Densidades y medidas

Medida packing exacta de conjuntos de Cantor centrales

Ignacio Garcia

Universidad Nacional de Mar del Plata

Trabajo en conjunto con Leandro Zuberman (Universidad de Buenos Aires)

8 de julio de 2011

Medida de Hausdorff

- $E \subset \mathbb{R}^d$, $\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\delta > 0$

  δ-cubrimiento de E: $\{U_i\} \subset \mathcal{U}$, con $E \subset \bigcup_i U_i$ y $|U_i| \leq \delta$

Medida de Hausdorff

- $E \subset \mathbb{R}^d$, $\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\delta > 0$

  δ-cubrimiento de E: $\{U_i\} \subset \mathcal{U}$, con $E \subset \bigcup_i U_i$ y $|U_i| \leq \delta$

- Para $s > 0$,

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es } \delta\text{-cubrimiento de E} \right\}$$

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E) \tag{1}$$

Medida de Hausdorff

- $E \subset \mathbb{R}^d,\ \mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^d),\ \ \delta > 0$

  δ-cubrimiento de E: $\{U_i\} \subset \mathcal{U}$, con $E \subset \bigcup_i U_i$ y $|U_i| \leq \delta$

- Para $s > 0$,

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es } \delta\text{-cubrimiento de E} \right\}$$

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E) \tag{1}$$

- (1) no cambia si
  - $\mathcal{U} = \{convexos\ de\ \mathbb{R}^d\}$
  - $\mathcal{U} = \{cerrados\ de\ \mathbb{R}^d\}$
  - $\mathcal{U} = \{abiertos\ de\ \mathbb{R}^d\}$
- $m_d(A) = c_d \mathcal{H}^d(A),\ \forall\ A \subset \mathbb{R}^d \quad (c_1 = 1,\ c_2 = \pi/4)$

- Ejemplo: En $\mathbb{R}$, $E = [0, 1]$. Dado $\delta > 0$, si $1/n < \delta$

  $\Rightarrow \; \{U_i\}_{i=1}^{n} = \left\{ \left[\frac{(i-1)}{n}, \frac{i}{n} \right] \right\}_{i=1}^{n}$ δ-cubrimiento óptimo

$$\sum_i |U_i|^s = n \frac{1}{n^s} = n^{(1-s)}$$

- Ejemplo: En $\mathbb{R}$, $E = [0,1]$. Dado $\delta > 0$, si $1/n < \delta$

  $\Rightarrow \ \{U_i\}_{i=1}^n = \left\{ \left[\frac{(i-1)}{n}, \frac{i}{n} \right] \right\}_{i=1}^n$ δ-cubrimiento óptimo

$$\sum_i |U_i|^s = n \frac{1}{n^s} = n^{(1-s)}$$

$$\Rightarrow \ \mathcal{H}^s([0,1]) = \begin{cases} 0, & si \ \ s > 1 \\ 1, & si \ \ s = 1 \\ \infty, & si \ \ s < 1 \end{cases}$$

- Ejemplo: En $\mathbb{R}$, $E = [0,1]$. Dado $\delta > 0$, si $1/n < \delta$

  $\Rightarrow \ \{U_i\}_{i=1}^n = \left\{\left[\frac{(i-1)}{n}, \frac{i}{n}\right]\right\}_{i=1}^n$ δ-cubrimiento óptimo

$$\sum_i |U_i|^s = n\frac{1}{n^s} = n^{(1-s)}$$

$$\Rightarrow \ \mathcal{H}^s([0,1]) = \begin{cases} 0, & si \quad s > 1 \\ 1, & si \quad s = 1 \\ \infty, & si \quad s < 1 \end{cases}$$

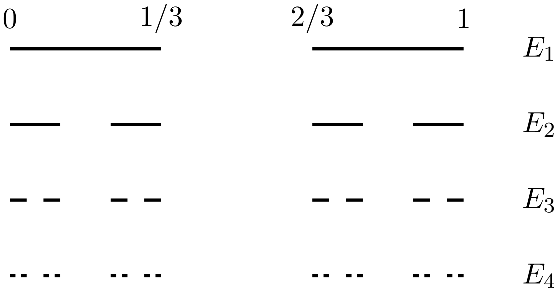
- En general, $E \subset \mathbb{R}^d$, existe un único $0 \leq s_0 \leq d$ tal que

$$\mathcal{H}^s(E) = \begin{cases} 0, & si \ s > s_0 \\ \infty, & si \ s < s_0 \end{cases}$$

Puede ocurrir $\mathcal{H}^{s_0}(E) = 0$ o $\mathcal{H}^{s_0}(E) = \infty$

$\dim_H E := s_0$ es la dimensión de Hausdorff de E

Ejemplo: E conjunto ternario de Cantor



$\mathbf{E} = \bigcap_{\mathbf{n} \geq \mathbf{1}} \mathbf{E_n}$

$$E_n \ \text{ cubre } E \implies \mathcal{H}^s_{3^{-n}}(E) \leq 2^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^s = \left(\frac{2}{3^s}\right)^n$$

$$s = \log_3 2 \implies \mathcal{H}^{\log_3 2}(E) \leq 1$$

De hecho, $\mathcal{H}^{\log_3 2}(E) = 1$

Medida de Hausdorff centrada

- $\mathcal{U}_E = \{Bolas\ centradas\ en\ E\}$

$$C^s(E) := \liminf_{\delta > 0} \left\{ \sum_i |B_i|^s : \{B_i\} \subset \mathcal{U}_E\ \delta\text{-cubrimiento de E} \right\}$$

C^s *no necesariamente es monótona !*

$$\mathcal{C}^s(E) = \sup\{C^s(F) : F \subset E\}$$

Medida de Hausdorff centrada

- $\mathcal{U}_E = \{Bolas\ centradas\ en\ E\}$

$$C^s(E) := \liminf_{\delta>0} \left\{ \sum_i |B_i|^s : \{B_i\} \subset \mathcal{U}_E\ \delta\text{-cubrimiento de E} \right\}$$

C^s *no necesariamente es monótona !*

$$\mathcal{C}^s(E) = \sup\{C^s(F) : F \subset E\}$$

- $\dim_C E = \inf\{s : \mathcal{C}^s(E) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{C}^s(E) = +\infty\}$

Medida de Hausdorff centrada

- $\mathcal{U}_E = \{Bolas\ centradas\ en\ E\}$

$$C^s(E) := \liminf_{\delta>0} \left\{ \sum_i |B_i|^s : \{B_i\} \subset \mathcal{U}_E\ \delta\text{-cubrimiento de E} \right\}$$

C^s *no necesariamente es monótona !*

$$\mathcal{C}^s(E) = \sup\{C^s(F) : F \subset E\}$$

- $\dim_C E = \inf\{s : \mathcal{C}^s(E) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{C}^s(E) = +\infty\}$
- $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{C}^s(E) \leq 2^s \mathcal{H}^s(E)$

$\Longrightarrow \quad \dim_H E = \dim_C E$

Medida packing

$E \subset \mathbb{R}^d$, $t > 0$

- δ-packing de E: $\{B_i\}$ bolas disjuntas centradas en E con $|B_i| < \delta$

$$P_0^t(E) = \lim_{\delta \to 0} \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^t : \{B_i\} \;\; \delta\text{-packing de } E \right\}$$

P_0^t es premedida (no necesariamente σ-subaditiva)

Medida packing

$E \subset \mathbb{R}^d$, $t > 0$

- δ-packing de E: $\{B_i\}$ bolas disjuntas centradas en E con $|B_i| < \delta$

$$P_0^t(E) = \lim_{\delta \to 0} \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^t : \{B_i\} \;\; \delta\text{-packing de } E \right\}$$

  P_0^t es premedida (no necesariamente σ-subaditiva)

- Medida packing t-dimensional:

$$\mathcal{P}^t(E) = \inf \left\{ \sum_i P_0^t(E_i) : E = \cup_i E_i \right\}$$

- $\dim_P E = \inf\{s \; : \; \mathcal{P}^s(E) = 0\} \; = \; \sup\{s \; : \; \mathcal{P}^s(E) = +\infty\}$

$$\mathcal{H}^s(E) \le \mathcal{P}^s(E) \quad \Longrightarrow \quad \dim_H E \le \dim_P E$$

Puede ocurrir $\dim_H E < \dim_P E$

E es regular si $\dim_H E = \dim_P E$

Conjuntos de Cantor centrales

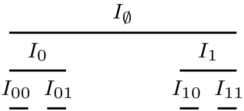
Conjuntos de Cantor centrales

- $D_0 = \emptyset$
  $D_k = \{\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k : \ \sigma_j = 0 \text{ o } 1\} = \{0,1\}^k$
  $D = \cup_k D_k$
- $0 < r_k < 1/2, \quad k \geq 1$

Conjuntos de Cantor centrales

- $D_0 = \emptyset$
  $D_k = \{\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_k : \ \sigma_j = 0 \text{ o } 1\} = \{0,1\}^k$
  $D = \cup_k D_k$

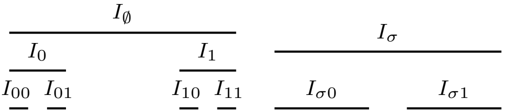
- $0 < r_k < 1/2, \quad k \geq 1$



Conjuntos de Cantor centrales

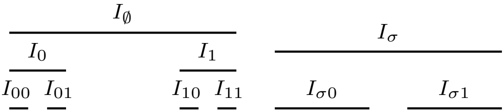
- $D_0 = \emptyset$
  $D_k = \{\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_k : \ \sigma_j = 0 \text{ o } 1\} = \{0,1\}^k$
  $D = \cup_k D_k$

- $0 < r_k < 1/2, \quad k \geq 1$



Conjuntos de Cantor centrales

- $D_0 = \emptyset$
  $D_k = \{\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k : \ \sigma_j = 0 \text{ o } 1\} = \{0,1\}^k$
  $D = \cup_k D_k$
- $0 < r_k < 1/2, \quad k \geq 1$



- $\mathcal{F} = \{I_\sigma : \sigma \in D\}$ intervalos básicos:
  (i) $I_\emptyset = [0,1]$
  (ii) Para $k \geq 1$ y $\sigma \in D_{k-1}$,
  $I_{\sigma 0}$ e I_σ mismo extremo izquierdo
  $I_{\sigma 1}$ e I_σ mismo extremo izquierdo
  (iii) $\frac{|I_{\sigma 0}|}{|I_\sigma|} = \frac{|I_{\sigma 1}|}{|I_\sigma|} = r_k$

- Etapa k: $E_k = \cup_{\sigma \in D_k} I_\sigma$

  Conjunto de Cantor central asociado a $(r_k)_{k \geq 1}$:

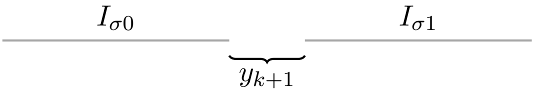
$$E = \cap_{k \geq 1} E_k$$

  E compacto, nunca denso y perfecto

- $r_k = 1/3 \ \forall k \Rightarrow E$ Cantor ternario clásico

- Los intervalos de la etapa k tienen igual longitud
  $s_k := |I_\sigma| = r_1 \cdots r_k$, $\sigma \in D_k$

- $y_{k+1} =$ long. laguna entre $I_{\sigma 0}$ e $I_{\sigma 1}$, $\sigma \in D_k$



Cotas para las medidas de conjuntos centrales

Para $s > 0$ y $t > 0$

$$c_1 \liminf_{n\to\infty} 2^n s_n^s \leq \mathcal{H}^s(E) \leq c_2 \liminf_{n\to\infty} 2^n s_n^s$$

y

$$c_3 \limsup_{n\to\infty} 2^n s_n^t \leq \mathcal{P}^t(E) \leq c_4 \limsup_{n\to\infty} 2^n s_n^t$$

Cotas para las medidas de conjuntos centrales

Para $s > 0$ y $t > 0$

$$c_1 \liminf_{n\to\infty} 2^n s_n^s \leq \mathcal{H}^s(E) \leq c_2 \liminf_{n\to\infty} 2^n s_n^s$$

y

$$c_3 \limsup_{n\to\infty} 2^n s_n^t \leq \mathcal{P}^t(E) \leq c_4 \limsup_{n\to\infty} 2^n s_n^t$$

Luego

$$\dim_H E = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log 2^n}{|\log s_n|} \quad y \quad \dim_P E = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log 2^n}{|\log s_n|}$$

Notar: $r_k \leq \beta \quad \forall\ k \Rightarrow \ \dim_P E \leq \frac{\log 2}{\log \beta^{-1}}$

Teorema (Qu-Rao-Su 03)

Si $(y_k)_{k\geq 1}$ *(longitudes de lagunas) es decreciente, entonces*

$$\mathcal{H}^s(E) = \liminf_{n\to\infty} 2^n s_n^s.$$

Resultados

Condición de separación:

$$(2) \qquad \textit{existe } \beta < \frac{1}{2} \textit{ tal que } r_k \leq \beta \ \ \forall\ k \textit{ suf. grande.}$$

Teorema

Sea E conjunto de Cantor central y asumamos (2). Entonces

$$\mathcal{P}^t(E) = 2^t \limsup_{n\to\infty} 2^n (s_n + y_n)^t = 2^t B_t.$$

Resultados

Condición de separación:

$$(2) \qquad \textit{existe } \beta < \frac{1}{2} \ \textit{ tal que } \ r_k \leq \beta \ \ \forall\ k \textit{ suf. grande.}$$

Teorema

Sea E conjunto de Cantor central y asumamos (2). Entonces

$$\mathcal{P}^t(E) = 2^t \limsup_{n\to\infty} 2^n (s_n + y_n)^t = 2^t B_t.$$

Otros resultados conocidos:

- [Feng Hua Wen 00] E Cantor ternario,
  $t = \log_3 2 \ \Rightarrow \ \mathcal{P}^s(E) = 4^s$
- [Meinershagen 02] Cálculo de $\mathcal{P}^s(E)$ para Cantor *perturbado*: pide E regular y $\dim_P E \leq \log 2/\log(5/2) < 1$
- [Feng 03] Cálculo de $\mathcal{P}^t(E)$ Cantor auto-similar con separación (CCA). En este caso E es regular

La condición de separación (2) no es necesaria

Teorema

Existe un conjunto de Cantor central E tal que $\mathcal{P}^t(E) = 2^t B_t$ y (r_k) tiene una subsucesión que tiende a $1/2$.

La condición de separación (2) no es necesaria

Teorema

Existe un conjunto de Cantor central E tal que $\mathcal{P}^t(E) = 2^t B_t$ y (r_k) tiene una subsucesión que tiende a $1/2$.

Teorema

Dado $0 < t < 1$, existe un conjunto de Cantor central E tal que

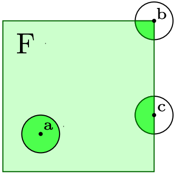
$$\mathcal{P}^t(E) < 2^t \overline{B}_t.$$

Densidades

- $F \subset \mathbb{R}^2$ boreliano
  Densidad de F en x:

$$D_F(x,r) = \frac{\text{área}(F \cap B(x,r))}{\text{área}(B(x,r))} = \frac{\text{área}(F \cap B(x,r))}{\pi r^2}$$

  $D_F(x) = \lim_{r \to 0} D_F(x,r) = 1$ c.t.p. $x \in F$ (Teo. Densidad Lebesgue)



$D_F(\text{a}) = 1$

$D_F(\text{b}) = 1/4$

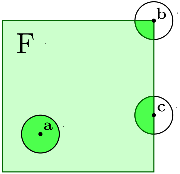
$D_F(\text{c}) = 1/2$

Densidades

- $F \subset \mathbb{R}^2$ boreliano
  Densidad de F en x:

$$D_F(x,r) = \frac{\text{área}(F \cap B(x,r))}{\text{área}(B(x,r))} = \frac{\text{área}(F \cap B(x,r))}{\pi r^2}$$

$D_F(x) = \lim_{r \to 0} D_F(x,r) = 1$ c.t.p. $x \in F$ (Teo. Densidad Lebesgue)



$$D_F(\text{a}) = 1$$

$$D_F(\text{b}) = 1/4$$

$$D_F(\text{c}) = 1/2$$

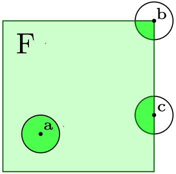
- F curva suave $\Rightarrow$ $\frac{\text{long}(F \cap B(x,r))}{2r} \xrightarrow[r \to 0]{} 1$

Densidades

- $F \subset \mathbb{R}^2$ boreliano
  Densidad de F en x:

  $$D_F(x,r) = \frac{\text{área}(F \cap B(x,r))}{\text{área}(B(x,r))} = \frac{\text{área}(F \cap B(x,r))}{\pi r^2}$$

  $D_F(x) = \lim_{r \to 0} D_F(x,r) = 1$ c.t.p. $x \in F$ (Teo. Densidad Lebesgue)



$D_F(\mathrm{a}) = 1$

$D_F(\mathrm{b}) = 1/4$

$D_F(\mathrm{c}) = 1/2$

- F curva suave $\Rightarrow$ $\frac{\text{long}(F \cap B(x,r))}{2r} \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 1$
- ¿Qué pasa en el caso fractal?

$t > 0, \quad \nu$ medida en $\mathbb{R}^d$ (localmente finita)

- *Densidades esféricas centradas*
  - densidad inferior s-dimensional de ν en $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\underline{\Theta}^s(\nu, x) = \liminf_{r \to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{(2r)^s}$$

  - densidad superior s-dimensional de ν en $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\overline{\Theta}^s(\nu, x) = \limsup_{r \to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{(2r)^s}$$

$t > 0, \quad \nu$ medida en $\mathbb{R}^d$ (localmente finita)

- *Densidades esféricas centradas*
  - densidad inferior s-dimensional de ν en $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\underline{\Theta}^s(\nu, x) = \liminf_{r \to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{(2r)^s}$$

  - densidad superior s-dimensional de ν en $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\overline{\Theta}^s(\nu, x) = \limsup_{r \to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{(2r)^s}$$

- *Densidad convexa s-dimensional:*

$$\overline{\Theta}_c^s(\nu, x) = \lim_{r \to 0} \sup_{\substack{x \in U \\ U \text{ abierto convexo} \\ 0 < |U| \leq r}} \frac{\nu(U)}{|U|^s}$$

Teoremas de densidad

Para $\mathcal{H}^s|_F(A) := \mathcal{H}^s(A \cap F)$ y $\mathcal{P}^s|_F(A) := \mathcal{P}^s(A \cap F)$

- $\mathcal{H}^s(F) < \infty \quad \Rightarrow \quad 2^{-s} \leq \overline{\Theta}^s(\mathcal{H}^s|_F, x) \leq 1, \quad \mathcal{H}^s - c.t.p\ x \in F$

Teoremas de densidad

Para $\mathcal{H}^s|_F(A) := \mathcal{H}^s(A \cap F)$ y $\mathcal{P}^s|_F(A) := \mathcal{P}^s(A \cap F)$

- $\mathcal{H}^s(F) < \infty \quad \Rightarrow \quad 2^{-s} \leq \overline{\Theta}^s(\mathcal{H}^s|_F, x) \leq 1, \quad \mathcal{H}^s - c.t.p\ x \in F$
- $\mathcal{H}^s(F) < \infty \quad \Rightarrow \quad \overline{\Theta}_c^s(\mathcal{H}^s|_F, x) = 1, \quad \mathcal{H}^s - c.t.p\ x \in F$

Teoremas de densidad

Para $\mathcal{H}^s|_F(A) := \mathcal{H}^s(A \cap F)$ y $\mathcal{P}^s|_F(A) := \mathcal{P}^s(A \cap F)$

- $\mathcal{H}^s(F) < \infty \quad \Rightarrow \quad 2^{-s} \leq \overline{\Theta}^s(\mathcal{H}^s|_F, x) \leq 1, \quad \mathcal{H}^s - c.t.p\ x \in F$
- $\mathcal{H}^s(F) < \infty \quad \Rightarrow \quad \overline{\Theta}_c^s(\mathcal{H}^s|_F, x) = 1, \quad \mathcal{H}^s - c.t.p\ x \in F$
- $\mathcal{C}^s(F) < \infty \quad \Rightarrow \quad \overline{\Theta}^s(\mathcal{H}^s|_F, x) = 1, \quad \mathcal{H}^s - c.t.p\ x \in F$
- $\mathcal{P}^s(F) < \infty \quad \Rightarrow \quad \underline{\Theta}^s(\mathcal{P}^s|_F, x) = 1, \quad \mathcal{P}^s - c.t.p\ x \in F$

Sea μ_E la medida uniforme en E (medida de Cantor)

Sea μ_E la medida uniforme en E (medida de Cantor)

Proposición

Sea E Cantor central tal que $0 < \mathcal{P}^t(E) < +\infty$. Entonces,

$$\underline{\Theta}^t(\mu_E, x) = \left(\mathcal{P}^t(E)\right)^{-1} \text{ para } \mu_E - \text{casi todo } x;$$

en particular, $\underline{\Theta}^t(\mu_E, x)$ es constante μ_E-casi todo punto.

Sea μ_E la medida uniforme en E (medida de Cantor)

Proposición

Sea E Cantor central tal que $0 < \mathcal{P}^t(E) < +\infty$. Entonces,

$$\underline{\Theta}^t(\mu_E, x) = \Big(\mathcal{P}^t(E)\Big)^{-1} \quad \textit{para } \mu_E - \textit{casi todo } x;$$

en particular, $\underline{\Theta}^t(\mu_E, x)$ es constante μ_E-casi todo punto.

Prueba: Sea $\nu := (\mathcal{P}^t(E))^{-1}\mathcal{P}^t|_E$

$\mathcal{P}^t$ invariante por traslaciones $\Rightarrow \nu(I_\sigma) = \mu_E(I_\sigma)$, $\forall \sigma \in D$

$\Rightarrow \nu = \mu_E$

Luego, para μ_E-c.t.p. x

$1 = \underline{\Theta}^t(\mathcal{P}^t|_E, x) = \underline{\Theta}^t(\mathcal{P}^t(E)\mu_E, x) = \mathcal{P}^t(E)\underline{\Theta}^t(\mu_E, x)$.

Teorema

Sea E Cantor central tal que $\mathcal{P}^t(E) < \infty$. Entonces,

1. $\underline{\Theta}^t(\mu_E, x) \geq (2^t B_t)^{-1}$ *para todo* $x \in E$;
2. *si vale (2), entonces* $\underline{\Theta}^t(\mu_E, x) \leq (2^t B_t)^{-1}$ *para* μ_E *casi todo* $x \in E$.

En particular, $\underline{\Theta}^t(\mu_E, x) = (2^t B_t)^{-1}$ *para* μ_E *casi todo* $x \in E$.

Teorema

Sea E Cantor central tal que $\mathcal{P}^t(E) < \infty$. Entonces,

1. $\underline{\Theta}^t(\mu_E, x) \geq (2^t B_t)^{-1}$ *para todo* $x \in E$;
2. *si vale (2), entonces* $\underline{\Theta}^t(\mu_E, x) \leq (2^t B_t)^{-1}$ *para* μ_E *casi todo* $x \in E$.

En particular, $\underline{\Theta}^t(\mu_E, x) = (2^t B_t)^{-1}$ *para* μ_E *casi todo* $x \in E$.

Sea $\underline{B}_s = \liminf_{n\to\infty} 2^n(s_n + y_n)^s$.

Teorema

Sea E Cantor central con $r_k \leq 1/3$ y $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$. Entonces,

1. $\overline{\Theta}^s(\mu_E, x) \leq 2^{1-s}\underline{B}_s^{-1}$ *para todo* $x \in E$
2. $\overline{\Theta}^s(\mu_E, x) \geq 2^{1-s}\underline{B}_s^{-1}$ *para* μ_E*-casi todo* $x \in E$.

En particular, $\overline{\Theta}^s(\mu_E, x) = 2^{1-s}\underline{B}_s^{-1}$ *para* μ_E*-casi todo* $x \in E$.

- En [Qin Zhou Jia 04] calculan $\overline{\Theta}^s(\mu_E, x)$ con hipótesis (a) $r_k \leq 1/3$ y (b) $0 < \lim_{n\to\infty} 2^n s_n^s < \infty$

- En [Wang Wu Xiong 11] calculan $\overline{\Theta}^s(\mu_E, x)$ y $\underline{\Theta}^s(\mu_E, x)$ para todo x con hipótesis $r_k = \lambda \; \forall k$ y λ un poco más grande que 1/3