Seminario IMAL

Uso de geometría para estudiar lógica infinitovaluada de Łukasiewicz

Manuela Busaniche. Basado en un trabajo conjunto con D. Mundici

Cálculo Proposicional de Łukasiewicz

Cálculo Proposicional de Łukasiewicz

$$\mathcal{L} : \{x, |, \to, \neg, (,)\}$$

Cálculo Proposicional de Łukasiewicz

$$\mathcal{L} : \{x, |, \rightarrow, \neg, (\, ,\,)\}$$

Fórmulas: Son listas finitas de elementos de $\mathcal{L}$ que se obtienen aplicando las siguientes reglas:

$$\mathcal{L} : \{x, |, \to, \neg, (\,,\,)\}$$

Fórmulas: Son listas finitas de elementos de $\mathcal{L}$ que se obtienen aplicando las siguientes reglas:

1. Las variables proposicionales son fórmulas.

Cálculo Proposicional de Łukasiewicz

$$\mathcal{L} : \{x, |, \rightarrow, \neg, (\,,\,)\}$$

Fórmulas: Son listas finitas de elementos de $\mathcal{L}$ que se obtienen aplicando las siguientes reglas:

1. Las variables proposicionales son fórmulas.
2. Si ϕ y ψ son fórmulas, entonces $\neg\phi$ es fórmula y $(\phi \rightarrow \psi)$ es fórmula.

Cálculo Proposicional de Łukasiewicz

$$\mathcal{L} : \{x, |, \rightarrow, \neg, (\, , \,)\}$$

Fórmulas: Son listas finitas de elementos de $\mathcal{L}$ que se obtienen aplicando las siguientes reglas:

1. Las variables proposicionales son fórmulas.
2. Si ϕ y ψ son fórmulas, entonces $\neg\phi$ es fórmula y $(\phi \rightarrow \psi)$ es fórmula.
3. Una fórmula se obtiene aplicando un número finito de veces las reglas anteriores.

Axiomas y reglas de deducción

Axiomas y reglas de deducción

- (Ł1) $\phi \to (\psi \to \phi)$

Axiomas y reglas de deducción

- (Ł1) $\phi \to (\psi \to \phi)$
- (Ł2) $(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$

Axiomas y reglas de deducción

- (Ł1) $\phi \to (\psi \to \phi)$
- (Ł2) $(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$
- (Ł3) $(\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi)$

Axiomas y reglas de deducción

- (Ł1) $\phi \to (\psi \to \phi)$
- (Ł2) $(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$
- (Ł3) $(\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi)$
- (Ł4) $\phi \to (\psi \to \phi)$

Axiomas y reglas de deducción

- (Ł1) $\phi \to (\psi \to \phi)$
- (Ł2) $(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$
- (Ł3) $(\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi)$
- (Ł4) $\phi \to (\psi \to \phi)$

La regla de deducción es MP: ψ se deduce de ϕ y $\phi \to \psi$.

Teorías Primas

Teorías Primas

Una teoría prima (o completa) Δ en Ł es un conjunto de fórmulas de Ł que satisface:

Teorías Primas

Una teoría prima (o completa) Δ en Ł es un conjunto de fórmulas de Ł que satisface:

- Todas las fórmulas demostrables están en Δ,
- Δ es cerrada por modus ponens,
- $\phi, \psi \in \mathit{Form}(\text{Ł})$, entonces o $\phi \to \psi \in \Delta$ o $\psi \to \phi \in \Delta$.

Teorías Primas

Una teoría prima (o completa) Δ en Ł es un conjunto de fórmulas de Ł que satisface:

- Todas las fórmulas demostrables están en Δ,
- Δ es cerrada por modus ponens,
- $\phi, \psi \in Form(\text{Ł})$, entonces o $\phi \rightarrow \psi \in \Delta$ o $\psi \rightarrow \phi \in \Delta$.

Dado un conjunto $X \subseteq Var$ una teoría Δ se llama teoría sobre $\mathcal{L}_X$ si para todo $\phi \in \Delta$, $var(\phi) \subseteq X$.

Propiedad de consistencia de Robinson

Sean $X, Y, X \cap Y \neq \varnothing, \quad \mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y$. Si

$$\Delta \in Prime(\mathcal{L}_X) \qquad \Psi \in Prime(\mathcal{L}_Y)$$

tales que

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma & \\ \cap\mathcal{L}_{X\cap Y} \nearrow & & \nwarrow \cap\mathcal{L}_{X\cap Y} \\ \Delta & & \Psi \end{array}$$

Entonces existe $\Phi \in Prime(\mathcal{L}_{X\cup Y})$ tal que

$$\begin{array}{ccc} \Delta & & \Psi \\ \cap\mathcal{L}_X \nwarrow & & \nearrow \cap\mathcal{L}_Y \\ & \Phi & \end{array}$$

Valuaciones

Una valuación es una función $v : Form(Ł) \to [0,1]$ que satisface que para toda $\phi, \psi \in Form(Ł)$

$$v(\phi \to \psi) = min(1, 1 - v(\phi) + v(\psi))$$

$$v(\neg\phi) = 1 - v(\phi)$$

Puedo definir en $[0,1]^2$ la función binaria $x \Rightarrow y = min(1, 1 - x + y)$ y entonces pido

$$v(\phi \to \psi) = v(\phi) \Rightarrow v(\psi).$$

Representación de McNaughton

Sea $\phi \in Form$ tal que $var(\phi) = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$. Luego la asignación

$$\phi \mapsto \bar{\phi}$$

tal que

$$x_i \mapsto \pi_i$$

si

$$\phi = \psi \to \chi \quad \text{entonces} \quad \bar{\phi} = \bar{\psi} \Rightarrow \bar{\chi}$$

y si

$$\phi = \neg\psi \quad \text{entonces} \quad \bar{\phi} = 1 - \bar{\psi}$$

es un mapeo de

$$Form(\mathcal{L}_X) \quad \mapsto \quad \{f : [0,1]^n \to [0,1]\}.$$

Funciones de McNaughton

Una función de McNaughton en n variables es una función $f : [0, 1]^n \to [0, 1]$ que satisface:

Funciones de McNaughton

Una función de McNaughton en n variables es una función $f : [0,1]^n \to [0,1]$ que satisface:

- f es continua

Funciones de McNaughton

Una función de McNaughton en n variables es una función $f : [0,1]^n \to [0,1]$ que satisface:

- f es continua
- f es lineal a trozos

Funciones de McNaughton

Una función de McNaughton en n variables es una función $f : [0,1]^n \to [0,1]$ que satisface:

- f es continua
- f es lineal a trozos
- cada trozo lineal tiene coeficientes enteros

Representación

Sea X un conjunto de variables de cardinal n. Para cada $\phi \in Form(\mathcal{L}_X)$ $\overline{\phi}$, es una función de McNaughton de n variables y para cada función de McNaughton f de n variables existe $\phi \in Form(\mathcal{L}_X)$ tal que $f = \overline{\phi}$.

Conectivos en el álgebra $[0, 1]$

MV=$([0,1], \oplus, \neg, 0)$

$$x \oplus y = min(x + y, 1) \qquad\qquad \neg x = 1 - x.$$

Observemos que

$$x \Rightarrow y = \neg x \oplus y$$

y

$$x \oplus y = \neg x \Rightarrow y$$

Conectivos en el álgebra $[0,1]$

MV=$([0,1], \oplus, \neg, 0)$

$$x \oplus y = min(x+y, 1) \qquad \neg x = 1 - x.$$

Observemos que

$$x \Rightarrow y = \neg x \oplus y$$

y

$$x \oplus y = \neg x \Rightarrow y$$

Sea

$$Free_n = \{f : [0,1]^n \to [0,1] : f \text{ es McNaughton}\}$$

Luego considero $(Free_n, \oplus, \neg, 0)$ con $\oplus$ y $\neg$ definidas coordenada a coordenada por

$$f \oplus g = min(f+g, 1) \quad \neg f = 1 - f$$

Conectivos en el álgebra $[0, 1]$

MV=$([0,1], \oplus, \neg, 0)$

$$x \oplus y = min(x + y, 1) \qquad \neg x = 1 - x.$$

Observemos que

$$x \Rightarrow y = \neg x \oplus y$$

y

$$x \oplus y = \neg x \Rightarrow y$$

Sea

$$Free_n = \{f : [0,1]^n \to [0,1] : f \text{ es McNaughton}\}$$

Luego considero $(Free_n, \oplus, \neg, 0)$ con $\oplus$ y $\neg$ definidas coordenada a coordenada por

$$f \oplus g = min(f + g, 1) \quad \neg f = 1 - f$$

Ideales primos

Un ideal primo I de $Free_n$ es un subconjunto no vacío de $Free_n$ que satisface:

- $f \in I$ y $g \leq f$, entonces $g \in I$,
- $f, g \in I$, entonces $f \oplus g \in I$,
- si $f \wedge g \in I$, entonces o $f \in I$ o $g \in I$.

Ideales primos

Un ideal primo I de $Free_n$ es un subconjunto no vacío de $Free_n$ que satisface:

- $f \in I$ y $g \leq f$, entonces $g \in I$,
- $f, g \in I$, entonces $f \oplus g \in I$,
- si $f \wedge g \in I$, entonces o $f \in I$ o $g \in I$.

Ideales primos

Un ideal primo I de $Free_n$ es un subconjunto no vacío de $Free_n$ que satisface:

- $f \in I$ y $g \leq f$, entonces $g \in I$,
- $f, g \in I$, entonces $f \oplus g \in I$,
- si $f \wedge g \in I$, entonces o $f \in I$ o $g \in I$.

Ideales primos

Un ideal primo I de $Free_n$ es un subconjunto no vacío de $Free_n$ que satisface:

- $f \in I$ y $g \leq f$, entonces $g \in I$,
- $f, g \in I$, entonces $f \oplus g \in I$,
- si $f \wedge g \in I$, entonces o $f \in I$ o $g \in I$.

Ideales primos

Un ideal primo I de $Free_n$ es un subconjunto no vacío de $Free_n$ que satisface:

- $f \in I$ y $g \leq f$, entonces $g \in I$,
- $f, g \in I$, entonces $f \oplus g \in I$,
- si $f \wedge g \in I$, entonces o $f \in I$ o $g \in I$.

Teorías primas sobre $\mathcal{L}_X \Leftrightarrow$ ideales primos de $Free_n(X)$

Si $I \in Prime(Free_n(X))$ y $J \in Prime(Free_m(Y))$,

tales que

$$\begin{tikzcd}
 & K & \\
I \arrow[ur, "F_{X\cap Y}"] & & J \arrow[ul, "F_{X\cap Y}"']
\end{tikzcd}$$

Luego existe $A \in Prime(Free(X \cup Y))$ tal que

$$\begin{tikzcd}
I & & J \\
 & A \arrow[ul, "F_X"] \arrow[ur, "F_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

Formulación algebraica de RJC

Si $I \in Prime(Free_n(X))$ y $J \in Prime(Free_m(Y))$, tales que

$$\begin{array}{ccccc} & & K & & \\ F_{X\cap Y} & \nearrow & & \nwarrow & F_{X\cap Y} \\ I & & & & J \end{array}$$

Luego existe $A \in Prime(Free(X \cup Y))$ tal que

$$\begin{array}{ccccc} I & & & & J \\ F_X & \nwarrow & & \nearrow & F_Y \\ & & A & & \end{array}$$

Formulación algebraica de RJC

Si $I \in Prime(Free_n(X))$ y $J \in Prime(Free_m(Y))$, tales que

$$\begin{tikzcd} & K & \\ I \arrow[ur, "F_{X\cap Y}"] & & J \arrow[ul, "F_{X\cap Y}"'] \end{tikzcd}$$

Luego existe $A \in Prime(Free(X \cup Y))$ tal que

$$\begin{tikzcd} I & & J \\ & A \arrow[ul, "F_X"] \arrow[ur, "F_Y"'] & \end{tikzcd}$$

Estudio de ideales

Sea $S \subseteq [0,1]^n$ no vacío. Consideremos

$$J_S = \{f \in Free_n(X) : f(x) = 0 \ \forall x \in S\}$$

Estudio de ideales

Sea $S \subseteq [0,1]^n$ no vacío. Consideremos

$$J_S = \{f \in Free_n(X) : f(x) = 0 \ \forall x \in S\}$$

J_S es un ideal.

Sea $S \subseteq [0,1]^n$ no vacío. Consideremos

$$J_S = \{f \in Free_n(X) : f(x) = 0 \ \forall x \in S\}$$

J_S es un ideal. En efecto:

Estudio de ideales

Sea $S \subseteq [0,1]^n$ no vacío. Consideremos

$$J_S = \{f \in Free_n(X) : f(x) = 0 \ \forall x \in S\}$$

J_S es un ideal. En efecto:

1. $f = 0 \in J_S$,

Estudio de ideales

Sea $S \subseteq [0,1]^n$ no vacío. Consideremos

$$J_S = \{f \in Free_n(X) : f(x) = 0 \ \forall x \in S\}$$

J_S es un ideal. En efecto:

1. $f = 0 \in J_S$,
2. Si $f, g \in J_S$, entonces $f \oplus g \in J_S$,

Estudio de ideales

Sea $S \subseteq [0, 1]^n$ no vacío. Consideremos

$$J_S = \{f \in Free_n(X) : f(x) = 0 \ \forall x \in S\}$$

J_S es un ideal. En efecto:

1. $f = 0 \in J_S$,
2. Si $f, g \in J_S$, entonces $f \oplus g \in J_S$,
3. Si $f \in J_S$ y $g \leq f$, entonces $g \in J_S$.

Estudio de ideales

Sea $S \subseteq [0,1]^n$ no vacío. Consideremos

$$J_S = \{f \in Free_n(X) : f(x) = 0 \ \forall x \in S\}$$

J_S es un ideal. En efecto:

1. $f = 0 \in J_S$,
2. Si $f, g \in J_S$, entonces $f \oplus g \in J_S$,
3. Si $f \in J_S$ y $g \leq f$, entonces $g \in J_S$.

Ahora...

Estudio de ideales

Sea $S \subseteq [0,1]^n$ no vacío. Consideremos

$$J_S = \{f \in Free_n(X) : f(x) = 0 \ \forall x \in S\}$$

J_S es un ideal. En efecto:

1. $f = 0 \in J_S$,
2. Si $f, g \in J_S$, entonces $f \oplus g \in J_S$,
3. Si $f \in J_S$ y $g \leq f$, entonces $g \in J_S$.

Ahora... Cuándo es J_S primo?

Trabajemos en $[0,1]$.

$$f(x) = \begin{cases} -3x+1 & \text{si } x \leq \dfrac{1}{3}, \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x \geq \dfrac{2}{3}, \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Trabajemos en $[0,1]$.

$$f(x) = \begin{cases} -3x+1 & \text{si } x \leq \dfrac{1}{3}, \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x \geq \dfrac{2}{3}, \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Sea $S = (\frac{1}{5}, \frac{9}{5}]$.

Trabajemos en $[0,1]$.

$$f(x) = \begin{cases} -3x+1 & \text{si } x \leq \frac{1}{3}, \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x \geq \frac{2}{3}, \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Sea $S = (\frac{1}{5}, \frac{9}{5}]$. Luego $f \wedge g = 0$ está en J_S, pero $f \notin J_S$ y $g \notin J_S$.

Triangulaciones unimodulares

Triangulaciones unimodulares

Para cada simplex n-dimensional $S \subseteq [0,1]^n$ con vértices racionales sea

1. $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ los vértices de S
2. $1 \leq d_i$=denominador común menor de los índices de $\bar{v}_i$
3. $v_{i,j}$ los únicos enteros que satisfacen

$$\bar{v}_i = (v_{i,0}/d_i, \ldots v_{i,n-1}/d_i)$$

   tales que $gcd(v_{i,0}, \ldots v_{i,n-1}, d_i) = 1$

4. $$\bar{v}_i^{hom} = (v_{i,0}, \ldots v_{i,n-1}, d_i)$$
5. $\mathcal{M}_S$ la matriz de $(n+1) \times (n+1)$ cuya i-ésima fila es $\bar{v}_i^{hom}$.

Triangulaciones unimodulares

Un simplex S se llama unimodular si $det(\mathcal{M}_S) = 1$.

Triangulaciones unimodulares

Un simplex S se llama unimodular si $det(\mathcal{M}_S) = 1$.

Una triangulación de $[0, 1]^n$ se llama unimodular si todos los simplexes (racionales) de la triangulación son unimodulares.

Triangulaciones unimodulares

Un simplex S se llama unimodular si $det(\mathcal{M}_S) = 1$.

Una triangulación de $[0, 1]^n$ se llama unimodular si todos los simplexes (racionales) de la triangulación son unimodulares.

Sea $f \in Free_n(X)$ y sean $p_1, \dots, p_k$ sus componentes lineales. Luego existe una triangulación unimodular $\mathcal{T}$ de $[0, 1]^n$ tal que para cada simplex $S \in \mathcal{T}$, $f = p_j$ en S.

Triangulaciones unimodulares

Un simplex S se llama unimodular si $det(\mathcal{M}_S) = 1$.

Una triangulación de $[0,1]^n$ se llama unimodular si todos los simplexes (racionales) de la triangulación son unimodulares.

Sea $f \in Free_n(X)$ y sean $p_1, \ldots, p_k$ sus componentes lineales. Luego existe una triangulación unimodular $\mathcal{T}$ de $[0,1]^n$ tal que para cada simplex $S \in \mathcal{T}$, $f = p_j$ en S.

Sea $\mathcal{T}$ una triangulación unimodular en $[0,1]^n$ y sea ν una mapeo desde los vértices de los simplexes en $\mathcal{T}$ en $\{0,1\}$. Luego la única función $f : [0,1]^n \to [0,1]$ que es lineal en cada simplex de $\mathcal{T}$ y que satisface $f(x) = \nu(x)$ para cada vértice x es una función en $Free_n(X)$.

J_S es primo si solo si $S = \{\bar{x}\}$ para $\bar{x} \in [0, 1]^n$.

J_S es primo si solo si $S = \{\bar{x}\}$ para $\bar{x} \in [0,1]^n$.

Pero son estos los únicos ideales primos?

Otros ideales primos

$$u_0 \in [0,1]^n \longmapsto J_{u_0}$$

$$J_{u_0} = \{f \in Free_n : f(u_0) = 0\}$$

Let $u_1 \in \mathbb{R}^n$

$$J_{(u_0,u_1)} = \{f \in Free_n : f([u_0, u_0 + \epsilon u_1)) = 0\}$$

Otros ideales primos

$$u_0 \in [0,1]^n \longmapsto J_{u_0}$$

$$J_{u_0} = \{f \in Free_n : f(u_0) = 0\}$$

Let $u_1 \in \mathbb{R}^n$

$$J_{(u_0,u_1)} = \{f \in Free_n : f([u_0, u_0 + \epsilon u_1)) = 0\}$$

Indices para ideales primos

Un índice para $Free_n$

$$\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_t)$$

- $u_i \in \mathbb{R}^n$, $u_1, \ldots, u_t$ son linealmente independientes
- Para algún $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t > 0$ el simplex

$$T = conv\{u_0, u_0 + \epsilon_1 u_1, u_0 + \epsilon_1 u_1 + \epsilon_2 u_2, \ldots,$$

$$u_0 + \epsilon_1 u_1 + \ldots + \epsilon_t u_t\} \subseteq [0, 1]^n.$$

Cualquier T así dado se llamará **u**-*simplex*.

Ideales Primos

$J_{\mathbf{u}} \subseteq Free_n$ se define como

$$J_{\mathbf{u}} = \{f \in Free_n : f^{-1}(0) \text{ contiene algún } \mathbf{u} - \text{simplex}\}.$$

Problema:

Dado $J \in Prime(Free_n)$ y $1 \leq m < n$. Sea $K \in Prime(Free_m)$ tal que

$$K = Free_m \cap J$$

cuál es la relación entre los índices de J y los índices de K?

Si $J = J_{\mathbf{u}}$, sea

$$\pi(\mathbf{u}) = (\mathbb{P}_m(u_0), \mathbb{P}_m(u_{\iota(1)}), \ldots, \mathbb{P}_m(u_{\iota(r)})).$$

Luego $\pi(\mathbf{u})$ es un índice para $Free_m$ y

$$K = J_{\pi(\mathbf{u})}.$$

Sea $I \in Prime(Free_{n'})$ y $J \in Prime(Free_{n''})$ con

$$1 \leq m \leq n' \qquad 1 \leq m \leq n''$$

$$\begin{tikzcd}
 & K = J_{\pi(\mathbf{u})} = J_{\pi(\mathbf{v})} & \\
I = J_{\mathbf{u}} \arrow[ur, "F_m"] & & J = J_{\mathbf{v}} \arrow[ul, "F_m"']
\end{tikzcd}$$

Entonces existe $\mathbf{e} = (e_0, \ldots e_s)$ para $Free_{(n'+n''-m)}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
I & & J \\
 & J_{\mathbf{e}} \arrow[ul, "F_{n'}"] \arrow[ur, "F_{n''}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$e_i = (\underbrace{\pi(\mathbf{u})_i}_{m\text{–space}} , \underbrace{u_i}_{n'-m\text{–space}} , \underbrace{v_i}_{n''-m\text{–space}})$$

Sea $I \in Prime(Free_{n'})$ y $J \in Prime(Free_{n''})$ con

$$1 \leq m \leq n' \qquad 1 \leq m \leq n''$$

$$\begin{array}{ccc} & K = J_{\pi(\mathbf{u})} = J_{\pi(\mathbf{v})} & \\ F_m \nearrow & & \nwarrow F_m \\ I = J_{\mathbf{u}} & & J = J_{\mathbf{v}} \end{array}$$

Entonces existe $\mathbf{e} = (e_0, \ldots e_s)$ para $Free_{(n'+n''-m)}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} I & & J \\ F_{n'} \nwarrow & & \nearrow F_{n''} \\ & J_{\mathbf{e}} & \end{array}$$

$$e_i = (\underbrace{\pi(\mathbf{u})_i}_{m-\text{space}}, \quad \underbrace{u_i}_{n'-m-\text{space}}, \quad \underbrace{v_i}_{n''-m-\text{space}})$$

Sea $I \in Prime(Free_{n'})$ y $J \in Prime(Free_{n''})$ con

$$1 \le m \le n' \qquad 1 \le m \le n''$$

$$\begin{array}{ccc} & K = J_{\pi(\mathbf{u})} = J_{\pi(\mathbf{v})} & \\ F_m \nearrow & & \nwarrow F_m \\ I = J_{\mathbf{u}} & & J = J_{\mathbf{v}} \end{array}$$

Entonces existe $\mathbf{e} = (e_0, \ldots e_s)$ para $Free_{(n'+n''-m)}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} I & & J \\ F_{n'} \nwarrow & & \nearrow F_{n''} \\ & J_{\mathbf{e}} & \end{array}$$

$$e_i = (\underbrace{\pi(\mathbf{u})_i}_{m\text{–space}}, \underbrace{u_i}_{n'-m\text{–space}}, \underbrace{v_i}_{n''-m\text{–space}})$$

Sea $I \in Prime(Free_{n'})$ y $J \in Prime(Free_{n''})$ con

$$1 \leq m \leq n' \qquad 1 \leq m \leq n''$$

$$\begin{tikzcd}
 & K = J_{\pi(\mathbf{u})} = J_{\pi(\mathbf{v})} & \\
I = J_{\mathbf{u}} \arrow[ur, "F_m"] & & J = J_{\mathbf{v}} \arrow[ul, "F_m"']
\end{tikzcd}$$

Entonces existe $\mathbf{e} = (e_0, \ldots e_s)$ para $Free_{(n'+n''-m)}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
I & & J \\
 & J_{\mathbf{e}} \arrow[ul, "F_{n'}"] \arrow[ur, "F_{n''}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$e_i = (\underbrace{\pi(\mathbf{u})_i}_{m-\text{space}}, \underbrace{u_i}_{n'-m-\text{space}}, \underbrace{v_i}_{n''-m-\text{space}})$$

Sea $I \in Prime(Free_{n'})$ y $J \in Prime(Free_{n''})$ con

$$1 \leq m \leq n' \qquad 1 \leq m \leq n''$$

$$\begin{array}{ccc} & K = J_{\pi(\mathbf{u})} = J_{\pi(\mathbf{v})} & \\ F_m \nearrow & & \nwarrow F_m \\ I = J_{\mathbf{u}} & & J = J_{\mathbf{v}} \end{array}$$

Entonces existe $\mathbf{e} = (e_0, \ldots e_s)$ para $Free_{(n'+n''-m)}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} I & & J \\ F_{n'} \nwarrow & & \nearrow F_{n''} \\ & J_{\mathbf{e}} & \end{array}$$

$$e_i = (\underbrace{\pi(\mathbf{u})_i}_{m-\text{space}}, \underbrace{u_i}_{n'-m-\text{space}}, \underbrace{v_i}_{n''-m-\text{space}})$$

Sea

$$J_{\mathbf{w}} = J \cap Free_m$$

para algún $J \in Prime(Free_n)$. Luego existe un índice

$$\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots u_t)$$

para $Free_n$ tal que

1. $J = J_{\mathbf{u}}$
2. $\pi(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$
3. $\mathbb{P}_m(u_s) = 0$ si $s \notin$ el rango de ι.

- M. Busaniche and D. Mundici, *Geometry of Robinson consistency in Łukasiewicz logic*, Annals of Pure and Applied Logic, 147 (2007), pp. 1-22.
- R. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano, D. Mundici, *Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning*, Kluwer, Dordrecht, 2000.
- C. De Concini, C. Procesi, *Complete symmetric varieties II. Intersection theory*, In: Algebraic groups and related topics (Kyoto/Nagoya, 1983), North Holland, Amsterdam, 1985, pp. 481-513.
- G. Ewald, *Combinatorial, Convexity and Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1996.

Gracias!