Reglas de tipo Leibniz

Virginia Naibo

Departamento de Matemáticas
Kansas State University

Seminario de Análisis
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral
Santa Fe, Argentina, Nov 29, 2010

Programa

- Reglas de tipo Leibniz
- Métodos basados en el análisis de tiempo-frecuencia: operadores bilineales pseudodiferenciales (ΨDOs)
- Métodos basados en el análisis real: desigualdades bilineales de tipo Poincaré

Reglas de tipo Leibniz

Regla fraccionaria de Leibniz:

$$\|fg\|_{s,r} \lesssim \|f\|_{s,p}\|g\|_{q} + \|f\|_{p}\|g\|_{s,q}$$

donde $s \geq 0$, $1 < p, q < \infty$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Kato-Ponce '88, Christ-Weinstein '91, Kenig-Ponce-Vega '93.

Reglas de tipo Leibniz

Regla fraccionaria de Leibniz:

$$\|fg\|_{s,r} \lesssim \|f\|_{s,p}\|g\|_q + \|f\|_p\|g\|_{s,q}$$

donde $s \geq 0$, $1 < p, q < \infty$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Kato-Ponce '88, Christ-Weinstein '91, Kenig-Ponce-Vega '93.

$$\|fg\|_{\mathcal{Z}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{X}_1}\|g\|_{\mathcal{Y}_1} + \|f\|_{\mathcal{X}_2}\|g\|_{\mathcal{Y}_2}$$

Métodos basados en el análisis de tiempo-frecuencia: operadores bilineales ΨDOs

Métodos basados en el análisis de tiempo-frecuencia

Para motivación , comencemos con la prueba de

$$\|fg\|_{s,r} \lesssim \|f\|_{s,p}\|g\|_q + \|f\|_p\|g\|_{s,q}$$

donde $s \geq 0$, $1 < p, q < \infty$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Para motivación , comencemos con la prueba de

$$\|fg\|_{s,r} \lesssim \|f\|_{s,p}\|g\|_q + \|f\|_p\|g\|_{s,q}$$

donde $s \geq 0$, $1 < p, q < \infty$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Coifman-Meyer, '78:

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta \sigma(\xi,\eta)| \leq C_{\alpha,\beta}(|\xi| + |\eta|)^{-(|\alpha|+|\beta|)}, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

$$T_\sigma(f,g)(x) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \sigma(\xi,\eta)\hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)e^{ix\cdot(\xi+\eta)}\, d\xi\, d\eta, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

$$\Downarrow$$

$$T_\sigma : L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}, \quad 1 < p,\ q < \infty.$$

Regla de Leibniz fraccionaria: disociación de frequencias

$\|h\|_{s,r} = \|J^s h\|_r$, donde $\widehat{J^s(h)}(\xi) = \langle\xi\rangle^s \, \hat{h}(\xi)$, $\langle\xi\rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$

$\phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ con soporte en $[-2,2]$ y $\phi(t) + \phi(1/t) = 1, \ t > 0$

Regla de Leibniz fraccionaria: disociación de frequencias

$\|h\|_{s,r} = \|J^s h\|_r$, donde $\widehat{J^s(h)}(\xi) = \langle\xi\rangle^s \, \hat{h}(\xi)$, $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$

$\phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ con soporte en $[-2,2]$ y $\phi(t) + \phi(1/t) = 1, \; t > 0$

$$
\begin{aligned}
J^s(fg)(x) &= \int\int \langle\xi+\eta\rangle^s \, \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)\, e^{ix\cdot(\xi+\eta)}\, d\xi d\eta \\
&= \int\int \langle\xi+\eta\rangle^s \phi\left(\frac{\langle\eta\rangle}{\langle\xi\rangle}\right) \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)\, e^{ix\cdot(\xi+\eta)}\, d\xi d\eta \\
&+ \int\int \langle\xi+\eta\rangle^s \phi\left(\frac{\langle\xi\rangle}{\langle\eta\rangle}\right) \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)\, e^{ix\cdot(\xi+\eta)}\, d\xi d\eta
\end{aligned}
$$

Regla de Leibniz fraccionaria: disociación de frequencias

$\|h\|_{s,r} = \|J^s h\|_r$, donde $\widehat{J^s(h)}(\xi) = \langle \xi \rangle^s \, \hat{h}(\xi)$, $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$

$\phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ con soporte en $[-2,2]$ y $\phi(t) + \phi(1/t) = 1$, $t > 0$

$$
\begin{aligned}
J^s(fg)(x) &= \int\int \langle \xi + \eta \rangle^s \, \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta) \, e^{ix\cdot(\xi+\eta)} \, d\xi d\eta \\
&= \int\int \langle \xi + \eta \rangle^s \phi\left(\tfrac{\langle \eta \rangle}{\langle \xi \rangle}\right) \, \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta) \, e^{ix\cdot(\xi+\eta)} \, d\xi d\eta \\
&+ \int\int \langle \xi + \eta \rangle^s \phi\left(\tfrac{\langle \xi \rangle}{\langle \eta \rangle}\right) \, \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta) \, e^{ix\cdot(\xi+\eta)} \, d\xi d\eta \\
&= \int\int \frac{\langle \xi + \eta \rangle^s}{\langle \xi \rangle^s} \phi\left(\tfrac{\langle \eta \rangle}{\langle \xi \rangle}\right) \, \widehat{J^s f}(\xi) \, \hat{g}(\eta) \, e^{ix\cdot(\xi+\eta)} \, d\xi d\eta \\
&+ \int\int \frac{\langle \xi + \eta \rangle^s}{\langle \eta \rangle^s} \phi\left(\tfrac{\langle \xi \rangle}{\langle \eta \rangle}\right) \, \hat{f}(\xi) \, \widehat{J^s g}(\eta) \, e^{ix\cdot(\xi+\eta)} \, d\xi d\eta
\end{aligned}
$$

Regla de Leibniz fraccionaria: disociación de frequencias

$\|h\|_{s,r} = \|J^s h\|_r$, donde $\widehat{J^s(h)}(\xi) = \langle\xi\rangle^s\, \hat{h}(\xi)$, $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$

$\phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ con soporte en $[-2,2]$ y $\phi(t) + \phi(1/t) = 1,\ t > 0$

$$\begin{aligned}
J^s(fg)(x) &= \int\int \langle\xi+\eta\rangle^s\, \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)\, e^{ix\cdot(\xi+\eta)}\, d\xi d\eta \\
&= \int\int \langle\xi+\eta\rangle^s \phi\left(\tfrac{\langle\eta\rangle}{\langle\xi\rangle}\right)\, \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)\, e^{ix\cdot(\xi+\eta)}\, d\xi d\eta \\
&+ \int\int \langle\xi+\eta\rangle^s \phi\left(\tfrac{\langle\xi\rangle}{\langle\eta\rangle}\right)\, \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)\, e^{ix\cdot(\xi+\eta)}\, d\xi d\eta \\
&= \int\int \frac{\langle\xi+\eta\rangle^s}{\langle\xi\rangle^s} \phi\left(\tfrac{\langle\eta\rangle}{\langle\xi\rangle}\right)\, \widehat{J^s f}(\xi)\, \hat{g}(\eta)\, e^{ix\cdot(\xi+\eta)}\, d\xi d\eta \\
&+ \int\int \frac{\langle\xi+\eta\rangle^s}{\langle\eta\rangle^s} \phi\left(\tfrac{\langle\xi\rangle}{\langle\eta\rangle}\right)\, \hat{f}(\xi)\, \widehat{J^s g}(\eta)\, e^{ix\cdot(\xi+\eta)}\, d\xi d\eta \\
&=: T_{\sigma_1}(J^s f, g)(x) + T_{\sigma_2}(f, J^s g)(x)
\end{aligned}$$

Regla fraccionaria de Leibniz: disociación de frecuencias

$$J^s(fg)(x) = T_{\sigma_1}(J^s f, g)(x) + T_{\sigma_2}(f, J^s g)(x)$$

- $\sigma_1(\xi,\eta) := \frac{\langle \xi+\eta\rangle^s}{\langle \xi\rangle^s}\phi\left(\frac{\langle\eta\rangle}{\langle\xi\rangle}\right)$ y $\sigma_2(\xi,\eta) := \frac{\langle \xi+\eta\rangle^s}{\langle \eta\rangle^s}\phi\left(\frac{\langle\xi\rangle}{\langle\eta\rangle}\right)$.

Regla fraccionaria de Leibniz: disociación de frecuencias

$$J^s(fg)(x) = T_{\sigma_1}(J^s f, g)(x) + T_{\sigma_2}(f, J^s g)(x)$$

- $\sigma_1(\xi,\eta) := \frac{\langle \xi+\eta\rangle^s}{\langle \xi\rangle^s}\phi\left(\frac{\langle\eta\rangle}{\langle\xi\rangle}\right)$ y $\sigma_2(\xi,\eta) := \frac{\langle \xi+\eta\rangle^s}{\langle \eta\rangle^s}\phi\left(\frac{\langle\xi\rangle}{\langle\eta\rangle}\right)$.
- σ_1 y σ_2 son multiplicadores de Coifman-Meyer
  $\Longrightarrow T_{\sigma_i} : L^p \times L^q \to L^r$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $1 < p$, $q < \infty$.

Regla fraccionaria de Leibniz: disociación de frecuencias

$$J^s(fg)(x) = T_{\sigma_1}(J^s f, g)(x) + T_{\sigma_2}(f, J^s g)(x)$$

- $\sigma_1(\xi,\eta) := \frac{\langle \xi+\eta\rangle^s}{\langle \xi\rangle^s}\phi\left(\frac{\langle\eta\rangle}{\langle\xi\rangle}\right)$ y $\sigma_2(\xi,\eta) := \frac{\langle \xi+\eta\rangle^s}{\langle \eta\rangle^s}\phi\left(\frac{\langle\xi\rangle}{\langle\eta\rangle}\right)$.
- σ_1 y σ_2 son multiplicadores de Coifman-Meyer
  $\Longrightarrow T_{\sigma_i} : L^p \times L^q \to L^r$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $1 < p$, $q < \infty$.

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{s,r} = \|J^s(fg)\|_r &\leq \|T_{\sigma_1}(J^s f, g)\|_r + \|T_{\sigma_2}(f, J^s g)\|_r \\
&\lesssim \|J^s f\|_p \|g\|_q + \|f\|_p \|J^s g\|_q \\
&= \|f\|_{s,p}\|g\|_q + \|f\|_p \|g\|_{s,q}
\end{aligned}$$

Regla fraccionaria de Leibniz: disociación de frecuencias

$$J^s(fg)(x) = T_{\sigma_1}(J^s f, g)(x) + T_{\sigma_2}(f, J^s g)(x)$$

- $\sigma_1(\xi,\eta) := \frac{\langle\xi+\eta\rangle^s}{\langle\xi\rangle^s}\phi\left(\frac{\langle\eta\rangle}{\langle\xi\rangle}\right)$ y $\sigma_2(\xi,\eta) := \frac{\langle\xi+\eta\rangle^s}{\langle\eta\rangle^s}\phi\left(\frac{\langle\xi\rangle}{\langle\eta\rangle}\right)$.
- σ_1 y σ_2 son multiplicadores de Coifman-Meyer
  $\Longrightarrow T_{\sigma_i} : L^p \times L^q \to L^r$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $1 < p,\, q < \infty$.

$$\begin{aligned} \|fg\|_{s,r} = \|J^s(fg)\|_r &\le \|T_{\sigma_1}(J^s f, g)\|_r + \|T_{\sigma_2}(f, J^s g)\|_r \\ &\lesssim \|J^s f\|_p \|g\|_q + \|f\|_p \|J^s g\|_q \\ &= \|f\|_{s,p}\|g\|_q + \|f\|_p\|g\|_{s,q} \end{aligned}$$

Si J^s es reemplazado por $|\nabla|^s$, los correspondientes σ_1 y σ_2 son también multiplicadores de Coifman-Meyer.

Observaciones

$$J^s(fg)(x) = \int \int \langle \xi + \eta \rangle^s \, \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta) \, e^{ix\cdot(\xi+\eta)} \, d\xi d\eta$$

Observaciones

$$J^s(fg)(x) = \int\int \langle \xi + \eta \rangle^s \, \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta) \, e^{ix\cdot(\xi+\eta)} \, d\xi d\eta$$

- Obtenemos entonces

$$J^s(fg) = T_\sigma(f,g), \qquad \sigma(\xi,\eta) = \langle \xi + \eta \rangle^s.$$

Observaciones

$$J^s(fg)(x) = \int\int \langle \xi + \eta \rangle^s \, \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)\, e^{ix\cdot(\xi+\eta)}\, d\xi d\eta$$

- Obtenemos entonces

$$J^s(fg) = T_\sigma(f,g), \qquad \sigma(\xi,\eta) = \langle \xi + \eta \rangle^s.$$

- La regla fraccionaria de Leibniz puede reformularse como

$$\|T_\sigma(f,g)\|_r \lesssim \|f\|_{s,p}\|g\|_q + \|f\|_p\|g\|_{s,q}.$$

$$J^s(fg)(x) = \int\int \langle \xi + \eta \rangle^s \, \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta) \, e^{ix\cdot(\xi+\eta)} \, d\xi d\eta$$

- Obtenemos entonces

$$J^s(fg) = T_\sigma(f,g), \qquad \sigma(\xi,\eta) = \langle \xi + \eta \rangle^s.$$

- La regla fraccionaria de Leibniz puede reformularse como

$$\|T_\sigma(f,g)\|_r \lesssim \|f\|_{s,p}\|g\|_q + \|f\|_p\|g\|_{s,q}.$$

- La prueba sigue de las propiedades de acotación en espacios de Lebesgue de T_{σ_1} y T_{σ_2}, donde σ_1 y σ_2 son multiplicadores de Coifman-Meyer.

En forma análoga

$$|\partial_{\xi_1}^{\alpha_1}\partial_{\xi_2}^{\alpha_2}\partial_{\eta_1}^{\beta_1}\partial_{\eta_2}^{\alpha_2}\sigma(\xi,\eta)| \lesssim \frac{1}{|(\xi_1,\eta_1)|^{\alpha_1+\beta_1}}\frac{1}{|(\xi_2,\eta_2)|^{\alpha_2+\beta_2}},$$

$\xi = (\xi_1,\xi_2), \eta = (\eta_1,\eta_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha_i,\ \beta_i \geq 0.$

En forma análoga

$$|\partial_{\xi_1}^{\alpha_1}\partial_{\xi_2}^{\alpha_2}\partial_{\eta_1}^{\beta_1}\partial_{\eta_2}^{\alpha_2}\sigma(\xi,\eta)| \lesssim \frac{1}{|(\xi_1,\eta_1)|^{\alpha_1+\beta_1}}\frac{1}{|(\xi_2,\eta_2)|^{\alpha_2+\beta_2}},$$

$$\xi = (\xi_1,\xi_2), \eta = (\eta_1,\eta_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha_i,\, \beta_i \geq 0.$$

Muscalu-Pipher-Tao-Thiele, 2004:

$T_\sigma : L^p(\mathbb{R}^2) \times L^q(\mathbb{R}^2) \to L^r(\mathbb{R}^2)$ para $1 < p, q < \infty$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

En forma análoga

$$|\partial_{\xi_1}^{\alpha_1}\partial_{\xi_2}^{\alpha_2}\partial_{\eta_1}^{\beta_1}\partial_{\eta_2}^{\alpha_2}\sigma(\xi,\eta)| \lesssim \frac{1}{|(\xi_1,\eta_1)|^{\alpha_1+\beta_1}}\frac{1}{|(\xi_2,\eta_2)|^{\alpha_2+\beta_2}},$$

$\xi = (\xi_1,\xi_2), \eta = (\eta_1,\eta_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha_i,\ \beta_i \geq 0.$

Muscalu-Pipher-Tao-Thiele, 2004:

$T_\sigma : L^p(\mathbb{R}^2) \times L^q(\mathbb{R}^2) \to L^r(\mathbb{R}^2)$ para $1 < p, q < \infty$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Consecuencia :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}^\alpha\mathcal{D}^\beta fg\|_r \lesssim \|\mathcal{D}^\alpha\mathcal{D}^\beta f\|_p\|g\|_q + \|f\|_p\|\mathcal{D}^\alpha\mathcal{D}^\beta g\|_q \\ + \|\mathcal{D}^\alpha f\|_p\|\mathcal{D}^\beta g\|_q + \|\mathcal{D}^\beta f\|_p\|\mathcal{D}^\alpha g\|_q\end{aligned}$$

$\widehat{\mathcal{D}^\alpha\mathcal{D}^\beta h}(\xi_1,\xi_2) = |\xi_1|^\alpha|\xi_2|^\beta\hat{h}(\xi_1,\xi_2)$

Operadores ΨDOs lineales

$$T_\sigma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)e^{i\xi\cdot x}\,d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

$$T_\sigma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)e^{i\xi\cdot x}\,d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Multiplicadores:

$$\sigma(x,\xi) = m(\xi) \Longrightarrow \widehat{T_\sigma(f)} = m\,\hat{f}$$

Multiplicación:

$$\sigma(x,\xi) = b(x) \Longrightarrow T_\sigma(f) = b\,f$$

Operadores en derivadas parciales lineales:

$$L = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\,\partial^\alpha,\ \ \sigma(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \Longrightarrow L(f) = T_\sigma(f)$$

$$T_\sigma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)e^{i\xi\cdot x}\,d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Multiplicadores:

$$\sigma(x,\xi) = m(\xi) \Longrightarrow \widehat{T_\sigma(f)} = m\,\hat{f}$$

Multiplicación:

$$\sigma(x,\xi) = b(x) \Longrightarrow T_\sigma(f) = b\,f$$

Operadores en derivadas parciales lineales:

$$L = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\,\partial^\alpha,\;\; \sigma(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \Longrightarrow L(f) = T_\sigma(f)$$

Formalmente:

$$T_\sigma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)f(y)\,dy, \qquad k(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi)e^{i(x-y)\xi}d\xi$$

Símbolos lineales

$$T_\sigma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)e^{i\xi\cdot x}\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Clases de Hörmander $S^m_{\rho,\delta}$, $m \in \mathbb{R}$, $0 \le \delta \le \rho \le 1$:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m+\delta|\alpha|-\rho|\beta|}, \quad x,\xi \in \mathbb{R}^n,$$

para todo multiíndice α, $\beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Operadores pseudodiferenciales bilineales

$$T_\sigma(f,g)(x) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \sigma(x,\xi,\eta)\hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)e^{ix\cdot(\xi+\eta)}\, d\xi\, d\eta, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Operadores pseudodiferenciales bilineales

$$T_\sigma(f,g)(x) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \sigma(x,\xi,\eta)\hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)e^{ix\cdot(\xi+\eta)}\, d\xi\, d\eta, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Producto de funciones:

$$\sigma(x,\xi,\eta) = b(x)\,\xi^\alpha\eta^\beta \Longrightarrow T_\sigma(f,g) = b\,D^\alpha f\;D^\beta g$$

Operadores pseudodiferenciales bilineales

$$T_\sigma(f,g)(x) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \sigma(x,\xi,\eta)\hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)e^{ix\cdot(\xi+\eta)}\,d\xi\,d\eta, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Producto de funciones:

$$\sigma(x,\xi,\eta) = b(x)\,\xi^\alpha\eta^\beta \Longrightarrow T_\sigma(f,g) = b\,D^\alpha f\;D^\beta g$$

Formalmente:

$$T_\sigma(f,g)(x) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} k(x,y,z)f(y)g(z)\,dy\,dz,$$

$$k(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \sigma(x,\xi,\eta)e^{i(x-y)\xi}e^{i(x-z)\eta}d\xi d\eta.$$

Símbolos bilineales

$$T_\sigma(f,g)(x) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \sigma(x,\xi,\eta)\hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)e^{ix\cdot(\xi+\eta)}\,d\xi\,d\eta, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Clases de Hörmander bilineales $BS^m_{\rho,\delta}$, $m \in \mathbb{R}$, $0 \le \delta \le \rho \le 1$:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\eta^\gamma \sigma(x,\xi,\eta)| \le C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|\xi|+|\eta|)^{m+\delta|\alpha|-\rho(|\beta|+|\gamma|)}, \quad x,\xi,\eta \in \mathbb{R}^n,$$

para todo multiíndice α, β, $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$.

Commutadores: Coifman y Meyer, 1978

- Si $\sigma \in S^1_{1,0}$ y $A \in Lip_1(\mathbb{R}^n)$ entonces $[T_\sigma, A] := T_\sigma A - AT_\sigma$ está acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$$[T_\sigma, A] \text{ está relacionado con } BS^0_{1,0}.$$

Commutadores: Coifman y Meyer, 1978

- Si $\sigma \in S^1_{1,0}$ y $A \in Lip_1(\mathbb{R}^n)$ entonces $[T_\sigma, A] := T_\sigma A - AT_\sigma$ está acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$$[T_\sigma, A] \text{ está relacionado con } BS^0_{1,0}.$$

- Si $\sigma \in S^{-1/2}_{1/2,1/2}$ y $A \in C^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\nabla[T_\sigma, A]$ está acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$$\nabla[T_\sigma, A] \text{ está relacionado con } BS^0_{1/2,1/2}.$$

Lineal en $\mathbb{R}^{2n}$ vs. bilineal en $\mathbb{R}^n$

$$\sigma(x,\xi,\eta),\ x,\xi,\eta \in \mathbb{R}^n,\ X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2n},\ \zeta = (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{2n},$$

$$\Sigma(X,\zeta) = \sigma\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \xi, \eta\right).$$

Lineal en $\mathbb{R}^{2n}$ vs. bilineal en $\mathbb{R}^n$

$$\sigma(x,\xi,\eta),\ x,\xi,\eta \in \mathbb{R}^n,\ X = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^{2n},\ \zeta = (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{2n},$$

$$\Sigma(X,\zeta) = \sigma\left(\frac{x_1+x_2}{2},\xi,\eta\right).$$

$$\sigma \in BS^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \Sigma \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^{2n})$$

Lineal en $\mathbb{R}^{2n}$ vs. bilineal en $\mathbb{R}^n$

$\sigma(x,\xi,\eta)$, $x,\xi,\eta \in \mathbb{R}^n$, $X=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{2n}$, $\zeta=(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{2n}$,

$$\Sigma(X,\zeta)=\sigma\left(\frac{x_1+x_2}{2},\xi,\eta\right).$$

$$\sigma\in BS^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)\Longrightarrow\Sigma\in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^{2n})$$

El núcleo $k(x,y,z)$ del operador bilineal T_σ está dado por

$$k(x,y,z)=K((x,x),(y,z)),\quad x,y,z\in\mathbb{R}^n,$$

donde $K(X,Y)$ es el núcleo asociado al operador lineal T_Σ.

Símbolos lineales y operadores de Calderón-Zygmund

- $\sigma \in S^0_{1,\delta}, 0 \leq \delta < 1 \Longrightarrow T_\sigma$ es un op. de Calderón-Zygmund.

$$T_\sigma : L^p \to L^p, \qquad 1 < p < \infty.$$

- $\sigma \in S^0_{1,1} \Longrightarrow T_\sigma$ tiene un núcleo estandar.

No todo T_σ está acotado en espacios de Lebesgue.

Símbolos bilineales y operadores de Calderón-Zygmund

- $\sigma \in BS^0_{1,\delta}, 0 \leq \delta < 1 \Longrightarrow T_\sigma$ op. bilineal de Calderón-Zygmund.

$$T_\sigma : L^p \times L^q \to L^r, \quad \tfrac{1}{r} = \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q}, \; 1 < p, \, q < \infty.$$

Teoría bilineal de Calderón-Zygmund: Christ-Journé, Coifman-Meyer, Grafakos-Torres, Kenig-Stein.

- $\sigma \in BS^0_{1,1} \Longrightarrow T_\sigma$ tiene un núcleo bilineal estandar.

No todo T_σ está acotado en espacios de Lebesgue. Bényi-Torres '03.

Comparación entre resultados lineales y bilineales

	Teoría L^2 $m = 0,\ 0 \le \delta \le \rho \le 1$	Cálculo Simbólico $m \in \mathbb{R},\ 0 \le \delta \le \rho \le 1$	Teoría L^p $m \in \mathbb{R},\ 0 \le \delta \le \rho \le 1$
Lineal	$\delta < \rho,$ Hörmander '67 $\delta = \rho,$ $\delta < 1$ Calderón-Vaillancourt '71	Kohn-Nirenberg '65 Hörmander '65 '67	Wainger '65 Fefferman '73
Bilineal	$\delta = \rho = 0$ no vale Bényi-Torres '04	$m = \delta = 0, \rho = 1$ Bényi-Torres '03	$0 \le \delta < \rho = 1$ C-Z*
	$0 \le \delta < \rho = 1$ C-Z*	$m \in \mathbb{R},\ 0 \le \delta \le \rho \le 1$ Bényi-Maldonado-Naibo -Torres '10	$0 < \rho < 1$???
	$0 < \rho < 1$???		

*Teoría bilineal C-Z : Christ-Journé, Coifman-Meyer, Grafakos-Torres, Kenig-Stein

Símbolos con condición de tipo Dini: Maldonado-Naibo

Cálculo simbólico para las classes de Hörmander lineales

- $\delta < 1$, $\sigma \in S^m_{\rho,\delta} \Rightarrow T^*_\sigma = T_{\sigma^*}$, $\sigma^* \in S^m_{\rho,\delta}$.

  Expansión asintótica: $\sigma^* = \bar{\sigma} +$ símbolos de orden menor

Cálculo simbólico para las classes de Hörmander lineales

- $\delta < 1,\ \sigma \in S^m_{\rho,\delta} \Rightarrow T^*_\sigma = T_{\sigma^*},\ \sigma^* \in S^m_{\rho,\delta}$.

  Expansión asintótica: $\sigma^* = \bar{\sigma} +$ símbolos de orden menor

- $\sigma_1 \in S^{m_1}_{\rho_1,\delta_1}$ y $\sigma_2 \in S^{m_2}_{\rho_2,\delta_2} \Rightarrow T_{\sigma_1} \circ T_{\sigma_2} = T_\sigma,\ \sigma \in S^m_{\rho,\delta}$,
  $m = m_1 + m_2,\ \rho = \min(\rho_1, \rho_2),\ \delta = \max(\delta_1, \delta_2)$.

  Expansión asintótica: $\sigma = \sigma_1\, \sigma_2 +$ símbolos de orden menor

- Hörmander '65, Calderón-Vaillancourt '71, $\delta < 1$,

$$T_\sigma : L^2 \to L^2, \qquad \sigma \in S^0_{\rho,\delta}. \tag{1}$$

Clases de Hörmander lineales, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ - Teoría L^p

- Hörmander '65, Calderón-Vaillancourt '71, $\delta < 1$,

$$T_\sigma : L^2 \to L^2, \qquad \sigma \in S^0_{\rho,\delta}. \tag{1}$$

- Fefferman '73, $0 \leq \delta < \rho < 1$,

$$T_\sigma : L^\infty \to BMO, \qquad \sigma \in S^{-n(1-\rho)/2}_{\rho,\delta}. \tag{2}$$

Clases de Hörmander lineales, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ - Teoría L^p

- Hörmander '65, Calderón-Vaillancourt '71, $\delta < 1$,

$$T_\sigma : L^2 \to L^2, \qquad \sigma \in S^0_{\rho,\delta}. \tag{1}$$

- Fefferman '73, $0 \leq \delta < \rho < 1$,

$$T_\sigma : L^\infty \to BMO, \qquad \sigma \in S^{-n(1-\rho)/2}_{\rho,\delta}. \tag{2}$$

- Stein, $0 < \delta = \rho < 1$,

$$T_\sigma : L^1 \to L^{1,\infty}, \qquad \sigma \in S^{-n(1-\rho)/2}_{\rho,\delta}. \tag{3}$$

Clases de Hörmander lineales, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ - Teoría L^p

- Hörmander '65, Calderón-Vaillancourt '71, $\delta < 1$,

$$T_\sigma : L^2 \to L^2, \qquad \sigma \in S^0_{\rho,\delta}. \tag{1}$$

- Fefferman '73, $0 \leq \delta < \rho < 1$,

$$T_\sigma : L^\infty \to BMO, \qquad \sigma \in S^{-n(1-\rho)/2}_{\rho,\delta}. \tag{2}$$

- Stein, $0 < \delta = \rho < 1$,

$$T_\sigma : L^1 \to L^{1,\infty}, \qquad \sigma \in S^{-n(1-\rho)/2}_{\rho,\delta}. \tag{3}$$

- Teoría de CZ vale para $S^0_{1,\delta}$, $0 \leq \delta < \rho = 1$. (4)

Clases de Hörmander lineales, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ - Teoría L^p

(1) + (2) + (3)+ (4) + interpolación + cálculo simbólico:

$$T_\sigma : L^p \to L^p, \qquad \sigma \in S^m_{\rho,\delta}, \qquad m \leq -n(1-\rho)\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|, \, \delta < 1.$$

Clases de Hörmander lineales, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ - Teoría L^p

(1) + (2) + (3)+ (4) + interpolación + cálculo simbólico:

$$T_\sigma : L^p \to L^p, \qquad \sigma \in S^m_{\rho,\delta}, \qquad m \leq -n(1-\rho)\left|\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{2}\right|,\ \delta < 1.$$

Este resultado es óptimo:
Si $m > -n(1-\rho)|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}|$ existe $\sigma \in S^m_{\rho,\delta}$ tal que T_σ no está acotado en L^p. Hardy-Littlewood-Hirschman-Wainger.

Clases de Hörmander lineales, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ - Teoría L^p

(1) + (2) + (3)+ (4) + interpolación + cálculo simbólico:

$$T_\sigma : L^p \to L^p, \qquad \sigma \in S^m_{\rho,\delta}, \qquad m \leq -n(1-\rho)|\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{2}|,\ \delta < 1.$$

Este resultado es óptimo:
Si $m > -n(1-\rho)|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}|$ existe $\sigma \in S^m_{\rho,\delta}$ tal que T_σ no está acotado en L^p. Hardy-Littlewood-Hirschman-Wainger.

Kenig-Staubach '07 ($L^\infty(S^m_\rho)$, $m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \rho \leq 1$): operadores Ψ-pseudodiferenciales y su acotación en L^p.

$$\sigma \in L^\infty(S^m_\rho) \Leftrightarrow |\partial^\alpha_\xi \sigma(x,\xi)| \leq C_\alpha (1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|}$$

$T_\sigma : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq 2$ y $m < -n(1-\rho)/p$. Notar que $S^m_{\rho,1} \subset L^\infty(S^m_\rho)$.

Invariancia por transposición

$$\langle T(f,g),h\rangle = \langle T^{*1}(h,g),f\rangle = \langle T^{*2}(f,h),g\rangle, \qquad f,\, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Invariancia por transposición

$$\langle T(f,g),h\rangle = \langle T^{*1}(h,g),f\rangle = \langle T^{*2}(f,h),g\rangle, \qquad f,\ g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 1 (Bényi-Maldonado-Naibo-Torres, 2010)

Si $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$, $\delta < 1$ y $\sigma \in BS^m_{\rho,\delta}$, entonces $T_\sigma^{*j} = T_{\sigma^{*j}}$, donde $\sigma^{*j} \in BS^m_{\rho,\delta}$, $j = 1, 2$.

Bényi-Torres, 2003: Caso $\rho = 1$, $m = \delta = 0$.

Expansiones asintóticas

Teorema 2 (Bényi-Maldonado-Naibo-Torres, 2010)

Si $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ *y* $\sigma \in BS^{m}_{\rho,\delta}$, *entonces*

$$\sigma^{*1} \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\alpha} (\sigma(x, -\xi - \eta, \eta)),$$

en el sentido de que si $N \in \mathbb{N}$ *entonces*

$$\sigma^{*1} - \sum_{|\alpha|<N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\alpha} (\sigma(x, -\xi - \eta, \eta)) \in BS^{m+(\delta-\rho)N}_{\rho,\delta}.$$

Similarmente para σ^{*2}.

Clases de Hörmander bilineales, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ - Teoría L^2

La teoría L^2 en el caso bilineal corresponde a las acotaciones $L^p \times L^q \to L^r$, donde $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r})$ está en el triangulo con vértices $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ y $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

La teoría L^2 en el caso bilineal corresponde a las acotaciones $L^p \times L^q \to L^r$, donde $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r})$ está en el triangulo con vértices $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ y $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

- El resultado de Calderón-Vaillancourt para la clase $S^0_{0,0}$ falla en el caso bilineal: Existen símbolos $\sigma \in BS^0_{0,0}$ para los cuales los correspondientes operadores bilineales no satisfacen las acotaciones

$$T_\sigma : L^p \times L^q \to L^r,$$

$1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{2} < r < \infty$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Bényi-Torres, 2004.

Clases de Hörmander bilineales, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ - Teoría L^2

La teoría L^2 en el caso bilineal corresponde a las acotaciones $L^p \times L^q \to L^r$, donde $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r})$ está en el triangulo con vértices $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ y $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

- El resultado de Calderón-Vaillancourt para la clase $S^0_{0,0}$ falla en el caso bilineal: Existen símbolos $\sigma \in BS^0_{0,0}$ para los cuales los correspondientes operadores bilineales no satisfacen las acotaciones
$$T_\sigma : L^p \times L^q \to L^r,$$
$1 \leq p,\ q \leq \infty$, $\frac{1}{2} < r < \infty$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Bényi-Torres, 2004.

- $\sigma \in BS^0_{\rho,\rho}$, $0 < \rho < 1$: Las propiedades de acotación para T_σ no son conocidas.

No conocida, excepto los casos ya mencionados.

Otra prueba de $T_\sigma : L^p \times L^q \longrightarrow L^r$, $\sigma \in BS^0_{1,\delta}$, $0 < \delta < 1$

Grafakos-Torres, 2002:

Si T y sus traspuestas, T^{*1} y T^{*2}, tienen símbolos en $BS^0_{1,1}$, entonces T y sus traspuestas pueden ser extendidos a operadores acotados de $L^p \times L^q$ en L^r para $1 < p, q < \infty$ y $1/p + 1/q = 1/r$.

Otra prueba de $T_\sigma : L^p \times L^q \longrightarrow L^r$, $\sigma \in BS^0_{1,\delta}$, $0 < \delta < 1$

Grafakos-Torres, 2002:

Si T y sus traspuestas, T^{*1} y T^{*2}, tienen símbolos en $BS^0_{1,1}$, entonces T y sus traspuestas pueden ser extendidos a operadores acotados de $L^p \times L^q$ en L^r para $1 < p, q < \infty$ y $1/p + 1/q = 1/r$.

Notar que $BS^0_{1,\delta} \subset BS^0_{1,1}$, $0 \leq \delta < 1$!

Otra prueba de $T_\sigma : L^p \times L^q \longrightarrow L^r$, $\sigma \in BS^0_{1,\delta}$, $0 < \delta < 1$

Grafakos-Torres, 2002:

Si T y sus traspuestas, T^{*1} y T^{*2}, tienen símbolos en $BS^0_{1,1}$, entonces T y sus traspuestas pueden ser extendidos a operadores acotados de $L^p \times L^q$ en L^r para $1 < p, q < \infty$ y $1/p + 1/q = 1/r$.

Notar que $BS^0_{1,\delta} \subset BS^0_{1,1}$, $0 \leq \delta < 1$!

Combinando estos resultados con el Teorema 1 (cálculo simbólico bilineal):

Corolario 1

Si σ es un símbolo en $BS^0_{1,\delta}$, $0 \leq \delta < 1$, entonces T_σ se extiende a un operador acotado de $L^p \times L^q$ en L^r, $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.

Acotación en espacios de Sobolev y reglas de tipo Leibniz

Teorema 3 (Bényi-Maldonado-Naibo-Torres, 2010)

Si $\sigma \in BS^0_{\rho,\delta}$, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$, $\delta < 1$, *entonces*

$$T_\sigma : L^2 \times W_0^{s,\infty} \to L^2,$$

donde s *es un entero tal que* $s > \frac{[n/2]+1}{1-\delta} + n$.

Acotación en espacios de Sobolev y reglas de tipo Leibniz

Teorema 3 (Bényi-Maldonado-Naibo-Torres, 2010)

Si $\sigma \in BS^0_{\rho,\delta}$, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$, $\delta < 1$, *entonces*

$$T_\sigma : L^2 \times W_0^{s,\infty} \to L^2,$$

donde s *es un entero tal que* $s > \frac{[n/2]+1}{1-\delta} + n$.

Corolario 2 (Regla de tipo Leibniz)

Sean $m \geq 0$, $\sigma \in BS^m_{\rho,\delta}$, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$, $\delta < 1$. *Si* s *es un entero tal que* $s > \frac{[n/2]+1}{1-\delta} + n$, *entonces*

$$\|T_\sigma(f,g)\|_{L^2} \leq C\left(\|f\|_{m,2}\|g\|_{s,\infty} + \|f\|_{s,\infty}\|g\|_{m,2}\right)$$

para $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Prueba de la regla de tipo Leibniz

- $\sigma_1(x,\xi,\eta) = \sigma(x,\xi,\eta)\phi\left(\frac{1+|\eta|^2}{1+|\xi|^2}\right)(1+|\xi|^2)^{-m/2} \in BS^0_{\rho,\delta}$.
  $\sigma_2(x,\xi,\eta) = \sigma(x,\xi,\eta)\phi\left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)(1+|\eta|^2)^{-m/2} \in BS^0_{\rho,\delta}$.

- $T_\sigma(f,g) = T_{\sigma_1}(J^m f, g) + T_{\sigma_2}(f, J^m g)$.

- Usar Teorema 3.

Métodos basados en el análisis real:
desigualdades bilineales de tipo Poincaré

Métodos basados en el análisis real

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^{q,\lambda}(w)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^{p_1,\lambda_1}(u)}\|g\|_{L^{p_2,\lambda_2}(v)} + \|f\|_{L^{p_1,\lambda_1}(u)}\|\nabla g\|_{L^{p_2,\lambda_2}(v)}$$

- h pertenece al espacio de Morrey $L^{p,\lambda}(w)$ si

$$\|h\|_{L^{p,\lambda}(w)} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|^{\lambda/n}} \int_B |h(x)w(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty$$

- h pertenece al espacio de Campanato $\mathcal{L}^{p,\lambda}(w)$ si

$$\|h\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(w)} = \sup_B \inf_{a\in\mathbb{C}} \left(\frac{1}{|B|^{\lambda/n}} \int_B (|h(x) - a|w(x))^p \; dx \right)^{1/p} < \infty$$

Casos particulares, $w \equiv 1$ ($\mathcal{L}^{p,\lambda} := \mathcal{L}^{p,\lambda}(1)$)

- $\lambda = 0$, $\mathcal{L}^{p,0} = L^p$
- $0 < \lambda < n$, $\mathcal{L}^{p,\lambda} =$ espacios de Morrey (Campanato '64)
- $\lambda = n$, $\mathcal{L}^{p,n} = BMO$ (John-Nirenberg, '61)
- $n < \lambda \leq n + p$, $\mathcal{L}^{p,\lambda} = \mathrm{Lip}_{\frac{\lambda - n}{p}}$ (Campanato '63, Meyers '64)

Desigualdad de Poincaré

- Desigualdad clásica de Poincaré:

$$\left(\int_B |f - f_B|^q\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \left(\int_B |\nabla f|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{n}, \ 1 \leq p < n.$$

donde $f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f$.

Desigualdad de Poincaré

- Desigualdad clásica de Poincaré:

$$\left(\int_B |f - f_B|^q\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \left(\int_B |\nabla f|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{n}, \; 1 \leq p < n.$$

donde $f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f$.

- Simples ejemplos muestran que esta desigualdad no es en general cierta para $0 < p < 1$.

Hacia una desigualdad bilineal de Poincaré con $p < 1$

$$\left(\int_B |(fg)(x) - f_B g_B|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \left(\int_B |\nabla(fg)(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (\text{si } p \geq 1)$$

$$\lesssim \left(\int_B |\nabla f|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_B |g|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\int_B |f|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_B |\nabla g|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$

Aún más: consideremos pesos y gradientes generalizados

$$\left(\int_B (|(fg)(x) - f_B g_B| u(x))^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\lesssim \left(\int_B (|\mathbf{Y} f| v_1)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_B (|g| v_2)^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\int_B (|f| v_1)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_B (|\mathbf{Y} g| v_2)^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$\mathbf{Y} = \{Y_i\}_{i=1}^M$ es un familia de vectores suaves

$(Y_i = \partial_i$ y $M = n$ if $\mathbf{Y} = \nabla)$

Teorema 4 (Maldonado-Moen-Naibo, 2010)

- $\mathbf{Y}$ *es una familia de campos vectoriales que satisfacen la condición de Hörmander en* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
- ρ *es la métrica de Carnot-Carathéodory asociada.*
- $\frac{1}{m} < p \leq q < \infty$, $1 < p_1, \cdots, p_m < \infty$, $\frac{1}{p} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{p_k}$.
- u, v_k, $k = 1, \cdots, m$, *son pesos en* Ω *que satisfacen condiciones adecuadas* en relación a* p, q *y* p_k.

$$\left(\int_B \left(\left| \prod_{k=1}^m f_k - \prod_{k=1}^m f_{k\,B} \right| u \right)^q dx \right)^{1/q}$$

$$\leq C \sum_{k=1}^m \left(\int_B (|\mathbf{Y} f_k| v_k)^{p_k} \, dx \right)^{1/p_k} \prod_{i \neq k} \left(\int_B (|f_i| v_i)^{p_i} \, dx \right)^{1/p_i},$$

para toda ρ*-bola* B *con radio suficientemente pequeño contenida en un compacto dado de* Ω *y para toda* $f_k \in C^1(\overline{B})$.

- *Condiciones adecuadas: En el caso euclideo y cuando todos los pesos son identicamente igual a uno estas condiciones incluyen la relation $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{n}$ dando en el caso lineal la desigualdad clásica de Poincaré.

- *Condiciones adecuadas: En el caso euclideo y cuando todos los pesos son identicamente igual a uno estas condiciones incluyen la relation $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{n}$ dando en el caso lineal la desigualdad clásica de Poincaré.

- Resultados en el caso lineal incluyen trabajos de Fabes-Kenig-Serapioni '82, Chanillo-Wheeden '85, Jerison '86, Lu '92, Franchi-Lu-Wheeden '95.

Ideas principales en la prueba de desigualdades multilineales de tipo Poincaré

La desigualdad clásica de Poincaré sigue de:

- Fórmula de representación:

$$|f(x) - f_B| \lesssim I_{B,1}(|\nabla f|)(x), \qquad x \in B,$$

donde $I_{B,1}$ es la integral fraccionaria de orden uno

$$I_{B,1}(h)(x) = \int_B h(y)|x-y|^{1-n}\,dy.$$

La desigualdad clásica de Poincaré sigue de:

- Fórmula de representación:

$$|f(x) - f_B| \lesssim I_{B,1}(|\nabla f|)(x), \qquad x \in B,$$

donde $I_{B,1}$ es la integral fraccionaria de orden uno

$$I_{B,1}(h)(x) = \int_B h(y)|x-y|^{1-n}\, dy.$$

- Propiedades de acotación de $I_{B,1}$.

En el caso multilineal:

- Definir integrales fraccionarias multilineales adecuadas.
- Probar propiedades de acotación en espacios de Lebesgue para las integrales fraccionarias multilineales.
- Probar correspondientes fórmulas de representación.

- Integral fraccionaria clásica en $\mathbb{R}^n$:

$$I_\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x-y|^\alpha}{|B(x,|x-y|)|}\, f(y)\, dy.$$

- Integral fraccionaria clásica en $\mathbb{R}^n$:

$$I_\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x-y|^\alpha}{|B(x,|x-y|)|}\, f(y)\, dy.$$

- Caso lineal en un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ):

$$\mathcal{I}_{X,\alpha}(f)(x) = \int_X \frac{d(x,y)^\alpha}{\mu(B_d(x, d(x,y)))}\, f(y)\, d\mu(y), \qquad x \in X.$$

- Integral fraccionaria clásica en $\mathbb{R}^n$:

$$I_\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x-y|^\alpha}{|B(x,|x-y|)|}\, f(y)\, dy.$$

- Caso lineal en un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ):

$$\mathcal{I}_{X,\alpha}(f)(x) = \int_X \frac{d(x,y)^\alpha}{\mu(B_d(x,d(x,y)))}\, f(y)\, d\mu(y), \qquad x \in X.$$

- Caso multilineal en un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ) :

$$\mathcal{I}_{X,\alpha}(\vec{f})(x) = \int_{X^m} \frac{d(x,\vec{y})^\alpha}{(\mu(B_d(x,d(x,\vec{y}))))^m}\, f_1(y_1)\dots f_m(y_m)\, d\mu(\vec{y}),$$

$\vec{f} = (f_1,\dots,f_m)$, $d(x,\vec{y}) = d(x,y_1) + \cdots, +d(x,y_m)$,
$d\mu(\vec{y}) = d\mu(y_1)\dots d\mu(y_m)$.

- Integral fraccionaria clásica en $\mathbb{R}^n$:

$$I_\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x-y|^\alpha}{|B(x,|x-y|)|}\, f(y)\, dy.$$

- Caso lineal en un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ):

$$\mathcal{I}_{X,\alpha}(f)(x) = \int_X \frac{d(x,y)^\alpha}{\mu(B_d(x, d(x,y)))}\, f(y)\, d\mu(y), \qquad x \in X.$$

- Caso particular: integral fraccionaria multilineal en $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{I}_{\mathbb{R}^n,\alpha}(\vec{f})(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)}{(|x-y_1| + \cdots + |x-y_m|)^{mn-\alpha}}\, d\vec{y},$$

$\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_m)$.

Propiedades de acotación de $\mathcal{I}_{X,\alpha}$

Teorema 5 (Maldonado-Moen-Naibo, 2010)

- (X,ρ,μ) *espacio de tipo homogéneo que satisface la "reverse doubling property" y ciertas condiciones técnicas bastante generales.*
- $\frac{1}{m} < p \leq q < \infty$, $1 < p_1, \cdots, p_m < \infty$, $\frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{p_k}$.
- u, v_k, $k = 1, \cdots, m$ *son pesos definidos en* X *que satisfacen condiciones adecuadas* en relación a* p, q *y* p_k.

Entonces existe una constante C, *que depende sólo de constantes estructurales, tal que*

$$\left(\int_X \left(|\mathcal{I}_{X,\alpha}\vec{f}|u\right)^q \, d\mu\right)^{1/q} \leq C \prod_{k=1}^{m} \left(\int_X (|f_k|v_k)^{p_k} \, d\mu\right)^{1/p_k}$$

para toda $\vec{f} \in L^{p_1}(X, v_1^{p_1} d\mu) \times \cdots \times L^{p_m}(X, v_m^{p_m} d\mu)$.

Algunos resultados en conección con el Teorema 5

- Muckenhoupt y Wheeden, '74: $X = \mathbb{R}^n$, $m = 1$, caracterización de los pesos w para la desigualdad fuerte

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (I_\alpha f w)^q \, dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} (fw)^p \, dx \right)^{1/p},$$

  $f \geq 0$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$.

- Sawyer, '88: $X = \mathbb{R}^n$, $m = 1$, caracterización de los pares de pesos para la acotación fuerte de I_α.

- Sawyer-Wheeden '92 y Pérez-Wheeden '01: (X, d, μ) espacio de tipo homogéneo, $m = 1$.

- Harboure-Salinas-Viviani '97: acotación de la integral fraccionaria en espacios de Lebesgue y Lipschitz con pesos.

- Caso multilineal, $X = \mathbb{R}^n$, Moen '09, Pradolini '10, Bernardis-Gorosito-Pradolini '10, Aimar-Hartzstein-Iaffei-Viviani '10.

- Fórmulas de representación multilineales en espacios de Carnot-Carathéodory:

$$|\prod_{k=1}^{m} f_k(x) - \prod_{k=1}^{m} f_{k\,B}| \lesssim \sum_{k=1}^{m} \mathcal{I}_{B,1}(f_1\chi_B, \cdots, (\mathbf{Y} f_k)\chi_B, \cdots, f_m\chi_B)(x),$$

$x \in B$.

Resultados lineales incluyen trabajos de Lu-Wheeden '98 y Franchi-Lu-Wheeden, '96, '95, entre otros.

Muchas gracias!

Referencias

- A. Bényi, D. Maldonado, V. Naibo and R.H. Torres, *On the Hörmander classes of bilinear pseudodifferential operators*, to appear in Integral Equations and Operator Theory.
- A. Bényi and R.H. Torres, *Symbolic calculus and the transposes of bilinear pseudodifferential operators,* Comm. Partial Differential Equations **28** (2003), no. 5-6, 1161–1181.
- A. Bényi and R.H. Torres, *Almost orthogonality and a class of bounded bilinear pseudodifferential operators,* Math. Res. Lett. **11** (2004), no. 1, 1–11.
- A. Bernadis, O. Gorosito, G. Pradolini, *Weighted inequalities for multilinear potential operators and its commutators,* preprint.
- S. Buckley and P. Koskela, *Sobolev-Poincaré Inequalities for* $p < 1$, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 221–240.
- A. Calderón and R. Vaillancourt, *On the boundedness of pseudo-differential operators*, J. Math Soc. Japan **23** (1971), 374–378.

Referencias (cont.)

- M. Christ and J.L. Journé, *Polynomial growth estimates for multilinear singular integral operators,* Acta Math. **159** (1987), no. 1-2, 51–80.
- S. Chanillo and R. Wheeden, *Weighted Poincar and Sobolev inequalities and estimates for weighted Peano maximal functions,* Amer. J. Math. 107 (1985), no. 5, 11911226.
- M. Christ and M. Weinstein, *Dispersion of small amplitude solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation*, J. Funct. Anal. **100**, (1991), 87–109.
- R. Coifman and Y. Meyer,*Commutateurs d'intgrales singulires et oprateurs multilinaires,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **28** (1978), no. 3, xi, 177–202.
- R. Coifman and Y. Meyer, *Au del des oprateurs pseudo-diffrentiels,* Astrisque, **57**. Socit Mathmatique de France, Paris, 1978.

- E. Fabes, C. Kenig, and R. Serapioni, *The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations,* Comm. Partial Differential Equations 7 (1982), no. 1, 77116.
- C. Fefferman, *L^p bounds for pseudo-differential operators,* Israel J. Math. **14** (1973), 413–417.
- B. Franchi, G. Lu and R. Wheeden, *Representation formulas and weighted Poincaré inequalities for Hörmander vector fields*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **45** (1995), no. 2, 577–604.
- L. Grafakos and R. H. Torres, *Multilinear Calderón-Zygmund theory*, Adv. in Math. **165** (2002), 124–164.
- E. Harboure, O. Salinas, B. Viviani, *Boundedness of the fractional integral on weighted Lebesgue and Lipschitz spaces,*Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), no. 1, 235255.
- L. Hörmander, *Pseudo-differential operators,* Comm. Pure Appl. Math. **18**, 1965, 501–517.

Referencias (cont.)

- L. Hörmander, *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations*. Singular integrals (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. X, Chicago, Ill., 1966), pp. 138–183. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967.
- T. Kato and G. Ponce, *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math., **41**, (1988), 891–907.
- C. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 527–620.
- C. Kenig and W. Staubach, Ψ*-pseudodifferential operators and estimates for maximal oscillatory integrals,* Studia Math. **183** (2007), no. 3, 249–258.
- C. Kenig and E. Stein, *Multilinear estimates and fractional integration,* Math. Res. Lett. **6** (1999), no. 1, 1–15.

- J. J. Kohn and L. Nirenberg, *An algebra of pseudo-differential operators*. Comm. Pure Appl. Math. **18**, 1965, 269–305.
- G. Lu, *Weighted Poincaré and Sobolev inequalities for vector fields satisfying Hörmander's condition and applications*, Rev. Mat. Iberoamericana, **8 (3)**, (1992), 367–439.
- G. Lu and R. Wheeden, *An optimal representation formula for Carnot-Carathéodory vector fields*, Bull. Lond. Math. Soc. **30**, (1998), 578–584.
- D. Maldonado, K. Moen, and V. Naibo, *Weighted multilinear Poincar inequalities for vector fields of Hrmander type,* to appear in Indiana Univ. Math. J.
- D. Maldonado and V. Naibo, *Weighted norm inequalities for paraproducts and bilinear pseudodifferential operators with mild regularity,* J. Fourier Anal. Appl. **15** (2009), no. 2, 218–261.
- S. G. Mihlin, *On the multipliers of Fourier integrals*. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **109** (1956), 701–703.

Referencias (cont.)

- K. Moen *Weighted inequalities for multilinear fractional integral operators*, Collect. Math., **60**, 2 (2009), 213–238.
- B. Muckenhoupt and R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 261–274.
- C. Pérez and R. Wheeden, *Uncertainty principle estimates for vector fields*, J. Funct. Anal. **181**, (2001), 146–188.
- G. Pradolini, *Weighted inequalities and pointwise estimates for the multilinear fractional integral and maximal operators,* J. Math. Anal. Appl. 367 (2010), no. 2, 640656.
- E. Sawyer, *A characterization of a two-weight norm inequality for fractional and poisson integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., **308**, No. 2. (1988), 533–545.
- S. Wainger, *Special trigonometric series in k-dimensions*. Mem. Amer. Math. Soc. No. **59**, 1965, 102 pp.

- E. Sawyer and R. Wheeden, *Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces*, Amer. J. Math., **114** (1992), 813–874.