Saturación global para métodos de regularización espectrales con calificación óptima.

Karina Temperini

FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS - UNL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA APLICADA DEL LITORAL (CONICET - UNL)

Seminario "Carlos Segovia Fernández"
3 de septiembre de 2010

Problema inverso: hallar x en una ecuación de la forma

$$Tx = y$$

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ espacios de Hilbert de dim. infinita; $\mathcal{R}(T)$ no cerrado;
y: dato dado.

Problema inverso: hallar x en una ecuación de la forma

$$Tx = y$$

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ espacios de Hilbert de dim. infinita; $\mathcal{R}(T)$ no cerrado;
y: dato dado.

$T^\dagger$ no acotada $\Leftrightarrow$ Problema "mal condicionado" $\Rightarrow$ REGULARIZAR.

Problema inverso: hallar x en una ecuación de la forma

$$Tx = y$$

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ espacios de Hilbert de dim. infinita; $\mathcal{R}(T)$ no cerrado;
y: dato dado.

$T^\dagger$ no acotada $\Leftrightarrow$ Problema "mal condicionado" $\Rightarrow$ REGULARIZAR.

Regularización de $T^\dagger$: aproximar $T^\dagger$ por una flia. de op. continuos $\{R_\alpha\}$ tal que

$$R_\alpha\, y^\delta \rightarrow T^\dagger y$$

Problema inverso: hallar x en una ecuación de la forma

$$Tx = y$$

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ espacios de Hilbert de dim. infinita; $\mathcal{R}(T)$ no cerrado;
y: dato dado.

$T^\dagger$ no acotada $\Leftrightarrow$ Problema "mal condicionado" $\Rightarrow$ REGULARIZAR.

Regularización de $T^\dagger$: aproximar $T^\dagger$ por una flia. de op. continuos $\{R_\alpha\}$ tal que

$$R_\alpha\, y^\delta \to T^\dagger y$$

cuando $\delta \to 0^+$ y α se elige "apropiadamente".

$$x^\dagger \doteq T^\dagger y = \int_0^{\|T\|^2+} \frac{1}{\lambda}\, dE_\lambda T^* y$$

$\{E_\lambda\}$ flia. espectral asociada a T^*T.

$$x^{\dagger} \doteq T^{\dagger} y = \int_0^{\|T\|^2+} \frac{1}{\lambda}\, dE_\lambda\, T^* y$$

$\{E_\lambda\}$ flia. espectral asociada a $T^* T$.

Familia de Regularización Espectral $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0,\alpha_0)}$:

$$R_\alpha \doteq \int_0^{\|T\|^2+} g_\alpha(\lambda)\, dE_\lambda\, T^*$$

$$x^{\dagger} \doteq T^{\dagger}y = \int_0^{\|T\|^2+} \frac{1}{\lambda}\, dE_\lambda\, T^* y$$

$\{E_\lambda\}$ flia. espectral asociada a T^*T.

Familia de Regularización Espectral $\{R_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$:

$$R_\alpha \doteq \int_0^{\|T\|^2+} g_\alpha(\lambda)\, dE_\lambda\, T^*$$

$g_\alpha : [0, \|T\|^2] \to \mathbb{R}$, $\forall\, \lambda \in [0, \|T\|^2]$, $\lim_{\alpha\to 0^+} g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$,

$$x^\dagger \doteq T^\dagger y = \int_0^{\|T\|^2+} \frac{1}{\lambda}\, dE_\lambda T^* y$$

$\{E_\lambda\}$ flia. espectral asociada a T^*T.

Familia de Regularización Espectral $\{R_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$:

$$R_\alpha \doteq \int_0^{\|T\|^2+} g_\alpha(\lambda)\, dE_\lambda T^*$$

$g_\alpha : [0, \|T\|^2] \to \mathbb{R}$, $\forall\, \lambda \in [0, \|T\|^2]$, $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$,
$\forall\, \alpha \in (0, \alpha_0)$, g_α continua por tramos y $\exists\, C > 0$ tal que

$$|\lambda g_\alpha(\lambda)| \le C \;\forall\, \lambda \in [0, \|T\|^2].$$

$$x^\dagger \doteq T^\dagger y = \int_0^{\|T\|^2+} \frac{1}{\lambda}\, dE_\lambda T^* y$$

$\{E_\lambda\}$ flia. espectral asociada a T^*T.

Familia de Regularización Espectral $\{R_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$:

$$R_\alpha \doteq \int_0^{\|T\|^2+} g_\alpha(\lambda)\, dE_\lambda T^*$$

$g_\alpha : [0, \|T\|^2] \to \mathbb{R}$, $\forall\,\lambda \in [0, \|T\|^2]$, $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$,
$\forall\,\alpha \in (0, \alpha_0)$, g_α continua por tramos y $\exists\, C > 0$ tal que

$$|\lambda g_\alpha(\lambda)| \leq C \;\forall\,\lambda \in [0, \|T\|^2].$$

$\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$: Método de Regularización Espectral (MRE)

Calificación clásica (A. Neubauer, 1994)

Calificación clásica (A. Neubauer, 1994)

$\{g_\alpha\}$ MRE, $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$,

Calificación clásica (A. Neubauer, 1994)

$\{g_\alpha\}$ MRE, $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$,

$$\mathcal{I}(g_\alpha) \doteq \{\mu \geq 0 : \forall\, \lambda \geq 0, \exists\, k > 0, \lambda^\mu\, |r_\alpha(\lambda)| \leq k\, \alpha^\mu\, \forall\, \alpha \in (0, \alpha_0)\}$$

Calificación clásica (A. Neubauer, 1994)

$\{g_\alpha\}$ MRE, $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$,

$$\mathcal{I}(g_\alpha) \doteq \{\mu \geq 0 : \forall\, \lambda \geq 0, \exists\, k > 0, \lambda^\mu\, |r_\alpha(\lambda)| \leq k\, \alpha^\mu\, \forall\, \alpha \in (0, \alpha_0)\}$$

$$\boxed{\mu_0 \doteq \sup_{\mu \in \mathcal{I}(g_\alpha)} \mu}$$

Calificación clásica (A. Neubauer, 1994)

$\{g_\alpha\}$ MRE, $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$,

$$\mathcal{I}(g_\alpha) \doteq \{\mu \geq 0 : \forall\, \lambda \geq 0, \exists\, k > 0, \lambda^\mu\, |r_\alpha(\lambda)| \leq k\, \alpha^\mu\, \forall\, \alpha \in (0, \alpha_0)\}$$

$$\boxed{\mu_0 \doteq \sup_{\mu \in \mathcal{I}(g_\alpha)} \mu}$$

$0 < \mu_0 < +\infty$

Calificación clásica (A. Neubauer, 1994)

$\{g_\alpha\}$ MRE, $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$,

$$\mathcal{I}(g_\alpha) \doteq \{\mu \geq 0 : \forall\, \lambda \geq 0, \exists\, k > 0, \lambda^\mu\, |r_\alpha(\lambda)| \leq k\, \alpha^\mu\, \forall\, \alpha \in (0, \alpha_0)\}$$

$$\boxed{\mu_0 \doteq \sup_{\mu \in \mathcal{I}(g_\alpha)} \mu}$$

$0 < \mu_0 < +\infty \;\Rightarrow\; \{g_\alpha\}$ posee "calificación clásica de orden μ_0".

Calificación clásica (A. Neubauer, 1994)

$\{g_\alpha\}$ MRE, $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$,

$$\mathcal{I}(g_\alpha) \doteq \{\mu \geq 0 : \forall\, \lambda \geq 0, \exists\, k > 0, \lambda^\mu\, |r_\alpha(\lambda)| \leq k\, \alpha^\mu\, \forall\, \alpha \in (0, \alpha_0)\}$$

$$\boxed{\mu_0 \doteq \sup_{\mu \in \mathcal{I}(g_\alpha)} \mu}$$

$0 < \mu_0 < +\infty \;\Rightarrow\; \{g_\alpha\}$ posee "calificación clásica de orden μ_0".

Lema

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{g_\alpha\}$ un MRE con calificación clásica de orden μ_0. Si $x^\dagger \in \mathcal{R}((T^* T)^{\mu_0})$ entonces $\left\| R_\alpha y - x^\dagger \right\| = O(\alpha^{\mu_0})$ cuando $\alpha \to 0^+$.

Supuestos a-priori sobre
$x^\dagger \longrightarrow$ **"conjuntos fuente"**.

Supuestos a-priori sobre
$x^\dagger \longrightarrow$ **"conjuntos fuente".**

$$\Updownarrow$$

Mejor "orden de convergencia"
de $\left\| R_\alpha y - x^\dagger \right\|$ **como función de** α**.**

Supuestos a-priori sobre
$x^\dagger \longrightarrow$ **"conjuntos fuente".**

$$\Updownarrow$$

Mejor "orden de convergencia"
de $\left\| R_\alpha y - x^\dagger \right\|$ **como función de** α**.**

$$\Downarrow$$

Calificación de un MRE.

Calificación - Calificación máxima (P. Mathé, S. V. Pereverzev, 2003)

Calificación - Calificación máxima (P. Mathé, S. V. Pereverzev, 2003)

Definición

Sea $\rho : (0, a] \to (0, \infty)$ creciente.

Calificación - Calificación máxima (P. Mathé, S. V. Pereverzev, 2003)

Definición

Sea $\rho : (0, a] \to (0, \infty)$ creciente.

El MRE $\{g_\alpha\}$ posee "calificación" ρ si $\exists\, \gamma \in (0, \infty)$ tal que

$$\sup_{\lambda \in (0,a]} |r_\alpha(\lambda)|\, \rho(\lambda) \leq \gamma\, \rho(\alpha) \quad \forall\, \alpha \in (0, a].$$

clásica

Calificación - Calificación máxima (P. Mathé, S. V. Pereverzev, 2003)

Definición

Sea $\rho : (0, a] \to (0, \infty)$ creciente.

El MRE $\{g_\alpha\}$ posee "calificación" ρ si $\exists\, \gamma \in (0, \infty)$ tal que

$$\sup_{\lambda \in (0,a]} |r_\alpha(\lambda)|\, \rho(\lambda) \le \gamma\, \rho(\alpha) \quad \forall\, \alpha \in (0, a].$$

▸ clásica

Definición

El MRE $\{g_\alpha\}$ posee "calificación máxima" ρ si ρ es calificación según M-P

Calificación - Calificación máxima (P. Mathé, S. V. Pereverzev, 2003)

Definición

Sea $\rho : (0, a] \to (0, \infty)$ creciente.

El MRE $\{g_\alpha\}$ posee "calificación" ρ si $\exists\, \gamma \in (0, \infty)$ tal que

$$\sup_{\lambda \in (0,a]} |r_\alpha(\lambda)|\, \rho(\lambda) \leq \gamma\, \rho(\alpha) \quad \forall\, \alpha \in (0, a].$$

clásica

Definición

El MRE $\{g_\alpha\}$ posee "calificación máxima" ρ si ρ es calificación según M-P y además, $\forall\, \lambda \in (0, a]\ \exists\, c \doteq c(\lambda) > 0$ tal que

$$\inf_{\alpha \in (0,a]} \frac{|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \geq c.$$

Calificación generalizada para MRE

Calificación generalizada para MRE

Sean $\{g_\alpha\}$ un MRE, $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$, $\rho \in$ $\mathcal{O}$ y $s \in$ $\mathcal{S}$

Calificación generalizada para MRE

Sean $\{g_\alpha\}$ un MRE, $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$, $\rho \in$ $\mathcal{O}$ y $s \in$ $\mathcal{S}$

- (s, ρ) es un "par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$" si

$$\frac{s(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = O(1) \quad \text{cuando} \;\; \alpha \to 0^+, \; \forall\, \lambda > 0. \tag{2.1}$$

Calificación generalizada para MRE

Sean $\{g_\alpha\}$ un MRE, $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$, $\rho \in$ $\mathcal{O}$ y $s \in$ $\mathcal{S}$

- (s, ρ) es un "par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$" si

$$\frac{s(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = O(1) \quad \text{cuando} \quad \alpha \to 0^+, \; \forall\, \lambda > 0. \tag{2.1}$$

- (s, ρ) es un "par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$" si se satisface (2.1) y

$$\limsup_{\alpha \to 0^+} \frac{s(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} > 0 \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Calificación generalizada para MRE

Sean $\{g_\alpha\}$ un MRE, $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$, $\rho \in$ ▸ $\mathcal{O}$ y $s \in$ ▸ $\mathcal{S}$

- (s, ρ) es un "par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$" si

$$\frac{s(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = O(1) \quad \text{cuando } \alpha \to 0^+, \ \forall\, \lambda > 0. \tag{2.1}$$

- (s, ρ) es un "par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$" si se satisface (2.1) y

$$\limsup_{\alpha \to 0^+} \frac{s(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} > 0 \quad \forall\, \lambda > 0.$$

- (ρ, s) es un "par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$" si existen $\gamma > 0$ y $h : (0, \alpha_0) \to \mathbb{R}^+$, $\lim_{\alpha \to 0^+} h(\alpha) = 0$ tales que

$$\frac{s(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \geq \gamma \quad \forall\, \lambda \in [h(\alpha), +\infty).$$

Niveles de Calificación

Niveles de Calificación

- ρ es "calificación generalizada o débil de $\{g_\alpha\}$" si $\exists\, s$ tal que (s, ρ) es par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$.

Niveles de Calificación

- ρ es "calificación generalizada o débil de $\{g_\alpha\}$" si $\exists\, s$ tal que (s, ρ) es par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$.

- ρ es "calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$" si $\exists\, s$ tal que (s, ρ) es par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$.

Niveles de Calificación

- ρ es "calificación generalizada o débil de $\{g_\alpha\}$" si $\exists\, s$ tal que (s, ρ) es par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$.

- ρ es "calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$" si $\exists\, s$ tal que (s, ρ) es par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$.

ρ es "calificación óptima de $\{g_\alpha\}$" si $\exists\, s$ tal que (s, ρ) es par fuerte fuente-orden y (ρ, s) es par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$.

Saturación (A. Neubauer, 1994)

Saturación (A. Neubauer, 1994)

Teorema

Sean $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{R}(T)$ no cerrado y $\{g_\alpha\}$ un MRE con calificación clásica de orden μ_0

Saturación (A. Neubauer, 1994)

Teorema

Sean $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{R}(T)$ no cerrado y $\{g_\alpha\}$ un MRE con calificación clásica de orden μ_0 tal que μ_0 verifica la condición *y g_α satisface* hipótesis.

Saturación (A. Neubauer, 1994)

Teorema

Sean $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $\mathcal{R}(T)$ no cerrado y $\{g_\alpha\}$ un MRE con calificación clásica de orden μ_0 tal que μ_0 verifica la ▸ condición *y g_α satisface* ▸ hipótesis. *Si $\alpha(\delta, y^\delta)$ es una regla de elección de parámetro tal que*

$$\sup_{y^\delta\in\mathcal{Y}} \left\{ \left\| x^\delta_{\alpha(\delta,y^\delta)} - x^\dagger \right\| : \left\| Q(y-y^\delta)\right\| \le \delta \right\} = o\left(\delta^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}}\right), \; \delta \to 0^+$$

entonces $x^\dagger \doteq T^\dagger y = 0$. ($Q : \mathcal{Y} \xrightarrow{\perp} \overline{\mathcal{R}(T)}$.)

Saturación (A. Neubauer, 1994)

Teorema

Sean $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $\mathcal{R}(T)$ no cerrado y $\{g_\alpha\}$ un MRE con calificación clásica de orden μ_0 tal que μ_0 verifica la ▸ condición *y g_α satisface* ▸ hipótesis*. Si $\alpha(\delta, y^\delta)$ es una regla de elección de parámetro tal que*

$$\sup_{y^\delta \in \mathcal{Y}} \left\{ \left\| x^\delta_{\alpha(\delta,y^\delta)} - x^\dagger \right\| : \left\| Q(y - y^\delta) \right\| \leq \delta \right\} = o\left(\delta^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}} \right), \ \delta \to 0^+$$

entonces $x^\dagger \doteq T^\dagger y = 0$. ($Q : \mathcal{Y} \xrightarrow{\perp} \overline{\mathcal{R}(T)}$.)

Saturación de $\{R_\alpha\}$.

Saturación (A. Neubauer, 1994)

Teorema

Sean $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{R}(T)$ no cerrado y $\{g_\alpha\}$ un MRE con calificación clásica de orden μ_0 tal que μ_0 verifica la condición *y g_α satisface* hipótesis. *Si $\alpha(\delta, y^\delta)$ es una regla de elección de parámetro tal que*

$$\sup_{y^\delta \in \mathcal{Y}} \left\{ \left\| x^\delta_{\alpha(\delta, y^\delta)} - x^\dagger \right\| : \left\| Q(y - y^\delta) \right\| \leq \delta \right\} = o\left(\delta^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}} \right), \ \delta \to 0^+$$

entonces $x^\dagger \doteq T^\dagger y = 0$. ($Q : \mathcal{Y} \xrightarrow{\perp} \overline{\mathcal{R}(T)}$.)

Saturación de $\{R_\alpha\}$.

$\Downarrow$

Mejor orden de convergencia del error total.

Contexto-Saturación global

Definición

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{R_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ flia. de op. de reg. para $T^\dagger$.
Error total de $\{R_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ en $x \in \mathcal{X}$ para $\delta > 0$:

$$\mathcal{E}^{\text{tot}}_{\{R_\alpha\}}(x,\delta) \doteq \inf_{\alpha\in(0,\alpha_0)} \sup_{y^\delta\in\overline{B_\delta(Tx)}} \left\| R_\alpha y^\delta - x \right\| .$$

Contexto-Saturación global

Definición

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0,\alpha_0)}$ flia. de op. de reg. para $T^\dagger$.
Error total de $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0,\alpha_0)}$ en $x \in \mathcal{X}$ para $\delta > 0$:

$$\mathcal{E}^{\mathrm{tot}}_{\{R_\alpha\}}(x, \delta) \doteq \inf_{\alpha \in (0,\alpha_0)} \sup_{y^\delta \in \overline{B_\delta(Tx)}} \left\| R_\alpha y^\delta - x \right\| .$$

T invertible, $M \subset \mathcal{X}$, $a > 0$, $\psi : M \times (0, a) \to \mathbb{R}^+$.

Contexto-Saturación global

Definición

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0,\alpha_0)}$ flia. de op. de reg. para $T^\dagger$.
Error total de $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0,\alpha_0)}$ en $x \in \mathcal{X}$ para $\delta > 0$:

$$\mathcal{E}^{\text{tot}}_{\{R_\alpha\}}(x, \delta) \doteq \inf_{\alpha \in (0,\alpha_0)} \sup_{y^\delta \in \overline{B_\delta(Tx)}} \left\| R_\alpha y^\delta - x \right\|.$$

T invertible, $M \subset \mathcal{X}$, $a > 0$, $\psi : M \times (0, a) \to \mathbb{R}^+$.
$\psi \in \mathcal{F}_M$ si:

(i) $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \psi(x, \delta) = 0 \ \forall \ x \in M$,

(ii) $\psi(x, \cdot)$ continua y creciente $\forall \ x \in M$.

Contexto-Saturación global

Definición

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $\{R_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ flia. de op. de reg. para $T^\dagger$.
Error total de $\{R_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ en $x \in \mathcal{X}$ para $\delta > 0$:

$$\mathcal{E}^{\text{tot}}_{\{R_\alpha\}}(x,\delta) \doteq \inf_{\alpha\in(0,\alpha_0)} \sup_{y^\delta \in \overline{B_\delta(Tx)}} \left\| R_\alpha y^\delta - x \right\|.$$

T invertible, $M \subset \mathcal{X}$, $a > 0$, $\psi : M \times (0,a) \to \mathbb{R}^+$.
$\psi \in \mathcal{F}_M$ si:

(i) $\lim_{\delta\to 0^+} \psi(x,\delta) = 0 \ \forall\, x \in M$,

(ii) $\psi(x,\cdot)$ continua y creciente $\forall\, x \in M$.

Nota

$$\mathcal{E}^{\text{tot}}_{\{R_\alpha\}} \in \mathcal{F}_M.$$

Definición

Sea $M \subset X$, $\psi : M \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una *"cota superior de convergencia para el error total de $\{R_\alpha\}$ en M"* si

Definición

Sea $M \subset X$, $\psi : M \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una *"cota superior de convergencia para el error total de $\{R_\alpha\}$ en M"* si

$$\forall\, x \in M \quad \mathcal{E}^{\mathrm{tot}}_{\{R_\alpha\}} = O(\psi(x,\delta)) \quad \text{cuando} \quad \delta \to 0^+.$$

Definición

Sea $M \subset X$, $\psi : M \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una *"cota superior de convergencia para el error total de $\{R_\alpha\}$ en M"* si

$$\forall\, x \in M \quad \mathcal{E}^{\text{tot}}_{\{R_\alpha\}} = O(\psi(x,\delta)) \quad \text{cuando} \quad \delta \to 0^+.$$

Definición

$M, \tilde{M} \subset \mathcal{X}$, $\psi \in \mathcal{F}_M$ y $\tilde{\psi} \in \mathcal{F}_{\tilde{M}}$.

Definición

Sea $M \subset X$, $\psi : M \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una *"cota superior de convergencia para el error total de $\{R_\alpha\}$ en M"* si

$$\forall\, x \in M \quad \mathcal{E}^{\mathrm{tot}}_{\{R_\alpha\}} = O(\psi(x,\delta)) \quad \text{cuando} \quad \delta \to 0^+.$$

Definición

$M, \tilde{M} \subset \mathcal{X}$, $\psi \in \mathcal{F}_M$ y $\tilde{\psi} \in \mathcal{F}_{\tilde{M}}$.

- $\psi \overset{M,\tilde{M}}{\preceq} \tilde{\psi}$ si existen $d > 0$ y $k : M \times \tilde{M} \to (0,\infty)$ tales que

$$\psi(x,\delta) \leq k(x,\tilde{x})\,\tilde{\psi}(\tilde{x},\delta) \quad \forall\, x \in M,\ \forall\, \tilde{x} \in \tilde{M},\ \forall\, \delta \in (0,d).$$

Definición

Sea $M \subset X$, $\psi : M \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una *"cota superior de convergencia para el error total de $\{R_\alpha\}$ en M"* si

$$\forall\, x \in M \quad \mathcal{E}^{\text{tot}}_{\{R_\alpha\}} = O(\psi(x,\delta)) \quad \text{cuando} \quad \delta \to 0^+.$$

Definición

$M, \tilde{M} \subset \mathcal{X}$, $\psi \in \mathcal{F}_M$ y $\tilde{\psi} \in \mathcal{F}_{\tilde{M}}$.

- $\psi \overset{M,\tilde{M}}{\preceq} \tilde{\psi}$ si existen $d > 0$ y $k : M \times \tilde{M} \to (0, \infty)$ tales que

$$\psi(x,\delta) \leq k(x,\tilde{x})\,\tilde{\psi}(\tilde{x},\delta) \quad \forall\, x \in M,\ \forall\, \tilde{x} \in \tilde{M},\ \forall\, \delta \in (0,d).$$

- $\psi \overset{M,\tilde{M}}{\approx} \tilde{\psi}$ si $\psi \overset{M,\tilde{M}}{\preceq} \tilde{\psi}$ y $\tilde{\psi} \overset{\tilde{M},M}{\preceq} \psi$.

Definición

Sea $M \subset X$, $\psi : M \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una *"cota superior de convergencia para el error total de $\{R_\alpha\}$ en M"* si

$$\forall\, x \in M \quad \mathcal{E}^{\text{tot}}_{\{R_\alpha\}} = O(\psi(x,\delta)) \quad \text{cuando} \quad \delta \to 0^+.$$

Definición

$M, \tilde{M} \subset \mathcal{X}$, $\psi \in \mathcal{F}_M$ y $\tilde{\psi} \in \mathcal{F}_{\tilde{M}}$.

- $\psi \overset{M,\tilde{M}}{\preceq} \tilde{\psi}$ si existen $d > 0$ y $k : M \times \tilde{M} \to (0,\infty)$ tales que

$$\psi(x,\delta) \le k(x,\tilde{x})\,\tilde{\psi}(\tilde{x},\delta) \quad \forall\, x \in M,\ \forall\, \tilde{x} \in \tilde{M},\ \forall\, \delta \in (0,d).$$

- $\psi \overset{M,\tilde{M}}{\approx} \tilde{\psi}$ si $\psi \overset{M,\tilde{M}}{\preceq} \tilde{\psi}$ y $\tilde{\psi} \overset{\tilde{M},M}{\preceq} \psi$.

Definición

$M \subset \mathcal{X}$, $\psi \in \mathcal{F}_M$, ψ es invariante sobre M si $\psi \overset{M,M}{\approx} \psi$.

Saturación global

Definición

$M_S \subset \mathcal{X}$, $\psi_S \in \mathcal{U}_{M_S}(\mathcal{E}^{\mathrm{tot}}_{\{R_\alpha\}})$,

ψ_S es *"función de saturación global de $\{R_\alpha\}$ sobre M_S"* si:

Saturación global

Definición

$M_S \subset \mathcal{X}$, $\psi_S \in \mathcal{U}_{M_S}(\mathcal{E}^{\mathrm{tot}}_{\{R_\alpha\}})$,

ψ_S es *"función de saturación global de $\{R_\alpha\}$ sobre M_S"* si:

(S1) Para todos $x^* \in \mathcal{X}$, $x^* \neq 0$, $x \in M_S$, $\limsup_{\delta \to 0^+} \frac{\mathcal{E}^{\mathrm{tot}}_{\{R_\alpha\}}(x^*, \delta)}{\psi_S(x, \delta)} > 0$.

Saturación global

Definición

$M_S \subset \mathcal{X}$, $\psi_S \in \mathcal{U}_{M_S}(\mathcal{E}^{\mathrm{tot}}_{\{R_\alpha\}})$,

ψ_S es *"función de saturación global de $\{R_\alpha\}$ sobre M_S"* si:

$(S1)$ Para todos $x^* \in \mathcal{X}$, $x^* \neq 0$, $x \in M_S$, $\limsup_{\delta \to 0^+} \frac{\mathcal{E}^{\mathrm{tot}}_{\{R_\alpha\}}(x^*, \delta)}{\psi_S(x, \delta)} > 0$.

$(S2)$ ψ_S es invariante sobre M_S.

Saturación global

Definición

$M_S \subset \mathcal{X}$, $\psi_S \in \mathcal{U}_{M_S}(\mathcal{E}^{\mathrm{tot}}_{\{R_\alpha\}})$,

ψ_S es *"función de saturación global de $\{R_\alpha\}$ sobre M_S"* si:

$(S1)$ Para todos $x^* \in \mathcal{X}$, $x^* \neq 0$, $x \in M_S$, $\limsup\limits_{\delta \to 0^+} \frac{\mathcal{E}^{\mathrm{tot}}_{\{R_\alpha\}}(x^*,\delta)}{\psi_S(x,\delta)} > 0$.

$(S2)$ ψ_S es invariante sobre M_S.

$(S3)$ No existen $\tilde{M} \supsetneqq M_S$ y $\tilde{\psi} \in \mathcal{U}_{\tilde{M}}(\mathcal{E}^{\mathrm{tot}}_{\{R_\alpha\}})$ tales que $\tilde{\psi}$ satisfaga $(S1)$ y $(S2)$ con $M_S = \tilde{M}$ y $\psi_S = \tilde{\psi}$.

Saturación de MRE con calificación clásica.

Saturación de MRE con calificación clásica.

Teorema

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{R}(T)$ no cerrado, $\{g_\alpha\}$ MRE que satisface ▸ hip.*,*
$\|g_\alpha(\cdot)\|_\infty = O(1/\sqrt{\alpha})$, $\alpha \to 0^+$.

Saturación de MRE con calificación clásica.

Teorema

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{R}(T)$ no cerrado, $\{g_\alpha\}$ MRE que satisface hip., $\|g_\alpha(\cdot)\|_\infty = O(1/\sqrt{\alpha})$, $\alpha \to 0^+$.

Si $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0,\alpha_0)}$, $\alpha_0 \doteq \text{mín}\{\lambda_1, \frac{\lambda_1}{c}\}$, posee calificación clásica de orden μ_0 y μ_0 satisface la condición*, entonces*

Saturación de MRE con calificación clásica.

Teorema

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $\mathcal{R}(T)$ no cerrado, $\{g_\alpha\}$ MRE que satisface hip., $\|g_\alpha(\cdot)\|_\infty = O(1/\sqrt{\alpha})$, $\alpha \to 0^+$.

Si $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$, $\alpha_0 \doteq \text{mín}\{\lambda_1, \frac{\lambda_1}{c}\}$, posee calificación clásica de orden μ_0 y μ_0 satisface la condición, *entonces*

$$\psi_{\mu_0}(x,\delta) \doteq \delta^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}} \text{ para } x \in \mathcal{X}_{\mu_0} \doteq \mathcal{R}((T^*T)^{\mu_0}) \setminus \{0\} \text{ y } \delta > 0,$$

es saturación de $\{R_\alpha\}$ sobre $\mathcal{X}_{\mu_0}$. Teor.

Saturación de MRE con calificación máxima.

Saturación de MRE con calificación máxima.

Teorema

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ lineal y compacto, $\{g_\alpha\}$ MRE que satisface hip.,
$\|g_\alpha(\cdot)\|_\infty = O(1/\sqrt{\alpha})$, $\alpha \to 0^+$.

Saturación de MRE con calificación máxima.

Teorema

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ lineal y compacto, $\{g_\alpha\}$ MRE que satisface hip.*,*
$\|g_\alpha(\cdot)\|_\infty = O(1/\sqrt{\alpha})$, $\alpha \to 0^+$.

Si $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ posee calificación máxima ρ estrictamente creciente, de tipo superior local β para algún $\beta \geq 0$ tal que condición

Saturación de MRE con calificación máxima.

Teorema

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ lineal y compacto, $\{g_\alpha\}$ MRE que satisface hip.*,*
$\|g_\alpha(\cdot)\|_\infty = O(1/\sqrt{\alpha})$, $\alpha \to 0^+$.

Si $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ posee calificación máxima ρ estrictamente creciente, de tipo superior local β para algún $\beta \geq 0$ tal que condición *y $\Theta(t) \doteq \sqrt{t}\rho(t)$ entonces*

Saturación de MRE con calificación máxima.

Teorema

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ lineal y compacto, $\{g_\alpha\}$ MRE que satisface hip.*,*
$\|g_\alpha(\cdot)\|_\infty = O(1/\sqrt{\alpha})$, $\alpha \to 0^+$.

Si $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ posee calificación máxima ρ estrictamente creciente, de tipo superior local β para algún $\beta \geq 0$ tal que condición *y $\Theta(t) \doteq \sqrt{t}\rho(t)$ entonces*

$\psi(x,\delta) \doteq (\rho \circ \Theta^{-1})(\delta)$ para $x \in X^\rho \doteq \mathcal{R}(\rho(T^*T)) \setminus \{0\}$ y $\delta \in (0, \Theta(\alpha_0))$, es función de saturación de $\{R_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ sobre X^ρ.

Saturación de MRE con calificación óptima.

Saturación de MRE con calificación óptima.

Dados $\{g_\alpha\}$ y $\rho \in \mathcal{O}$, definimos

$$s_\rho(\lambda) \doteq \liminf_{\alpha\to 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{|r_\alpha(\lambda)|} \quad \text{para} \quad \lambda \geq 0.$$

Saturación de MRE con calificación óptima.

Dados $\{g_\alpha\}$ y $\rho \in \mathcal{O}$, definimos

$$s_\rho(\lambda) \doteq \liminf_{\alpha \to 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{|r_\alpha(\lambda)|} \quad \text{para} \quad \lambda \geq 0.$$

Teorema

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ lineal y compacto, $\{g_\alpha\}$ MRE que satisface hip., $\|g_\alpha(\cdot)\|_\infty = O(1/\sqrt{\alpha})$, $\alpha \to 0^+$.

Saturación de MRE con calificación óptima.

Dados $\{g_\alpha\}$ y $\rho \in \mathcal{O}$, definimos

$$s_\rho(\lambda) \doteq \liminf_{\alpha \to 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{|r_\alpha(\lambda)|} \quad \text{para} \quad \lambda \geq 0.$$

Teorema

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ lineal y compacto, $\{g_\alpha\}$ MRE que satisface hip., *$\|g_\alpha(\cdot)\|_\infty = O(1/\sqrt{\alpha})$, $\alpha \to 0^+$.*

Si $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0,\alpha_0)}$ posee calificación óptima ρ de tipo superior local β para algún $\beta \geq 0$ y $\Theta(t) \doteq \sqrt{t}\rho(t)$ entonces

Saturación de MRE con calificación óptima.

Dados $\{g_\alpha\}$ y $\rho \in \mathcal{O}$, definimos

$$\color{red}{s_\rho(\lambda)} \doteq \liminf_{\alpha\to 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{|r_\alpha(\lambda)|} \quad \text{para} \quad \lambda \geq 0.$$

Teorema

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Hilbert, $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ lineal y compacto, $\{g_\alpha\}$ MRE que satisface hip., $\|g_\alpha(\cdot)\|_\infty = O(1/\sqrt{\alpha})$, $\alpha \to 0^+$.

Si $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ posee calificación óptima ρ de tipo superior local β para algún $\beta \geq 0$ y $\Theta(t) \doteq \sqrt{t}\rho(t)$ entonces

$\psi(x,\delta) \doteq (\rho\circ\Theta^{-1})(\delta)$ para $x \in X^{s_\rho} \doteq \mathcal{R}(s_\rho(T^*T)) \setminus \{0\}$ y $\delta \in (0, \Theta(\alpha_0))$, es función de saturación de $\{R_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ sobre X^{s_ρ}.

Lema

Sean $\{g_\alpha\}$ *MRE tal que* $\|g_\alpha(\cdot)\|_\infty = O(1/\sqrt{\alpha})$, $\alpha \to 0^+$, (s, ρ) *par débil fuente-orden para* $\{g_\alpha\}$, ρ *continua.*

Lema

Sean $\{g_\alpha\}$ *MRE tal que* $\|g_\alpha(\cdot)\|_\infty = O(1/\sqrt{\alpha})$, $\alpha \to 0^+$, (s,ρ) *par débil fuente-orden para* $\{g_\alpha\}$, ρ *continua. Entonces* $\psi(x,\delta) \doteq (\rho \circ \Theta^{-1})(\delta)$ *para* $x \in X^s \doteq \mathcal{R}(s(T^*T)) \setminus \{0\}$ *y* $\delta \in (0, \Theta(\alpha_0))$ *es cota superior de convergencia para el error total de* $\{R_\alpha\}$ *en* X^s.

Lema

Sean $\{g_\alpha\}$ *MRE tal que* $\|g_\alpha(\cdot)\|_\infty = O(1/\sqrt{\alpha})$, $\alpha \to 0^+$, (s,ρ) *par débil fuente-orden para* $\{g_\alpha\}$, ρ *continua. Entonces* $\psi(x,\delta) \doteq (\rho \circ \Theta^{-1})(\delta)$ *para* $x \in X^s \doteq \mathcal{R}(s(T^*T)) \setminus \{0\}$ *y* $\delta \in (0, \Theta(\alpha_0))$ *es cota superior de convergencia para el error total de* $\{R_\alpha\}$ *en* X^s.

Lema

(Resultado recíproco.) Sean $\{g_\alpha\}$ *MRE que satisface* ▸ hip. excepto b), (ρ, s) *par orden-fuente para* $\{g_\alpha\}$, ρ *de tipo superior* β *para algún* $\beta \geq 0$. *Si para algún* $x \in X$ *se tiene que*

$$\sup_{y^\delta \in \overline{B_\delta(Tx)}} \inf_{\alpha \in (0,\alpha_0)} \left\| R_\alpha y^\delta - x \right\| = O(\rho(\Theta^{-1}(\delta))) \quad \textit{cuando} \quad \delta \to 0^+,$$

entonces $x \in \mathcal{R}(s(T^*T))$.

Ejemplo

Metodo de regularización de Tikhonov-Phillips $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$,

$$g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda+\alpha},$$

Ejemplo

Metodo de regularización de Tikhonov-Phillips $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$,

$$g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda+\alpha},$$

$\rho(\alpha) = \alpha$ es calificación óptima,

Ejemplo

Metodo de regularización de Tikhonov-Phillips $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$,

$$g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda+\alpha},$$

$\rho(\alpha) = \alpha$ es calificación óptima, $h(\alpha) = \alpha$, $s_\rho(\lambda) = \lambda$.

Ejemplo

Metodo de regularización de Tikhonov-Phillips $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$,

$$g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda+\alpha},$$

$\rho(\alpha) = \alpha$ es calificación óptima, $h(\alpha) = \alpha$, $s_\rho(\lambda) = \lambda$.
Se verifican todas las hip. del teorema de saturación. Entonces

$$\psi(x,\delta) = \rho(\Theta^{-1}(\delta)) = \delta^{\frac{2}{3}}$$

para $x \in X^{s_\rho} = \mathcal{R}(T^*T) \setminus \{0\}$, $\delta \in \left(0, \alpha_0^{\frac{3}{2}}\right)$ es saturación de $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ sobre X^{s_ρ}.

Ejemplo

(Casi...) $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$, $\alpha_0 < e^{-1}$, donde

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \frac{1+(\log\alpha)^{-1}}{\lambda-(\log\alpha)^{-1}}$$

es un MRE con calificación óptima $\rho(\alpha) = -(\log\alpha)^{-1}$, Ejemplo

(Casi...) $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$, $\alpha_0 < e^{-1}$, donde

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \frac{1+(\log\alpha)^{-1}}{\lambda-(\log\alpha)^{-1}}$$

es un MRE con calificación óptima $\rho(\alpha) = -(\log\alpha)^{-1}$, $h(\alpha) = -(\log\alpha)^{-1}$, $s_\rho(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda}$.

Ejemplo

(Casi...) $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$, $\alpha_0 < e^{-1}$, donde

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \frac{1 + (\log\alpha)^{-1}}{\lambda - (\log\alpha)^{-1}}$$

es un MRE con calificación óptima $\rho(\alpha) = -(\log\alpha)^{-1}$, $h(\alpha) = -(\log\alpha)^{-1}$, $s_\rho(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda}$.

Se verifican todas las hip. del teorema de saturación excepto la hip. d).

Ejemplo

(Casi...) $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$, $\alpha_0 < e^{-1}$, donde

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \frac{1+(\log\alpha)^{-1}}{\lambda-(\log\alpha)^{-1}}$$

es un MRE con calificación óptima $\rho(\alpha) = -(\log\alpha)^{-1}$, $h(\alpha) = -(\log\alpha)^{-1}$, $s_\rho(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda}$.

Se verifican todas las hip. del teorema de saturación excepto la hip. d).

Entonces,

$$\psi(x,\delta) = \rho(\Theta^{-1}(\delta))$$

es saturación de $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ sobre $\mathcal{R}(s_\rho(T^*T))\setminus\{0\}$????

Referencias:

- Herdman, T.; Spies, R. D. and Temperini, K. G.; Generalized Qualification and Qualification Levels for Spectral Regularization Methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 141:547–567, 2009.
- Herdman, T.; Spies, R. D. and Temperini, K. G.; Global Saturation of Regularization Methods for Inverse Ill-Posed Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, agosto 2010 (versión electrónica).
- Mathé, P.; Saturation of Regularization Methods for linear ill-posed problems in Hilbert spaces. *SIAM Journal Numerical Analysis*, 42(3):968–973, 2004.
- Mazzieri, G. L.; Spies, R. D. and Temperini, K. G.; Global Saturation of Spectral Regularization Methods with Optimal Qualification (en preparación).
- Neubauer, A.; On converse and saturation results for regularization methods. In BeitrÄage zur angewandten Analysis und Informatik, 262–270. Shaker, Aachen, 1994.

$$\mathcal{O} = \{\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \text{ no decrecientes tales que } \lim_{\alpha \to 0^+} \rho(\alpha) = 0\}$$

$$\mathcal{S} = \{s : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \text{ continuas con } s(0) = 0, s(\lambda) > 0 \,\forall\, \lambda > 0\}$$

Existen $q, \epsilon > 0$ (independientes de α) tales que

$$\lambda^{\mu_0} \, |r_\alpha(\lambda)| \geq \epsilon \, \alpha^{\mu_0}, \quad \forall \, 0 < q \, \alpha \leq \lambda \leq \| T \|^2 ,$$

donde $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$.

$\lambda = 0$ es punto de acumulación de $\sigma_p(T^*T)$.

Existen ctes. positivas $\lambda_1 \leq \|T\|^2$, γ_1, γ_2 y $c_1 > 1$ tales que

(a) $0 \leq r_\alpha(\lambda) \leq 1$, $\forall\, \alpha > 0$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$;

(b) $r_\alpha(\lambda) \geq \gamma_1$, $\forall\, 0 \leq \lambda < \alpha \leq \lambda_1$;

(c) $|r_\alpha(\lambda)|$ es creciente con respecto a α para $\lambda \in (0, \|T\|^2]$;

(d) $g_\alpha(c_1\alpha) \geq \frac{\gamma_2}{\alpha}$, $\forall\, 0 < c_1\alpha \leq \lambda_1$;

(e) $g_\alpha(\lambda) \geq g_\alpha(\tilde{\lambda})$, para $0 < \alpha \leq \lambda \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda_1$.

Existen $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\sigma_p(T^*T)$ y $c \geq 1$ tales que $\tilde{\lambda}_n \downarrow 0$ y $\frac{\tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_{n+1}} \leq c$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $\alpha \in (0, \alpha_0)$ la función $\lambda \to |r_\alpha(\lambda)|^2$, $\lambda \in (0, \|T\|^2]$ es convexa.

Existen ctes. positivas $\lambda_1 \leq \|T\|^2$, γ_1, γ_2 y $c_1 > 1$ tales que

(a) $0 \leq r_\alpha(\lambda) \leq 1$, $\forall\, \alpha > 0$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$;

(b) $r_\alpha(\lambda) \geq \gamma_1$, $\forall\, 0 \leq \lambda < \alpha \leq \lambda_1$;

(c) $|r_\alpha(\lambda)|$ es creciente con respecto a α para $\lambda \in (0, \|T\|^2]$;

(d) $g_\alpha(c_1\alpha) \geq \frac{\gamma_2}{\alpha}$, $\forall\, 0 < c_1\alpha \leq \lambda_1$;

(e) $g_\alpha(\lambda) \geq g_\alpha(\tilde{\lambda})$, para $0 < \alpha \leq \lambda \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda_1$.

Existen $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\sigma_p(T^*T)$ y $c \geq 1$ tales que $\tilde{\lambda}_n \downarrow 0$ y $\frac{\tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_{n+1}} \leq c$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Existen ctes. positivas $\lambda_1 \leq \|T\|^2$, γ_1, γ_2 y $c_1 > 1$ tales que

(a) $0 \leq r_\alpha(\lambda) \leq 1$, $\forall\, \alpha > 0$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$;

(b) $r_\alpha(\lambda) \geq \gamma_1$, $\forall\, 0 \leq \lambda < h(\alpha) \leq \lambda_1$;

(c) $|r_\alpha(\lambda)|$ es estrictamente creciente con respecto a α para $\lambda \in (0, \|T\|^2]$;

(d) $g_\alpha(c_1\alpha) \geq \frac{\gamma_2}{\alpha}$, $\forall\, 0 < c_1\alpha \leq \lambda_1$;

(e) $g_\alpha(\lambda) \geq g_\alpha(\tilde{\lambda})$, para $0 < \alpha \leq \lambda \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda_1$.

Existen $a, k > 0$ tales que

$$\rho(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)| \geq a\,\rho(\alpha), \quad \forall\, 0 < k\,\alpha \leq \lambda \leq \|T\|^2,$$

donde $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$.