para todo  $h \in (0, 1]$ , sea  $u_h$  un minimizante de  $I_h$  y  $u$  minimizante de  $I$  en  $\mathcal{A}$ . Luego,

$$u_h \rightarrow u \quad \text{en } L^{q(\cdot)}(\Omega) \quad \forall 1 \leq q(x) < p^*(x),$$

$$\nabla u_h \rightharpoonup \nabla u \quad \text{débil en } L^{p(\cdot)}(\Omega),$$

$$I_h(u_h) \rightarrow I(u),$$

$$\int_{\Gamma_D} |u_h - u_D|^{p(x)} h^{1-p(x)} dS + \int_{\Gamma_{int}} |[u_h]|^{p(x)} h^{1-p(x)} dS \rightarrow 0.$$

## Problema Numérico

- Obtenemos convergencia del método de Galerkin Discontinuo y en la práctica funciona mejor cuando  $p(x)$  toma valores cercanos a 1.

## Problema Numérico

- Obtenemos convergencia del método de Galerkin Discontinuo y en la práctica funciona mejor cuando  $p(x)$  toma valores cercanos a 1.
- Construir ejemplos en dimensión 2.
- Ver métodos que encuentren mas eficientemente mínimos de funciones en dimensiones grandes.
- Nos gustaría estudiar el problema en el caso en que  $p = 1$  en alguna región.

## Problema Numérico

- Obtenemos convergencia del método de Galerkin Discontinuo y en la práctica funciona mejor cuando  $p(x)$  toma valores cercanos a 1.
- Construir ejemplos en dimensión 2.
- Ver métodos que encuentren mas eficientemente mínimos de funciones en dimensiones grandes.
- Nos gustaría estudiar el problema en el caso en que  $p = 1$  en alguna región.

## Problema de procesamiento de imagenes

- Tenemos algunos resultados preliminares en dimensión 1:  
Imagen+ruido  $\rightarrow$  Construcción de  $p(x)$   $\rightarrow$  Método de Galerkin discontinuo  $\rightarrow u_h$ . Comparar Imagen con  $u_h$ .

## Problema Numérico

- Obtenemos convergencia del método de Galerkin Discontinuo y en la práctica funciona mejor cuando  $p(x)$  toma valores cercanos a 1.
- Construir ejemplos en dimensión 2.
- Ver métodos que encuentren mas eficientemente mínimos de funciones en dimensiones grandes.
- Nos gustaría estudiar el problema en el caso en que  $p = 1$  en alguna región.

## Problema de procesamiento de imagenes

- Tenemos algunos resultados preliminares en dimensión 1:  
Imagen+ruido  $\rightarrow$  Construcción de  $p(x)$   $\rightarrow$  Método de Galerkin discontinuo  $\rightarrow u_h$ . Comparar Imagen con  $u_h$ .
- Nos interesa en este caso implementarlo para imagenes en dimensión 2.

# Gracias!