

Difusión fraccionaria diádica: Teorema del límite central y aproximación de la identidad

Federico Morana (IMAL-UNL-CONICET)

El núcleo que dá la solución fundamental de la ecuación de difusión fraccionaria asociada a una diferenciación diádica en \mathbb{R}^+ está dado por $W_t(x, y) = \sum_{h \in \mathcal{H}} e^{-t|I(h)|^{-s}} h(x)h(y)$, donde $s \in (0, 1)$ es el orden de diferenciación, t es el tiempo, \mathcal{H} es el sistema de Haar e $I(h)$ es el soporte de la wavelet $h \in \mathcal{H}$ (ver [1]). Se prueba que W_t es un núcleo de Markov que depende de la distancia diádica y satisface una propiedad de estabilidad, definida como el comportamiento asintótico en el infinito como una potencia de la distancia diádica.

Veremos que estos núcleos difusivos se obtienen como límites centrales al aplicar a un ritmo preciso las operaciones combinadas de iteración y molificación a cualesquiera núcleos de Markov diádicos con los mismos parámetros de estabilidad que los primeros. Más aún, encontramos que sólo pueden darse dos alternativas a la “centralidad” a partir de estos procesos de iteración y molificación aplicados a núcleos de Markov diádicos: concentración (que determina aproximaciones a la identidad) y disipación. Nuevamente, la propiedad de estabilidad de los núcleos iniciales resulta ser la que discrimina entre estos tres casos.

La herramienta principal la provee el análisis de Fourier a través de la wavelets de Haar, las cuales conforman bases incondicionales de los espacios L^p para $1 < p < \infty$, y en consecuencia la convergencia se obtiene en tal sentido. Para esta exposición nos ubicaremos en el espacio \mathbb{R}^+ con la familia usual (regular) de intervalos diádicos y la métrica asociada. Es posible, sin embargo, extender en buena medida estos resultados a espacios de tipo homogéneo más generales ([3]).

Referencias:

- [1] Marcelo Actis y Hugo Aimar, *Dyadic nonlocal diffusions in metric measure spaces*, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 18 (2015), no. 3, 762-788. MR 3351499.
- [2] Hugo Aimar, Ivana Gómez y Federico Morana, *The dyadic fractional diffusion kernel as a central limit*. *Czechoslovak Math. J.* (2017). En prensa. <https://arxiv.org/abs/1702.02866>.
- [3] Federico Morana, *Difusión fraccionaria diádica. Límite central y aproximación de la identidad*. Tesis doctoral, UNL, 2018.
- [4] Hugo Aimar, Ivana Gómez y Federico Morana. *Heavy Tailed Approximate Identities and σ -stable Markov Kernels*. *Potential Anal.* (2017). <https://doi.org/10.1007/s11118-017-9644-8>