Propiedad de continuación única para una ecuación no lineal en un árbol.

Leandro M. Del Pezzo – Carolina A. Mosquera – Julio D. Rossi

Universidad de Buenos Aires.

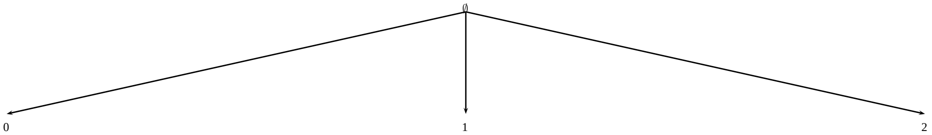
Agosto 2011

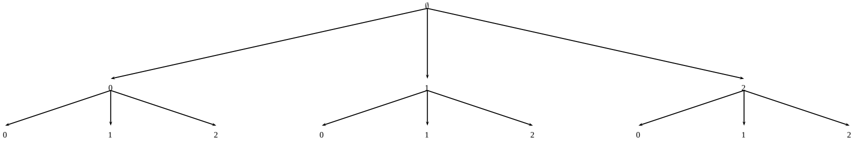
1. Introducción
   - El Árbol
   - Funciones $p-$armónicas

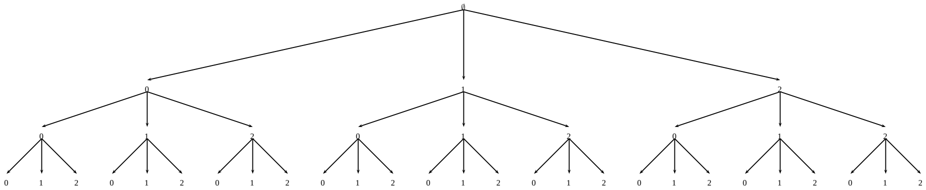
1. Introducción
   - El Árbol
   - Funciones $p-$armónicas

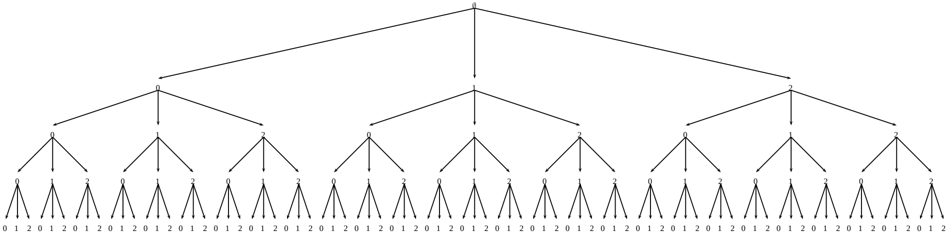
2. Problema de Dirichlet
   - Definición
   - Tug-of-War Game - Existencia y Unicidad
   - Algunos Casos Especiales

$\emptyset$


∅
0
1
2


∅
0
1
2
0
1
2
0
1
2
0
1
2


∅
0
1
2
0 1 2 0 1 2 0 1 2
0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2



$\mathbb{T}$ es un árbol dirigido con 3 ramas desde cada vértice.

Cada vértice $x \in \mathbb{T}$ tiene 3 hijos

$$x_0, x_1, x_2.$$

Notaremos con $\mathcal{S}(x)$ al conjunto formado por los hijos de x.

Cada vértice $x \in \mathbb{T}$ tiene 3 hijos

$$x_0, x_1, x_2.$$

Notaremos con $\mathcal{S}(x)$ al conjunto formado por los hijos de x.

Definición

Una rama $\mathbb{T}$ es una sucesión infinita de vértices, cada uno seguido por un inmediato sucesor. La unión de todas las ramas forman la frontera de $\mathbb{T}$, a la que notaremos con $\partial\mathbb{T}$.

Observar que la función $\psi : \partial\mathbb{T} \to [0,1]$

$$\psi(v) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{3^n}, \quad \forall v = (v_1, \ldots, v_n, \ldots) \in \mathbb{T}.$$

es sobreyectiva.

Observaciones.

- A cada vértice x de nivel k se le asocia un subintervalo del $[0,1]$ de longitud $1/3^k$, de la siguiente manera

$$x \mapsto I_x = \left[\psi(x), \psi(x) + \frac{1}{3^k}\right].$$

I_x se puede pensar como la unión de todas las ramas que empiezan en x.

Observaciones.

- A cada vértice x de nivel k se le asocia un subintervalo del $[0,1]$ de longitud $1/3^k$, de la siguiente manera
$$x \mapsto I_x = \left[\psi(x), \psi(x) + \frac{1}{3^k}\right].$$
I_x se puede pensar como la unión de todas las ramas que empiezan en x.
- Dada $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, definimos F sobre $\partial\mathbb{T}$ de la siguiente manera
$$F(v) := F(\psi(v)), \quad \forall v \in \partial\mathbb{T}.$$

Observaciones.

- A cada vértice x de nivel k se le asocia un subintervalo del $[0,1]$ de longitud $1/3^k$, de la siguiente manera
$$x \mapsto I_x = \left[\psi(x), \psi(x) + \frac{1}{3^k}\right].$$
I_x se puede pensar como la unión de todas las ramas que empiezan en x.
- Dada $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, definimos F sobre $\partial\mathbb{T}$ de la siguiente manera
$$F(v) := F(\psi(v)), \quad \forall v \in \partial\mathbb{T}.$$
- Podemos pensar al conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ como el subconjunto de $\partial\mathbb{T}$ formado por la unión de todas las ramas $v = (v_1, \dots, v_n, \dots)$ con $v_n \in \{0, 2\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $p \geq 2$,

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_p u \\ &= \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) \end{aligned}$$

Sea $p \geq 2$,

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_p u \\ &= \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) \\ &= |\nabla u|^{p-2}\Delta u + (p-2)|\nabla u|^{p-4}\sum_{i,j} u_{x_i} u_{x_i x_j} u_{x_j} \end{aligned}$$

Sea $p \geq 2$,

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_p u \\ &= \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) \\ &= |\nabla u|^{p-2}\Delta u + (p-2)|\nabla u|^{p-4}\sum_{i,j} u_{x_i}u_{x_i x_j}u_{x_j} \\ &= |\nabla u|^{p-2}\left(\Delta u + (p-2)|\nabla u|^{-2}\sum_{i,j} u_{x_i}u_{x_i x_j}u_{x_j}\right) \end{aligned}$$

Sea $p \geq 2$,

$$
\begin{aligned}
0 &= \Delta_p u \\
&= \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) \\
&= |\nabla u|^{p-2}\Delta u + (p-2)|\nabla u|^{p-4}\sum_{i,j} u_{x_i}u_{x_ix_j}u_{x_j} \\
&= |\nabla u|^{p-2}\left(\Delta u + (p-2)|\nabla u|^{-2}\sum_{i,j} u_{x_i}u_{x_ix_j}u_{x_j}\right) \\
&= |\nabla u|^{p-2}\left(\Delta u + (p-2)\Delta_\infty u\right).
\end{aligned}
$$

Strichartz (2006) o Kufman-Llorente-Wu (2003)

$$\Delta u(x) = \frac{1}{3} \sum_{y \in \mathcal{S}(x)} u(y) - u(x).$$

Strichartz (2006) o Kufman-Llorente-Wu (2003)

$$\Delta u(x) = \frac{1}{3} \sum_{y \in \mathcal{S}(x)} u(y) - u(x).$$

Peres-Schramm-Sheffield-Wilson (2009)

$$\Delta_\infty u(x) = \frac{1}{2} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}(x)} u(y) + \inf_{y \in \mathcal{S}(x)} u(y) \right) - u(x).$$

$$
\begin{aligned}
\Delta u + (p-2)\Delta_\infty u = \frac{1}{3} \sum_{y\in\mathcal{S}(x)} u(y) - u(x) \\
+ \frac{(p-2)}{2}\left(\sup_{y\in\mathcal{S}(x)} u(y) + \inf_{y\in\mathcal{S}(x)} u(y)\right) \\
- (p-2)u(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta u + (p-2)\Delta_\infty u = {} & \frac{1}{3}\sum_{y\in\mathcal{S}(x)} u(y) - u(x) \\
& + \frac{(p-2)}{2}\left(\sup_{y\in\mathcal{S}(x)} u(y) + \inf_{y\in\mathcal{S}(x)} u(y)\right) \\
& - (p-2)u(x) \\
& = (p-1)u(x) + \frac{1}{3}\sum_{y\in\mathcal{S}(x)} u(y) \\
& + \frac{(p-2)}{2}\left(\sup_{y\in\mathcal{S}(x)} u(y) + \inf_{y\in\mathcal{S}(x)} u(y)\right)
\end{aligned}
$$

$$(p-1)\left(\Delta u + (p-2)\Delta_\infty u\right) = u(x) - \frac{1}{3(p-1)} \sum_{y \in \mathcal{S}(x)} u(y) + \frac{(p-2)}{2(p-1)} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}(x)} u(y) + \inf_{y \in \mathcal{S}(x)} u(y) \right)$$

$$(p-1)\left(\Delta u+(p-2)\Delta_\infty u\right)=u(x)-\frac{1}{3(p-1)}\sum_{y\in\mathcal{S}(x)}u(y)$$
$$+\frac{(p-2)}{2(p-1)}\left(\sup_{y\in\mathcal{S}(x)}u(y)+\inf_{y\in\mathcal{S}(x)}u(y)\right)$$

Tomando $\alpha={}^{(p-2)}/_{(p-1)}$ y $\beta={}^{1}/_{(p-1)}$, tenemos que $\alpha,\beta>0$ y $\alpha+\beta=1$

$$(p-1)\left(\Delta u+(p-2)\Delta_\infty u\right)=u(x)-\frac{\beta}{3}\sum_{y\in\mathcal{S}(x)}u(y)$$
$$+\frac{\alpha}{2}\left(\sup_{y\in\mathcal{S}(x)}u(y)+\inf_{y\in\mathcal{S}(x)}u(y)\right)$$

Definición

Diremos que $u : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es $p-$armónica si

$$u(x) = \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{y\in\mathcal{S}(x)} u(y) + \inf_{y\in\mathcal{S}(x)} u(y)\right) + \frac{\beta}{3}\sum_{y\in\mathcal{S}(x)} u(y)$$

para todo $x \in \mathbb{T}$.

Dada $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, nos planteamos el siguiente problema de Dirichlet (PD): Buscamos $u : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ tal que

$$u(x) = \frac{\alpha}{2} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}(x)} u(y) + \inf_{y \in \mathcal{S}(x)} u(y) \right) + \frac{\beta}{3} \sum_{y \in \mathcal{S}(x)} u(y)$$

$$\lim_{n \to \infty} u(v_n) = F(v), \quad \forall v = (v_1, \dots, v_n, \dots) \in \partial\mathbb{T}.$$

Dos jugadores, Claudio y Rita, juegan un juego de mesa donde el tablero es $\mathbb{T}$. Se fija una posición inicial $x_0 \in \mathbb{T}$ y se tira una moneda con probabilidad α de que salga cara y β de que salga ceca.

- Si sale cara se tira otra moneda equilibrada. Si nuevamente sale cara, Claudio elige la nueva posición del juego en $\mathcal{S}(x_0)$. Si sale ceca, Rita elige la nueva posición del juego.

Dos jugadores, Claudio y Rita, juegan un juego de mesa donde el tablero es $\mathbb{T}$. Se fija una posición inicial $x_0 \in \mathbb{T}$ y se tira una moneda con probabilidad α de que salga cara y β de que salga ceca.

- Si sale cara se tira otra moneda equilibrada. Si nuevamente sale cara, Claudio elige la nueva posición del juego en $\mathcal{S}(x_0)$. Si sale ceca, Rita elige la nueva posición del juego.
- Si sale ceca, la nueva posición del juego se elige de manera aleatoria en $\mathcal{S}(x_0)$.

Dos jugadores, Claudio y Rita, juegan un juego de mesa donde el tablero es $\mathbb{T}$. Se fija una posición inicial $x_0 \in \mathbb{T}$ y se tira una moneda con probabilidad α de que salga cara y β de que salga ceca.

- Si sale cara se tira otra moneda equilibrada. Si nuevamente sale cara, Claudio elige la nueva posición del juego en $\mathcal{S}(x_0)$. Si sale ceca, Rita elige la nueva posición del juego.
- Si sale ceca, la nueva posición del juego se elige de manera aleatoria en $\mathcal{S}(x_0)$.
- Un vez que se elige un nueva posición, el juego vuelve a empezar.

Dos jugadores, Claudio y Rita, juegan un juego de mesa donde el tablero es $\mathbb{T}$. Se fija una posición inicial $x_0 \in \mathbb{T}$ y se tira una moneda con probabilidad α de que salga cara y β de que salga ceca.

- Si sale cara se tira otra moneda equilibrada. Si nuevamente sale cara, Claudio elige la nueva posición del juego en $\mathcal{S}(x_0)$. Si sale ceca, Rita elige la nueva posición del juego.
- Si sale ceca, la nueva posición del juego se elige de manera aleatoria en $\mathcal{S}(x_0)$.
- Un vez que se elige un nueva posición, el juego vuelve a empezar.

Dos jugadores, Claudio y Rita, juegan un juego de mesa donde el tablero es $\mathbb{T}$. Se fija una posición inicial $x_0 \in \mathbb{T}$ y se tira una moneda con probabilidad α de que salga cara y β de que salga ceca.

- Si sale cara se tira otra moneda equilibrada. Si nuevamente sale cara, Claudio elige la nueva posición del juego en $\mathcal{S}(x_0)$. Si sale ceca, Rita elige la nueva posición del juego.
- Si sale ceca, la nueva posición del juego se elige de manera aleatoria en $\mathcal{S}(x_0)$.
- Un vez que se elige un nueva posición, el juego vuelve a empezar.

El juego se juega infinitas veces, y se obtiene una sucesión de vértices consecutivos

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$$

Dos jugadores, Claudio y Rita, juegan un juego de mesa donde el tablero es $\mathbb{T}$. Se fija una posición inicial $x_0 \in \mathbb{T}$ y se tira una moneda con probabilidad α de que salga cara y β de que salga ceca.

- Si sale cara se tira otra moneda equilibrada. Si nuevamente sale cara, Claudio elige la nueva posición del juego en $\mathcal{S}(x_0)$. Si sale ceca, Rita elige la nueva posición del juego.
- Si sale ceca, la nueva posición del juego se elige de manera aleatoria en $\mathcal{S}(x_0)$.
- Un vez que se elige un nueva posición, el juego vuelve a empezar.

El juego se juega infinitas veces, y se obtiene una sucesión de vértices consecutivos

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$$

Pago: Rita le paga a Claudio $\$F(v)$ $(v = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \mathbb{T})$.

En cada jugada la nueva posición del juego está dada por la distribución de probabilidad

$$q(x_0, x_1, \ldots, x_k, x) = \frac{\alpha}{2}\left\{\delta_{S_I^k(x_0,\ldots,x_k)}(x) + \delta_{S_{II}^k(x_0,\ldots,x_k)}(x)\right\} + \frac{\beta}{3}x$$

En cada jugada la nueva posición del juego está dada por la distribución de probabilidad

$$q(x_0, x_1, \ldots, x_k, x) = \frac{\alpha}{2}\left\{\delta_{S_I^k(x_0,\ldots,x_k)}(x) + \delta_{S_{II}^k(x_0,\ldots,x_k)}(x)\right\} + \frac{\beta}{3}x$$

$S_I = \{S_I^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la estrategia de Claudio, S_I^k indica el próximo movimiento de Claudio si gana el juego en la $k-$ésima jugada.
$S_{II} = \{S_{II}^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la estrategia de Rita.

En cada jugada la nueva posición del juego está dada por la distribución de probabilidad

$$q(x_0, x_1, \dots, x_k, x) = \frac{\alpha}{2}\left\{\delta_{S_I^k(x_0,\dots,x_k)}(x) + \delta_{S_{II}^k(x_0,\dots,x_k)}(x)\right\} + \frac{\beta}{3}x$$

$S_I = \{S_I^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la estrategia de Claudio, S_I^k indica el próximo movimiento de Claudio si gana el juego en la $k-$ésima jugada.
$S_{II} = \{S_{II}^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la estrategia de Rita.
Teorema de Extensión de Kolmogorov

$$\mathbb{P}^{x_0}_{S_I,S_{II}}.$$

En cada jugada la nueva posición del juego está dada por la distribución de probabilidad

$$q(x_0, x_1, \ldots, x_k, x) = \frac{\alpha}{2}\left\{\delta_{S_I^k(x_0,\ldots,x_k)}(x) + \delta_{S_{II}^k(x_0,\ldots,x_k)}(x)\right\} + \frac{\beta}{3}x$$

$S_I = \{S_I^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la estrategia de Claudio, S_I^k indica el próximo movimiento de Claudio si gana el juego en la $k-$ésima jugada.
$S_{II} = \{S_{II}^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la estrategia de Rita.
Teorema de Extensión de Kolmogorov

$$\mathbb{P}^{x_0}_{S_I,S_{II}}.$$

El valor esperado de ganancia es

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S_{II}}(F).$$

El valor de juego para Claudio y para Rita es

$$u_I(x_0) = \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S_{II}}(F),$$
$$u_{II}(x_0) = \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S_{II}}(F),$$

respectivamente.

El valor de juego para Claudio y para Rita es

$$u_I(x_0) = \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S_{II}}(F),$$
$$u_{II}(x_0) = \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S_{II}}(F),$$

respectivamente. Maitra-Sudderth (2006), el juego tiene un valor

$$u_I = u_{II} = u.$$

Manfredi-Parviainen-Rossi (2011): se puede probar que, si F es continua, el valor del juego u es una solución del PD.

Sviridov (2010)

Caso $p = 2$. Si $F \in L^1$, la solución es

$$u(x) = \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} F(y)\, dy.$$

Sviridov (2010)

Caso $p = 2$. Si $F \in L^1$, la solución es

$$u(x) = \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} F(y)\, dy.$$

Caso $p = \infty$. Si F es monótona, la solución es

$$u(x) = \int_{I_x} F(y)\, d\mathbb{C}_x(y).$$

Sviridov (2010)

Caso $p = 2$. Si $F \in L^1$, la solución es

$$u(x) = \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} F(y)\, dy.$$

Caso $p = \infty$. Si F es monótona, la solución es

$$u(x) = \int_{I_x} F(y)\, d\mathbb{C}_x(y).$$

Caso General. Si F es monoótona, la solución es

$$u(x) = \int_{I_x} F(y)\, d\mathbb{P}^x_{\hat{S}_I,\hat{S}_{II}}(y).$$

Nos interesa caracterizar los subconjuntos U de $\mathbb{T}$ que tienen la siguiente propiedad:

Propiedad de continuación unica (PCU)

Si u es una función acotada y $p-$armónica en $\mathbb{T}$ tal que $u = 0$ en U entonces $u = 0$ en $\mathbb{T}$.

Nos interesa caracterizar los subconjuntos U de $\mathbb{T}$ que tienen la siguiente propiedad:

Propiedad de continuación unica (PCU)

Si u es una función acotada y $p-$armónica en $\mathbb{T}$ tal que $u = 0$ en U entonces $u = 0$ en $\mathbb{T}$.

Que se sabe en $\mathbb{R}^n$:

- $p = 2$. Se sabe que si u es armónica y se anula en un abierto entonces $u \equiv 0$.

Nos interesa caracterizar los subconjuntos U de $\mathbb{T}$ que tienen la siguiente propiedad:

Propiedad de continuación unica (PCU)

Si u es una función acotada y $p-$armónica en $\mathbb{T}$ tal que $u = 0$ en U entonces $u = 0$ en $\mathbb{T}$.

Que se sabe en $\mathbb{R}^n$:

$p = 2$. Se sabe que si u es armónica y se anula en un abierto entonces $u \equiv 0$.

$1 < p < \infty$. Sólo se conoce el resultado en el caso $n = 2$. Manfredi (1988).

Teorema

Si U tiene la PCU entonces $\psi(U)$ es denso en $[0,1]$.

Teorema

Si U tiene la PCU entonces $\psi(U)$ es denso en $[0,1]$.

Demostración. Supongamos que $\psi(U)$ no es denso en $[0,1]$ entonces existen $\varepsilon > 0$ y $r \in [0,1]$ tales que

$$(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \cap \psi(U) = \emptyset.$$

Teorema

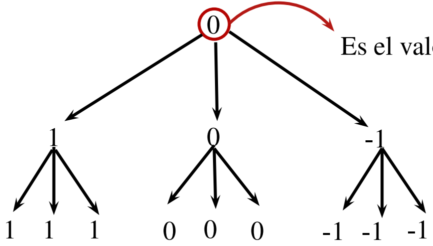
Si U tiene la PCU entonces $\psi(U)$ es denso en $[0,1]$.

Demostración. Supongamos que $\psi(U)$ no es denso en $[0,1]$ entonces existen $\varepsilon > 0$ y $r \in [0,1]$ tales que

$$(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \cap \psi(U) = \emptyset.$$

Por otro lado, existen $k \in \mathbb{N}$ y un nodo $x \in \mathbb{T}$ de nivel k tal que $1/3^k < \tau$ y

$$I_x \subset (r-\varepsilon, r+\varepsilon).$$



Es el valor de u en el nodo x

Teorema

Sea U tal que

(PA) *existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \mathbb{T}$ existe $l \in \{0, \ldots, n\}$ y al menos un rama que comienza en x tal que el $l-$ésimo nodo de la rama pertenece a U.*

Entonces U tiene la PCU.

Teorema

Sea U tal que

(PA) *existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \mathbb{T}$ existe $l \in \{0, \ldots, n\}$ y al menos un rama que comienza en x tal que el $l-$ésimo nodo de la rama pertenece a U.*

Entonces U tiene la PCU.

Demostración. Supongamos que no, entonces existe una función u $p-$armónica y acotada tal que $u = 0$ en U y $u \neq 0$ en $\mathbb{T}$.

Teorema

Sea U tal que

(PA) *existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \mathbb{T}$ existe $l \in \{0, \dots, n\}$ y al menos un rama que comienza en x tal que el $l-$ésimo nodo de la rama pertenece a U.*

Entonces U tiene la PCU.

Demostración. Supongamos que no, entonces existe una función u $p-$armónica y acotada tal que $u = 0$ en U y $u \neq 0$ en $\mathbb{T}$.

Sean

$$M := \sup\{u(x) \colon x \in \mathbb{T}\}$$

$$\delta := \left({}^{\alpha}/_{2} + {}^{\beta}/_{3} \right).$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in \mathbb{T}$ tal que $u(x_0) \geq M - \varepsilon$.

$$M - \varepsilon \leq u(x_0)$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in \mathbb{T}$ tal que $u(x_0) \geq M - \varepsilon$.

$$\begin{aligned} M - \varepsilon &\leq u(x_0) \\ &= \frac{\alpha}{2}\left\{ \max_{y\in\mathcal{S}(x_0)} u(y) + \min_{y\in\mathcal{S}(x_0)} u(y) \right\} + \frac{\beta}{3} \sum_{y\in\mathcal{S}(x_0)} u(y) \end{aligned}$$

.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in \mathbb{T}$ tal que $u(x_0) \geq M - \varepsilon$.

$$\begin{aligned} M - \varepsilon &\leq u(x_0) \\ &= \frac{\alpha}{2}\left\{ \max_{y \in \mathcal{S}(x_0)} u(y) + \min_{y \in \mathcal{S}(x_0)} u(y) \right\} + \frac{\beta}{3} \sum_{y \in \mathcal{S}(x_0)} u(y) \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{3}\beta \right) M + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} \right) \min_{y \in \mathcal{S}(x_0)} u(y). \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in \mathbb{T}$ tal que $u(x_0) \geq M - \varepsilon$.

$$
\begin{aligned}
M - \varepsilon &\leq u(x_0) \\
&= \frac{\alpha}{2}\left\{ \max_{y\in\mathcal{S}(x_0)} u(y) + \min_{y\in\mathcal{S}(x_0)} u(y) \right\} + \frac{\beta}{3}\sum_{y\in\mathcal{S}(x_0)} u(y) \\
&\leq \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{3}\beta\right) M + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}\right) \min_{y\in\mathcal{S}(x_0)} u(y).
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
M - \frac{\varepsilon}{\delta} \leq \min_{y\in\mathcal{S}(x_0)} u(y) \leq u(y), \quad \forall y \in \mathcal{S}(x).
$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in \mathbb{T}$ tal que $u(x_0) \geq M - \varepsilon$.

$$
\begin{aligned}
M - \varepsilon &\leq u(x_0) \\
&= \frac{\alpha}{2}\left\{ \max_{y \in \mathcal{S}(x_0)} u(y) + \min_{y \in \mathcal{S}(x_0)} u(y) \right\} + \frac{\beta}{3} \sum_{y \in \mathcal{S}(x_0)} u(y) \\
&\leq \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{3}\beta \right) M + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} \right) \min_{y \in \mathcal{S}(x_0)} u(y).
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
M - \frac{\varepsilon}{\delta} \leq \min_{y \in \mathcal{S}(x_0)} u(y) \leq u(y), \quad \forall y \in \mathcal{S}(x).
$$

Como U tiene la PA, existe $l \in \{0, \ldots, n\}$ y $(x_0, a_1, \ldots, a_l) \in U$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in \mathbb{T}$ tal que $u(x_0) \geq M - \varepsilon$.

$$\begin{aligned} M - \varepsilon &\leq u(x_0) \\ &= \frac{\alpha}{2}\left\{ \max_{y\in\mathcal{S}(x_0)} u(y) + \min_{y\in\mathcal{S}(x_0)} u(y) \right\} + \frac{\beta}{3} \sum_{y\in\mathcal{S}(x_0)} u(y) \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{3}\beta\right) M + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}\right) \min_{y\in\mathcal{S}(x_0)} u(y). \end{aligned}$$

Entonces

$$M - \frac{\varepsilon}{\delta} \leq \min_{y\in\mathcal{S}(x_0)} u(y) \leq u(y), \quad \forall y \in \mathcal{S}(x).$$

Como U tiene la PA, existe $l \in \{0, \ldots, n\}$ y $(x_0, a_1, \ldots, a_l) \in U$.
Tomo $x_1 := (x_0, a_1) \in \mathcal{S}(x_0) \to u(x_1) \geq M - \frac{\varepsilon}{\delta}$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in \mathbb{T}$ tal que $u(x_0) \geq M - \varepsilon$.

$$\begin{aligned} M - \varepsilon &\leq u(x_0) \\ &= \frac{\alpha}{2}\left\{ \max_{y \in \mathcal{S}(x_0)} u(y) + \min_{y \in \mathcal{S}(x_0)} u(y) \right\} + \frac{\beta}{3} \sum_{y \in \mathcal{S}(x_0)} u(y) \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{3}\beta \right) M + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} \right) \min_{y \in \mathcal{S}(x_0)} u(y). \end{aligned}$$

Entonces

$$M - \frac{\varepsilon}{\delta} \leq \min_{y \in \mathcal{S}(x_0)} u(y) \leq u(y), \quad \forall y \in \mathcal{S}(x).$$

Como U tiene la PA, existe $l \in \{0, \ldots, n\}$ y $(x_0, a_1, \ldots, a_l) \in U$.
Tomo $x_1 := (x_0, a_1) \in \mathcal{S}(x_0) \to u(x_1) \geq M - \frac{\varepsilon}{\delta}$.

$$u(x_k) \geq M - \frac{\varepsilon}{\delta^k} \quad \forall k \in \{2, \ldots, l\} \; (x_k := (x_{k-1}, a_k)).$$

Sabemos que $x_l = (x_{l-1}, a_l) = (x_0, a_1, \ldots, a_l) \in U$, entonces

$$M\delta^l \leq \varepsilon.$$

Sabemos que $x_l = (x_{l-1}, a_l) = (x_0, a_1, \dots, a_l) \in U$, entonces

$$M\delta^l \leq \varepsilon.$$

Si $M \geq 0$,

$$M\delta^n \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Sabemos que $x_l = (x_{l-1}, a_l) = (x_0, a_1, \dots, a_l) \in U$, entonces

$$M\delta^l \leq \varepsilon.$$

Si $M \geq 0$,

$$M\delta^n \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Luego $M \leq 0$.

Sabemos que $x_l = (x_{l-1}, a_l) = (x_0, a_1, \ldots, a_l) \in U$, entonces

$$M\delta^l \leq \varepsilon.$$

Si $M \geq 0$,

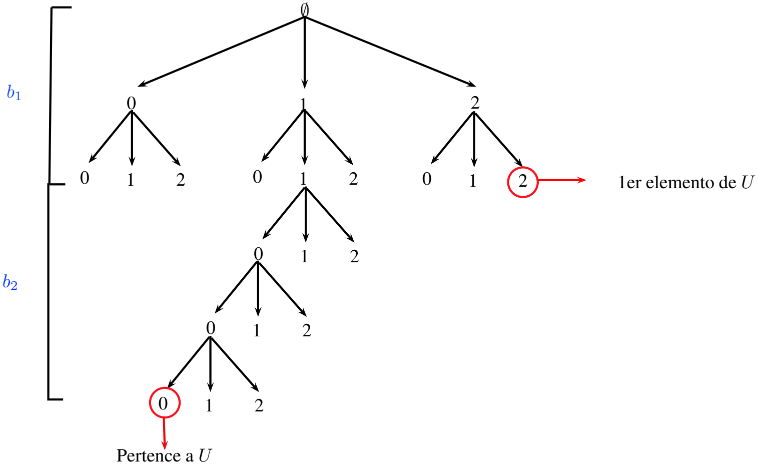
$$M\delta^n \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Luego $M \leq 0$.

De manera análoga se obtiene que $\inf\{u(x) \colon x \in \mathbb{T}\} \geq 0$.

$\square$

Consideremos U con la siguiente propiedad



A esta propiedad la llamaremos PB.

Teorema

Sea U con PB. Entonces U tiene la PUC si y sólo si

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta^{b_j} = +\infty$$

donde $\delta = 1 - \theta$ *y* $\theta = \frac{2}{3}\beta + \frac{\alpha}{2}$

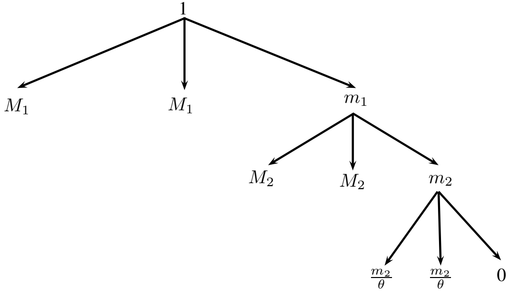
Demostración. La ida. Supongamos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta^{b_j} < +\infty.$$

Demostración. La ida. Supongamos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta^{b_j} < +\infty.$$

Construiremos una función u

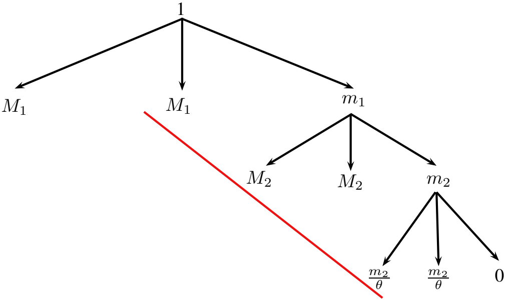


$$m_2 = \frac{\alpha}{2} M_3 + \frac{\beta}{3} (M_3 + M_3)$$

$$
\begin{aligned}
m_2 &= \frac{\alpha}{2} M_3 + \frac{\beta}{3}(M_3 + M_3) \\
&= \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{3}\beta \right) M_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_2 &= \frac{\alpha}{2} M_3 + \frac{\beta}{3}(M_3 + M_3) \\
&= \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{3}\beta\right) M_3 \\
&= \theta M_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_2 &= \frac{\alpha}{2} M_3 + \frac{\beta}{3}(M_3 + M_3) \\
&= \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{3}\beta\right) M_3 \\
&= \theta M_3
\end{aligned}
$$



$$M_1 = M_2 = \frac{m_2}{\theta}.$$

$$M_1 = M_2 = \frac{m_2}{\theta}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} m_1 &= \theta M_2 + (1-\theta) m_2 \\ &= (2-\theta) m_2 \end{aligned}$$

$$M_1 = M_2 = \frac{m_2}{\theta}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} m_1 &= \theta M_2 + (1-\theta)m_2 \\ &= (2-\theta)m_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \theta M_1 + (1-\theta)m_1 \\ &= m_2 + (1-\theta)(2-\theta)m_2 \\ &= (1+(1-\theta)(2-\theta))m_2 \\ &= (1+\delta(1+\delta))m_2 \\ &= (1+\delta+\delta^2)m_2, \end{aligned}$$

$$M_1 = M_2 = \frac{m_2}{\theta}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} m_1 &= \theta M_2 + (1-\theta)m_2 \\ &= (2-\theta)m_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \theta M_1 + (1-\theta)m_1 \\ &= m_2 + (1-\theta)(2-\theta)m_2 \\ &= (1+(1-\theta)(2-\theta))m_2 \\ &= (1+\delta(1+\delta))m_2 \\ &= (1+\delta+\delta^2)m_2, \end{aligned}$$

entonces

$$m_2 = \frac{1}{1+\delta+\delta^2}$$

y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
M_1 = M_2 = \frac{m_2}{\theta} &= \frac{1}{\theta(1+\delta+\delta^2)} \\
&= \frac{1}{(1-\delta)(1+\delta+\delta^2)} \\
&= \frac{1}{(1-\delta^3)}.
\end{aligned}
$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} M_1 = M_2 = \frac{m_2}{\theta} \\ &= \frac{1}{\theta(1+\delta+\delta^2)} \\ &= \frac{1}{(1-\delta)(1+\delta+\delta^2)} \\ &= \frac{1}{(1-\delta^3)}. \end{aligned}$$

En general vale que

$$M_{b_1} = \frac{1}{1-\delta^{b_1}}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} M_1 = M_2 = \frac{m_2}{\theta} \\ &= \frac{1}{\theta(1+\delta+\delta^2)} \\ &= \frac{1}{(1-\delta)(1+\delta+\delta^2)} \\ &= \frac{1}{(1-\delta^3)}. \end{aligned}$$

En general vale que

$$M_{b_1} = \frac{1}{1-\delta^{b_1}}$$

y para todo $k \in \mathbb{N}$

$$M_{b_k} = \frac{M_{b_{k-1}}}{1-\delta^{b_k}}.$$

Entonces

$$M_{b_k} = \prod_{n=1}^{k} \frac{1}{1 - \delta^{b_n}}.$$

Entonces

$$M_{b_k} = \prod_{n=1}^{k} \frac{1}{1-\delta^{b_n}}.$$

Luego u es acotada si y sólo si

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\delta^{b_n})} < +\infty &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{1-\delta^{b_n}}\right) < +\infty \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{b_n} < +\infty.\end{aligned}$$

Entonces

$$M_{b_k} = \prod_{n=1}^{k} \frac{1}{1-\delta^{b_n}}.$$

Luego u es acotada si y sólo si

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\delta^{b_n})} < +\infty &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{1-\delta^{b_n}}\right) < +\infty \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{b_n} < +\infty.\end{aligned}$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} \delta^{b_n} < +\infty$ construimos una función $p-$armónica y acotada que se anula en U y no se anula en $\mathbb{T}$. Luego U no tiene la PCU.

La vuelta. Se observa que la u que construimos es la que desciende con máximos lo más chico posibles.

La vuelta. Se observa que la u que construimos es la que desciende con máximos lo más chico posibles. Entonces si U no tiene la PCU existe una función v $p-$armónica y acotada que se anula en U tal que v no se anula en $\mathbb{T}$. Entonces

$$\max_{\mathbb{T}} |v| \geq \max_{\mathbb{T}} u.$$

$\square$

Muchas Gracias!