Operadores Elípticos en el Espacio de Energía

Marisa Toschi

IMAL- Sante Fe

Seminario del IMAL ”Carlos Segovia Fernandez”

15 de Abril 2011

Esquema general

Esquema general

Presentación del problema

Dadas f y g sobre Ω, consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_{tt}u + Au = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ u(\cdot, 0) = f & \text{en } \Omega \\ \partial_t u(\cdot, 0) = g & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde A es un operador elíptico de segundo orden, simétrico, definido en $C_0^\infty(\Omega)$.

El problema estará bien planteado si podemos elegir una extensión autoadjunta de A en el espacio de Hilbert asociado H.

- A esencialmente autoadjunto
- Dando condiciones de borde extras

Presentación del problema

- Eligiendo la extensión de Friedrich la solución tiene energía finita.
- Si la solución tiene energía finita, no es suficiente para que el problema esté bien planteado.

Gamboa, Sanmartino y Tchamitchian (2010) caracterizan cuándo existe una única extensión autoadjunta de A con dominio incluído en el espacio de energía.

Esquema general

Presentación del problema

Sea $\Omega = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, y

$$A = -\frac{1}{m} \operatorname{div} M \nabla$$

- (H1) Para todo $(x, z) \in \Omega$, $m(x, z) > 0$ y $M(x, z) = M(x, z)^t > 0$
- (H2) $m \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$ y supongamos que para todo compacto $K \subset \Omega$, existen constantes positivas a_K y b_K tales que $a_K \leq m(x, z) \leq b_K$ para casi todo $x \in K$
- (H3) $m_{ij} \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$, continuas y $\dfrac{1}{m_{ij}} \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Presentación del problema

Definimos:

- El espacio de Hilbert

$$H := \{\varphi \in L^1_{loc}(\Omega) : \|\varphi\|^2_H := \int_\Omega |\varphi(x,z)|^2 m(x,z) d\mu < \infty\},$$

- El espacio energía

$$\mathcal{E} := \{\varphi \in H : D^\alpha \varphi \in L^1_{loc} \text{ y } b(\varphi,\varphi) < \infty\},$$

$$b(\varphi,\varphi) := \int_\Omega M(x,z)\, \nabla\, \varphi(x,z) \cdot \nabla\, \varphi(x,z)\, d\mu$$

$$\|\varphi\|^2_{\mathcal{E}} := b(\varphi,\varphi) + \|\varphi\|^2_H.$$

Presentación del problema

Entonces:

- A está bien definido con $D(A) = C_0^\infty(\Omega)$ denso en H, y A simétrico en H (por (H1) y (H2))

- Sea

$$C_c^\infty(\Omega) := \{f : \text{ existe } g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ tal que } f = g|_\Omega\}.$$

  Luego $\mathcal{E}$ es Banach y $C_c^\infty(\Omega) \subset \mathcal{E}$ (por (H2) y (H3))

- Pedimos además: (H4) $C_c^\infty(\Omega)$ denso en $\mathcal{E}$

Una alternativa:*awpp*

¿Cuándo existe una única extensión autoadjunta de A con dominio contenido en el espacio energía $\mathcal{E}$? (*awpp*).

Una alternativa:*awpp*

¿Cuándo existe una única extensión autoadjunta de A con dominio contenido en el espacio energía $\mathcal{E}$? (*awpp*).

Teorema

- 1) A tiene la propiedad *awpp* $\Rightarrow$ para todo $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ con $\mu(\Gamma) \neq 0$ se tiene
$$\int_0^1 \int_\Gamma \frac{1}{m_{n+1,n+1}(x,z)} dx\, dz = \infty.$$
- 2) Si para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe una bola abierta $B \supset x$ tal que
$$\int_0^1 \frac{1}{\omega_B(z)} dz = \infty,$$
donde $\omega_B(z) = \int_B m_{n+1,n+1}(y,z)dy$, entonces A tiene la propiedad *awpp*.

Una alternativa:*awpp*

Dem: Recordemos que $\mathcal{E} = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\mathcal{E}}$ y sea $\mathcal{E}_0 := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\mathcal{E}}$

A tiene la propiedad *awpp* si y sólo si $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$.

- 1) Supongamos que existe un conjunto Γ en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\int_0^1 \int_\Gamma \frac{1}{m_{n+1,n+1}(x,z)} dx\, dz < \infty.$$

Una alternativa:*awpp*

Dem: Recordemos que $\mathcal{E} = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\mathcal{E}}$ y sea $\mathcal{E}_0 := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\mathcal{E}}$

A tiene la propiedad *awpp* si y sólo si $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$.

- 1) Supongamos que existe un conjunto Γ en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\int_0^1 \int_\Gamma \frac{1}{m_{n+1,n+1}(x,z)} dx\, dz < \infty.$$

Sea $\eta \in C_c^\infty(0, 1/2)$ y $\eta = 1$ en un entorno de 0. Para $\varphi \in \mathcal{E}$,

$$\lambda(\varphi) := \int_0^1 \int_\Gamma \partial_z(\varphi(x,z)\,\eta(z))\, dx\, dz$$

Una alternativa:*awpp*

Dem: Recordemos que $\mathcal{E} = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\mathcal{E}}$ y sea $\mathcal{E}_0 := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\mathcal{E}}$

A tiene la propiedad *awpp* si y sólo si $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$.

- 1) Supongamos que existe un conjunto Γ en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\int_0^1 \int_\Gamma \frac{1}{m_{n+1,n+1}(x,z)} dx\, dz < \infty.$$

Sea $\eta \in C_c^\infty(0,1/2)$ y $\eta = 1$ en un entorno de 0. Para $\varphi \in \mathcal{E}$,

$$\lambda(\varphi) := \int_0^1 \int_\Gamma \partial_z(\varphi(x,z)\,\eta(z))\, dx\, dz = -\int_\Gamma \varphi(x,0)\, dx.$$

Entonces $\lambda(\varphi) = 0$ en $\mathcal{E}_0$ pero $\lambda \neq 0$.

Una alternativa:*awpp*

- 2) Supongamos que $\mathcal{E} \neq \mathcal{E}_0$, entonces $\exists \lambda \in \mathcal{E}'$ tal que $\lambda = 0$ en $\mathcal{E}_0$ y una función $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\lambda(\varphi) \neq 0$.

• Primer paso: Probar que

$$\int_0^1 \frac{1}{\omega_B(z)}\, dz < \infty$$

para toda bola $B \supset$ sop$\varphi(\cdot, 0)$

• Segundo paso: Encontrar x tal que

$$\int_0^1 \frac{1}{\omega_B(z)}\, dz < \infty$$

para toda bola $B \supset x$.

Esquema general

Extensión a otro tipo de dominios

Pudimos dar resultados análogos en dos clases de dominios

1. $\Omega_\gamma := \{(x,z) : x \in \mathbb{R}^n, z > \gamma(x)\}$ con $\gamma \in \mathcal{C}^\infty$.
2. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio acotado con $\Omega \in \mathcal{C}^1$.

Extensión a Ω_γ

Sea

$$A = -\frac{1}{m}\,\text{div}\, M\,\nabla$$

definido en $C_0^\infty(\Omega_\gamma)$ con $\gamma \in \mathcal{C}^\infty$.

Sea

- $\phi : \Omega \to \Omega_\gamma$ dada por $\phi(y, w) = (y, w + \gamma(y)) = (x, z)$
- $\psi = \phi^{-1} : \Omega_\gamma \to \Omega$ dada por $\psi(x, z) = (x, z - \gamma(x)) = (y, w)$,

Luego,

$$[D\psi] = \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & & . \\ & & I & & . \\ & & & & 0 \\ -\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} & . & . & -\frac{\partial\gamma}{\partial x_n} & 1 \end{pmatrix},$$

donde I es la matriz identidad de $n \times n$.

Extensión a Ω_γ

Definimos en $\Omega = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$

$$\tilde{A} := -\frac{1}{\tilde{m}} \operatorname{div} \tilde{M} \nabla,$$

donde:

- $\tilde{m}(y, w) := (m \circ \phi)(y, w) = m(x, z)$
- $\tilde{M}(y, w) := [D\psi](x, z) M(x, z) [D\psi]^T (x, z)$.

ψ define una isometría entre $\tilde{H}$ y H_γ y entre $\tilde{\mathcal{E}}$ y $\mathcal{E}_\gamma$.

Existe una biyeccion entre los espacios $C_0^\infty(\Omega_\gamma)$ y $C_0^\infty(\Omega)$.

Extensión a Ω_γ

Teorema

- 1) A tiene la propiedad awpp $\Rightarrow$ para todo $D \subset \mathbb{R}^n$ con $\mu(D) \neq 0$ se tiene
$$\int_D \int_{\gamma(x)}^{\gamma(x)+1} \frac{1}{m_{n+1,n+1}(x,z)} dz\, dx = \infty.$$
- 2) Si para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe una bola abierta $B \supset x$ tal que
$$\int_0^1 \frac{1}{\omega_B(z)} dz = \infty,$$
donde $\omega_B(z) = \int_B (\Gamma M \Gamma^T)(s, z+\gamma(s))ds$ con $\Gamma = (-\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}, .., -\frac{\partial \gamma}{\partial x_n}, 1)$, entonces A tiene la propiedad awpp.

Extensión a Ω un dominio C^1

Teorema

- A tiene la propiedad *awpp* $\Rightarrow$ para cualquier conjunto U_δ de la forma

$$U_\delta := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} = (x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_{n+1}) \in D \subset \mathbb{R}^n$$
$$\text{y } \gamma(\mathbf{x}) < x_i < \gamma(\mathbf{x}) + \delta\},$$

donde $\delta > 0$ tal que $U_\delta \subset \Omega$, $1 \leq i \leq n+1$ fijo y $\gamma : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función que parametriza localmente el borde de Ω, se tiene

$$\int_{U_\delta} \frac{1}{m_{i,i}(x)}\, d\mu = \infty.$$

Extensión a Ω un dominio C^1

Teorema

- Supongamos que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $(\mathbf{x}, \gamma_k(\mathbf{x})) \in \partial\Omega$ existe una bola $B \subset D_k$ que contiene a $\mathbf{x}$ tal que

$$\int_0^{\epsilon} \frac{1}{\omega_B(t)} dt = \infty,$$

donde

$$\omega_B(t) = \int_B (\Gamma M \Gamma^T)(\mathbf{x}, t + \gamma_k(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x},$$

con $\Gamma = (-\frac{\partial\gamma}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial\gamma}{\partial x_{i-1}}, 1, -\frac{\partial\gamma}{\partial x_{i+1}}, \ldots, -\frac{\partial\gamma}{\partial x_{n+1}})$ y $0 < t < \epsilon$, donde γ_k, D_k y x_i corresponden al elemento V_k del cubrimiento de Ω. Bajo estas hipótesis A tiene la propiedad *awpp*.

Condición más fuerte sobre la matriz M

Existen condiciones sobre la matriz M que aseguran que A cumple la *awpp*: Tomando

$$\omega_B(t) = \int_B m_{max}(\mathbf{x}, t + \gamma_k(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x},$$

donde $m_{max}(x) := \max_{1\leq i,j\leq n+1} m_{i,j}(x)$.

Esquema general

Aplicación en espacios de Sobolev con pesos

Consideremos el espacio de Sobolev

$$W^{1,2}_{\omega}(\Omega) := \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : \ D^{\alpha} f \in L^2_{\omega}(\Omega) \ \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq 1\}$$

y sea

- $A = -\frac{1}{m} \operatorname{div} M \nabla$
- M diagonal con $m_{i,i} = \omega$
- $m = \omega$.

Aplicación en espacios de Sobolev con pesos

Consideremos el espacio de Sobolev

$$W^{1,2}_{\omega}(\Omega) := \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : \; D^{\alpha} f \in L^2_{\omega}(\Omega) \; \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq 1\}$$

y sea

- $A = -\frac{1}{m} \operatorname{div} M \, \nabla$
- M diagonal con $m_{i,i} = \omega$
- $m = \omega$.

Entonces

$$\mathcal{E} = W^{1,2}_{\omega}(\Omega) \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_0 = W^{1,2}_{\omega,0}(\Omega).$$

Aplicación con $\omega \in A_2(\mathbb{R}^{n+1})$

Teorema

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $\Omega \in \mathcal{C}^1$. Si $\omega \in A_2(\mathbb{R}^{n+1})$ y continua en Ω, entonces

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)} \subsetneq W_\omega^{1,2}(\Omega).$$

Aplicación con $\omega \in A_2(\mathbb{R}^{n+1})$

Teorema

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $\Omega \in \mathcal{C}^1$. Si $\omega \in A_2(\mathbb{R}^{n+1})$ y continua en Ω, entonces

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)} \subsetneq W_\omega^{1,2}(\Omega).$$

Idea de Dem:

- $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $W_\omega^{1,2}(\Omega)$ [Chua (1992)]
- $\omega \in A_2(\mathbb{R}^{n+1}) \Rightarrow \omega \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$
- Pero $\dfrac{1}{\omega} \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$.

Aplicación con $\omega = d(x)^a$

Teorema

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $\Omega \in \mathcal{C}^1$. Entonces

- 1) $\overline{C_0^\infty(\Omega)} \subsetneq W^{1,2}_{d^a}(\Omega)$, para $-1 < a < 1$.
- 2) $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = W^{1,2}_{d^a}(\Omega)$, para $a \geq 1$.

Aplicación con $\omega = d(x)^a$

Teorema

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $\Omega \in \mathcal{C}^1$. Entonces

- 1) $\overline{C_0^\infty(\Omega)} \subsetneq W^{1,2}_{d^a}(\Omega)$, para $-1 < a < 1$.
- 2) $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = W^{1,2}_{d^a}(\Omega)$, para $a \geq 1$.

Dem: 1) Si $-1 < a < 1 \Longrightarrow d^a \in A_2(\mathbb{R}^{n+1})$.

Aplicación con $\omega = d(x)^a$

Teorema

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $\Omega \in \mathcal{C}^1$. Entonces

- 1) $\overline{C_0^\infty(\Omega)} \subsetneq W^{1,2}_{d^a}(\Omega)$, para $-1 < a < 1$.
- 2) $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = W^{1,2}_{d^a}(\Omega)$, para $a \geq 1$.

Dem: 2) Analizemos

$$\int_0^\epsilon \frac{1}{\omega_B(t)} dt,$$

donde $\omega_B(t) = \int_B m_{max}(\mathbf{x}, t + \gamma_k(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}$ y $m_{max}(x) = d(x)^a$.
Si $X_0 = (\mathbf{x}, \gamma_k(\mathbf{x}))$,

$$d^a(\mathbf{x}, t + \gamma_k(\mathbf{x})) \leq |(\mathbf{x}, t + \gamma_k(\mathbf{x})) - X_0|^a = |t|^a.$$

Entonces,

$$\omega_B(t) \leq \int_B |t|^a\, d\mathbf{x} = C\, |t|^a.$$

Aplicación con $\omega = d(x)^a$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\epsilon} \frac{1}{\omega_B(t)} dt \geq \int_0^{\epsilon} \frac{1}{|t|^a} dt = \infty$$

para $a \geq 1$, es decir $\overline{C_0^{\infty}(\Omega)} = W_{d^a}^{1,2}(\Omega)$.