Métodos perturbativos en problemas elípticos sobredeterminados

Bruno Canuto   Diego Rial

22 de Octubre de 2010
Seminario del IMAL "Carlos Segovia Fernández"
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral - UNL - CONICET

Problema

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado y $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda^2 u + 1 &= 0 \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

Problema

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado y $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda^2 u + 1 = 0 \quad & \Omega \\ u = 0 \quad & \partial\Omega \end{aligned}$$

- (D) Si $\Omega = B(a, r)$ es una bola de centro a y radio r, entonces existe u radial (para casi todo λ) $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \text{cte}.$

Problema

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado y $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda^2 u + 1 = 0 \quad & \Omega \\ u = 0 \quad & \partial\Omega \end{aligned}$$

- (D) Si $\Omega = B(a, r)$ es una bola de centro a y radio r, entonces existe u radial (para casi todo λ) $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \text{cte.}$
- (I) Si $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ es constante, ¿implica $\Omega = B(a, r)$?

Problema (I) caso $\lambda = 0$

- Serrin (1971), planos móviles

Problema (I) caso $\lambda = 0$

- Serrin (1971), planos móviles
- Weinberger (1971), P-funciones

Problema (D) semilineal ($\Delta u + f(u) = 0$)

- Gidas, Ni, Nirenberg (1979), si $u > 0 \Rightarrow u$ es radial

Problema (D) semilineal ($\Delta u + f(u) = 0$)

- Gidas, Ni, Nirenberg (1979), si $u > 0 \Rightarrow u$ es radial
- Min (1992), $\{x \in B : u(x) = 0\}$ radial $\Leftrightarrow u$ radial

Problema (D) semilineal ($\Delta u + f(u) = 0$)

- Gidas, Ni, Nirenberg (1979), si $u > 0 \Rightarrow u$ es radial
- Min (1992), $\{x \in B : u(x) = 0\}$ radial $\Leftrightarrow u$ radial
- Rosset (1994), si $u > 0$ y $\Omega \cong B \Rightarrow u$ es casi radial

Problema (D) semilineal ($\Delta u + f(u) = 0$)

- Gidas, Ni, Nirenberg (1979), si $u > 0 \Rightarrow u$ es radial
- Min (1992), $\{x \in B : u(x) = 0\}$ radial $\Leftrightarrow u$ radial
- Rosset (1994), si $u > 0$ y $\Omega \cong B \Rightarrow u$ es casi radial
- Castro, Maya, Shivaji (2000)

Problema (I) semilineal

- Aftalion, Busca (1998), dominios exteriores

Problema (I) semilineal

- Aftalion, Busca (1998), dominios exteriores
- Aftalion, Busca, Reichel (1999), si $u > 0$ y $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cong$ cte. $\neq 0$,

  existen $0 < R_1 < R_2$ tal que $B(a, R_1) \subset \Omega \subset B(a, R_2)$

$$R_2 - R_1 \leq C \left(-\log \left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \text{cte} \right\| \right)^{-1/n}$$

Problema (I) semilineal

- Aftalion, Busca (1998), dominios exteriores

- Aftalion, Busca, Reichel (1999), si $u > 0$ y $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cong$ cte. $\neq 0$,

  existen $0 < R_1 < R_2$ tal que $B(a, R_1) \subset \Omega \subset B(a, R_2)$

$$R_2 - R_1 \leq C \left(- \log \left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \text{cte} \right\| \right)^{-1/n}$$

- Henrot, Philippin (2004), idem anterior para $\Omega - B(a, r)$

Problema (I) semilineal

- Aftalion, Busca (1998), dominios exteriores
- Aftalion, Busca, Reichel (1999), si $u > 0$ y $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cong$ cte. $\neq 0$,

  existen $0 < R_1 < R_2$ tal que $B(a, R_1) \subset \Omega \subset B(a, R_2)$

$$R_2 - R_1 \leq C \left(-\log \left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \mathrm{cte} \right\| \right)^{-1/n}$$

- Henrot, Philippin (2004), idem anterior para $\Omega - B(a, r)$
- Fragalá, Gazzola, Kawohl (2004), $\operatorname{div}(A(|\nabla u|)\nabla u) + 1 = 0$

Oscilaciones Forzadas

Estudiamos las oscilaciones de una membrana uniforme, plana en reposo, que cubre la región del plano Ω:

- $\psi(x,t)$: desplazamiento vertical

Oscilaciones Forzadas

Estudiamos las oscilaciones de una membrana uniforme, plana en reposo, que cubre la región del plano Ω:

- $\psi(x,t)$: desplazamiento vertical
- μ: módulo de elasticidad

Oscilaciones Forzadas

Estudiamos las oscilaciones de una membrana uniforme, plana en reposo, que cubre la región del plano Ω:

- $\psi(x, t)$: desplazamiento vertical
- μ: módulo de elasticidad
- ρ: densidad superficial de masa

Oscilaciones Forzadas

Estudiamos las oscilaciones de una membrana uniforme, plana en reposo, que cubre la región del plano Ω:

- $\psi(x, t)$: desplazamiento vertical
- μ: módulo de elasticidad
- ρ: densidad superficial de masa
- p: presión sobre la membrana

- Borde fijo $\Rightarrow \psi = 0$ sobre $\partial\Omega$

- Borde fijo $\Rightarrow \psi = 0$ sobre $\partial\Omega$

- Si la presión varía en forma armónica $p = p_o e^{i\omega t}$, podemos buscar soluciones de la forma

$$\psi = \frac{p_o}{\mu} u \, e^{i\omega t}$$

con u solución del problema y $\lambda = \omega\sqrt{\rho/\mu}$

- Borde fijo $\Rightarrow \psi = 0$ sobre $\partial\Omega$

- Si la presión varía en forma armónica $p = p_o e^{i\omega t}$, podemos buscar soluciones de la forma

$$\psi = \frac{p_o}{\mu} u \, e^{i\omega t}$$

con u solución del problema y $\lambda = \omega\sqrt{\rho/\mu}$

- La derivada normal $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ representa la densidad lineal de fuerza en el soporte

(I) es equivalente a

la densidad lineal de fuerza es la misma en cada punto del soporte si y sólo si la membrana es **circular**

Teorema

Para casi todo λ, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $\operatorname{dist}(B, \Omega) < \varepsilon$

(en la topología $C^{2,\alpha}$ si $n = 2$) y la solución u verifica

(I): $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ es constante $\Rightarrow \Omega = B\,(a, r)$

Observación: El conjunto de valores λ para los cuales vale (I), tiene complemento numerable

Observaciones

- Si el parámetro λ^2 fuese negativo, $u > 0$ (Serrin)

Observaciones

- Si el parámetro λ^2 fuese negativo, $u > 0$ (Serrin)
- u cambia de signo si λ es grande

Observaciones

- Si el parámetro λ^2 fuese negativo, $u > 0$ (Serrin)
- u cambia de signo si λ es grande
- Si λ^2 es autovalor de $-\Delta \Rightarrow 0$ ó ∞ soluciones

Observaciones

- Si el parámetro λ^2 fuese negativo, $u > 0$ (Serrin)
- u cambia de signo si λ es grande
- Si λ^2 es autovalor de $-\Delta \Rightarrow 0$ ó ∞ soluciones
- Si $\Omega = B$ y λ^2 no es autovalor de $-\Delta$,

$$u_o(x) = \lambda^{-2}\left(H_o(\lambda)^{-1} H_o(\lambda|x|) - 1\right)$$

con $H_o(r) = r^{-\nu} J_\nu(r)$ y $\nu = n/2 - 1$

Idea General

- Para $\kappa \in C^{2,\alpha}(B)$, $\|\kappa\|_{2,\alpha} < \varepsilon$, consideramos el

  cambio de variables $\pi(\kappa) : B(0,1) \to \Omega_\kappa$

$$\pi(\kappa)(x) = (1 + \kappa(x))x$$

Idea General

- Para $\kappa \in C^{2,\alpha}(B)$, $\|\kappa\|_{2,\alpha} < \varepsilon$, consideramos el

  cambio de variables $\pi(\kappa) : B(0,1) \to \Omega_\kappa$

$$\pi(\kappa)(x) = (1 + \kappa(x))x$$

- Si u es la solución en Ω_κ, definimos

$$\phi(\kappa) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \circ \pi(\kappa) \in \mathcal{C} = C^{1,\alpha}(\partial B)$$

Idea General

- Para $\kappa \in C^{2,\alpha}(B)$, $\|\kappa\|_{2,\alpha} < \varepsilon$, consideramos el

  cambio de variables $\pi(\kappa) : B(0,1) \to \Omega_\kappa$

$$\pi(\kappa)(x) = (1 + \kappa(x))x$$

- Si u es la solución en Ω_κ, definimos

$$\phi(\kappa) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \circ \pi(\kappa) \in \mathcal{C} = C^{1,\alpha}(\partial B)$$

- (I): $\phi(\kappa) = \text{constante} \Rightarrow \Omega_\kappa = B(a, r)$

Idea General (cont.)

Si $\tilde{\phi}$ es la aplicación

$$\tilde{\phi}(\kappa) = \phi(\kappa) - \frac{1}{s_{n-1}} \int_{\partial B} \phi(\kappa) ds$$

(I): $\tilde{\phi}(\kappa) = 0 \Rightarrow \Omega_\kappa = B(a, r)$

Traslaciones y Dilataciones

Dados $r > 0$ y $a \in \mathbb{R}^n$ con $|a| < r$, si para $x \in \partial B$

$$\kappa_{r,a}(x) = -1 + a.x + \sqrt{r^2 - |a|^2 + (a.x)^2}$$

entonces $\Omega_\kappa = B(a,r) \Rightarrow \tilde{\phi}(\kappa_{r,a}) = 0$

(I): $\tilde{\phi}(\kappa) = 0 \Rightarrow \kappa = \kappa_{r,a}$

Traslaciones y Dilataciones (cont.)

- Para estudiar $\tilde{\phi}(\kappa)$ aproximamos $(\tilde{\phi}(0) = 0)$

$$\tilde{\phi}(\kappa) \cong d\tilde{\phi}(0)\kappa$$

tenemos que calcular $d\tilde{\phi}(0)$

Traslaciones y Dilataciones (cont.)

- Para estudiar $\tilde{\phi}(\kappa)$ aproximamos ($\tilde{\phi}(0) = 0$)

$$\tilde{\phi}(\kappa) \cong d\tilde{\phi}(0)\kappa$$

tenemos que calcular $d\tilde{\phi}(0)$

- Dilataciones: $0 = \left.\frac{\partial \tilde{\phi}(\kappa_{r,a})}{\partial r}\right|_{r=1,a=0} = d\tilde{\phi}(0)1$

Traslaciones y Dilataciones (cont.)

- Para estudiar $\tilde{\phi}(\kappa)$ aproximamos ($\tilde{\phi}(0) = 0$)

$$\tilde{\phi}(\kappa) \cong d\tilde{\phi}(0)\kappa$$

  tenemos que calcular $d\tilde{\phi}(0)$

- Dilataciones: $0 = \left.\frac{\partial \tilde{\phi}(\kappa_{r,a})}{\partial r}\right|_{r=1,a=0} = d\tilde{\phi}(0)1$

- Traslaciones: $0 = \left.\frac{\partial \tilde{\phi}(\kappa_{r,a})}{\partial a_i}\right|_{r=1,a=0} = d\tilde{\phi}(0)x_i$

Laplace–Beltrami

Asumimos que λ^2 no es autovalor de $-\Delta$

- LEMA: Si definimos $u(\kappa) = u \circ \pi(\kappa)$, entonces $u = 0$ en ∂B y

$$L(\kappa)\, u(\kappa) + \lambda^2 u(\kappa) + 1 = 0$$

Laplace–Beltrami

Asumimos que λ^2 no es autovalor de $-\Delta$

- LEMA: Si definimos $u(\kappa) = u \circ \pi(\kappa)$, entonces $u = 0$ en ∂B y

$$L(\kappa)\, u(\kappa) + \lambda^2 u(\kappa) + 1 = 0$$

- $L(\kappa) = g(\kappa)^{-1/2} \operatorname{div}\left(g(\kappa)^{1/2}\, G(\kappa)^{-1}\, \nabla\, .\right)$

Laplace–Beltrami

Asumimos que λ^2 no es autovalor de $-\Delta$

- LEMA: Si definimos $u(\kappa) = u \circ \pi(\kappa)$, entonces $u = 0$ en ∂B y

$$L(\kappa)\, u(\kappa) + \lambda^2 u(\kappa) + 1 = 0$$

- $L(\kappa) = g(\kappa)^{-1/2} \operatorname{div}\left(g(\kappa)^{1/2}\, G(\kappa)^{-1}\, \nabla\, .\right)$
- $G(\kappa)_{i,j} = \nabla\pi_i(\kappa)\,.\nabla\pi_j(\kappa)$

Laplace–Beltrami

Asumimos que λ^2 no es autovalor de $-\Delta$

- LEMA: Si definimos $u(\kappa) = u \circ \pi(\kappa)$, entonces $u = 0$ en ∂B y

$$L(\kappa)\, u(\kappa) + \lambda^2 u(\kappa) + 1 = 0$$

- $L(\kappa) = g(\kappa)^{-1/2} \operatorname{div}\left(g(\kappa)^{1/2}\, G(\kappa)^{-1} \nabla\, .\right)$
- $G(\kappa)_{i,j} = \nabla \pi_i(\kappa)\, .\nabla \pi_j(\kappa)$
- $g(\kappa) = \det(G(\kappa))$

Derivada de ϕ

Definimos $\mathcal{K} = \{\kappa \in C^{2,\alpha}(B) : \Delta\kappa + \lambda^2\kappa = 0\}$

LEMA: ϕ es C^1 en un entorno $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$ y vale

$$d\phi(0)\kappa = \gamma\frac{\partial\kappa}{\partial\mathbf{n}} + ((n-1)\gamma - 1)\kappa$$

con $\gamma = -\dfrac{\partial u_o}{\partial\mathbf{n}}$

Derivada de ϕ (cont.)

- Podemos desarrollar

$$\kappa(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l} \hat{\kappa}_{l,m} \frac{H_l(\lambda |x|)}{H_l(\lambda)} Y_{l,m}\left(|x|^{-1} x\right)$$

Derivada de ϕ (cont.)

- Podemos desarrollar

$$\kappa(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l} \hat{\kappa}_{l,m} \frac{H_l(\lambda |x|)}{H_l(\lambda)} Y_{l,m}\left(|x|^{-1} x\right)$$

- $H_l(r) = r^{-\nu} J_{\nu+l}(r)$ $\quad J_{\nu+l}$ función de Bessel de orden $\nu + l$

Derivada de ϕ (cont.)

- Podemos desarrollar

$$\kappa(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l} \hat{\kappa}_{l,m} \frac{H_l(\lambda |x|)}{H_l(\lambda)} Y_{l,m}\left(|x|^{-1} x\right)$$

- $H_l(r) = r^{-\nu} J_{\nu+l}(r) \quad J_{\nu+l}$ función de Bessel de orden $\nu + l$

- $\{Y_{l,m}\}_{l\geq 0,\, 1\leq m\leq d_l}$ armónicos esféricos, con

$$d_l = \frac{(2l+n-2)(l+n-3)!}{l!\,(n-2)!}$$

Derivada de ϕ (cont.)

- Usando el desarrollo de κ

$$d\tilde{\phi}(0)\,\kappa = \frac{J_{\nu+1}(\lambda)}{J_{\nu}(\lambda)} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l} a_{\nu}(l,\lambda)\,\hat{\kappa}_{l,m} Y_{l,m}$$

$$a_{\nu}(l,\lambda) = \frac{l-1}{\lambda} + \frac{J_{\nu+2}(\lambda)}{J_{\nu+1}(\lambda)} - \frac{J_{\nu+l+1}(\lambda)}{J_{\nu+l}(\lambda)}$$

Derivada de ϕ (cont.)

- Usando el desarrollo de κ

$$d\tilde{\phi}(0)\,\kappa = \frac{J_{\nu+1}(\lambda)}{J_{\nu}(\lambda)} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l} a_{\nu}(l,\lambda)\, \hat{\kappa}_{l,m} Y_{l,m}$$

$$a_{\nu}(l,\lambda) = \frac{l-1}{\lambda} + \frac{J_{\nu+2}(\lambda)}{J_{\nu+1}(\lambda)} - \frac{J_{\nu+l+1}(\lambda)}{J_{\nu+l}(\lambda)}$$

- $d\tilde{\phi}(0)(\mathcal{K}_1) = 0$, $\mathcal{K}_1 = \{\kappa \in \mathcal{K} : \kappa|_{\partial B} = \text{polinomio lineal}\}$

Derivada de ϕ (cont.)

- Usando el desarrollo de κ

$$d\tilde{\phi}(0)\,\kappa = \frac{J_{\nu+1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l} a_\nu(l,\lambda)\, \hat{\kappa}_{l,m} Y_{l,m}$$

$$a_\nu(l,\lambda) = \frac{l-1}{\lambda} + \frac{J_{\nu+2}(\lambda)}{J_{\nu+1}(\lambda)} - \frac{J_{\nu+l+1}(\lambda)}{J_{\nu+l}(\lambda)}$$

- $d\tilde{\phi}(0)(\mathcal{K}_1) = 0$, $\mathcal{K}_1 = \{\kappa \in \mathcal{K} : \kappa|_{\partial B} = \text{polinomio lineal}\}$

- $d\tilde{\phi}(0)\Big|_{\mathcal{K}_1^\perp}$ es inyectiva $\Leftrightarrow a_\nu(l,\lambda) \neq 0$, $l \geq 2$

Biyección

Definimos Λ como: $\lambda \in \Lambda$ sii

- λ^2 no es autovalor de $-\Delta$

Biyección

Definimos Λ como: $\lambda \in \Lambda$ sii

- λ^2 no es autovalor de $-\Delta$
- $a_\nu (l, \lambda) \neq 0,\ l \geq 2$

Biyección

Definimos Λ como: $\lambda \in \Lambda$ sii

- λ^2 no es autovalor de $-\Delta$
- $a_\nu(l, \lambda) \neq 0$, $l \geq 2$

- Si $\mathcal{C}_1 = \{f \in \mathcal{C} : f|_{\partial B} = \text{polinomio lineal}\}$, tenemos

  $d\tilde{\phi}(0) : \mathcal{K}_1^\perp \to \mathcal{C}_1^\perp$ es inyectiva

Biyección

Definimos Λ como: $\lambda \in \Lambda$ sii

- λ^2 no es autovalor de $-\Delta$
- $a_\nu (l, \lambda) \neq 0,\ l \geq 2$

- Si $\mathcal{C}_1 = \{f \in \mathcal{C} : f|_{\partial B} = \text{polinomio lineal}\}$, tenemos

  $d\tilde{\phi}(0) : \mathcal{K}_1^\perp \to \mathcal{C}_1^\perp$ es inyectiva

- ¿$d\tilde{\phi}(0)$ es un isomorfismo?

Biyección (cont.)

Formalmente

- Para $f \in \mathcal{C}_1^{\perp}$,

$$d\tilde{\phi}\left(0\right)^{-1} f = \frac{J_{\nu}\left(\lambda\right)}{J_{\nu+1}\left(\lambda\right)} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l} a_{\nu}\left(l,\lambda\right)^{-1} \hat{f}_{l,m} Y_{l,m}$$

Biyección (cont.)

Formalmente

- Para $f \in \mathcal{C}_1^{\perp}$,

$$d\tilde{\phi}(0)^{-1} f = \frac{J_{\nu}(\lambda)}{J_{\nu+1}(\lambda)} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l} a_{\nu}(l,\lambda)^{-1} \hat{f}_{l,m} Y_{l,m}$$

- $d\tilde{\phi}(0)$ isomorfismo de $\mathcal{K}_1^{\perp}$ en $\mathcal{C}_1^{\perp}$

Espacios de Sobolev

$f \in W^{\beta,2}$ sii $f \in L^2(\partial B)$ y verifica

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_l} (1 + l(l+n-2))^{\beta} |\hat{f}_{l,m}|^2 < \infty$$

Vale $W^{\beta,2} \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\partial B)$, si $\beta > \frac{n-1}{2} + j + \alpha$

Obs.: $l(l+n-2)$ es autovalor de $-\Delta_{\partial B}$ con autofunción $Y_{l,m}$, por lo tanto

$$\|f\|_{\beta} = \|(-\Delta_{\partial B} + I)^{\beta/2} f\|_{L^2(\partial B)}$$

Demostración del Teorema

- Definimos $Q : \mathcal{K} \to \mathcal{C}_1$ como

$$Q\kappa = \hat{\kappa}_{0,1} Y_{0,1} + \sum_{m=1}^{n} \hat{\kappa}_{1,m} Y_{1,m}$$

Demostración del Teorema

- Definimos $Q : \mathcal{K} \to \mathcal{C}_1$ como

$$Q\kappa = \hat{\kappa}_{0,1} Y_{0,1} + \sum_{m=1}^{n} \hat{\kappa}_{1,m} Y_{1,m}$$

- Si $\Phi = Q + \tilde{\phi}$, tenemos $d\Phi(0) = Q + d\tilde{\phi}(0)$

Demostración del Teorema

- Definimos $Q : \mathcal{K} \to \mathcal{C}_1$ como

$$Q\kappa = \hat{\kappa}_{0,1} Y_{0,1} + \sum_{m=1}^{n} \hat{\kappa}_{1,m} Y_{1,m}$$

- Si $\Phi = Q + \tilde{\phi}$, tenemos $d\Phi(0) = Q + d\tilde{\phi}(0)$
- Por lo tanto $d\Phi(0)$ es un isomorfismo de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{C}$

Demostración del Teorema

- Definimos $Q : \mathcal{K} \to \mathcal{C}_1$ como

$$Q\kappa = \hat{\kappa}_{0,1} Y_{0,1} + \sum_{m=1}^{n} \hat{\kappa}_{1,m} Y_{1,m}$$

- Si $\Phi = Q + \tilde{\phi}$, tenemos $d\Phi(0) = Q + d\tilde{\phi}(0)$
- Por lo tanto $d\Phi(0)$ es un isomorfismo de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{C}$
- Obtenemos Φ es un difeomorfismo local

Demostración del Teorema

- Definimos $Q : \mathcal{K} \to \mathcal{C}_1$ como

$$Q\kappa = \hat{\kappa}_{0,1} Y_{0,1} + \sum_{m=1}^{n} \hat{\kappa}_{1,m} Y_{1,m}$$

- Si $\Phi = Q + \tilde{\phi}$, tenemos $d\Phi(0) = Q + d\tilde{\phi}(0)$
- Por lo tanto $d\Phi(0)$ es un isomorfismo de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{C}$
- Obtenemos Φ es un difeomorfismo local
- Para $f \in \mathcal{C}_1$, existe $r > 0$ y $a \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Q\kappa_{r,a} = f$$

Demostración del Teorema (cont.)

- Si $\tilde{\phi}(\kappa) = 0$, entonces

$$\Phi(\kappa) = Q\kappa = Q\kappa_{r,a} = \Phi(\kappa_{r,a})$$

Demostración del Teorema (cont.)

- Si $\tilde{\phi}(\kappa) = 0$, entonces

$$\Phi(\kappa) = Q\kappa = Q\kappa_{r,a} = \Phi(\kappa_{r,a})$$

- Por lo tanto $\kappa = \kappa_{r,a}$ ■

Extensiones

- Control Lipschitz (mejorar Aftalion et al.)

Extensiones

- Control Lipschitz (mejorar Aftalion et al.)
- Reconstrucción de $\partial\Omega$ a partir de $\phi(\kappa)$

Extensiones

- Control Lipschitz (mejorar Aftalion et al.)
- Reconstrucción de $\partial\Omega$ a partir de $\phi(\kappa)$
- Aplicación a problemas más generales

MUCHAS GRACIAS !!